

# APLIKASI METODE ELEMEN HINGGA PADA ANALISIS STRUKTUR RANGKA BATANG

Servie O. Dapas

Dosen Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Sam Ratulangi Manado

## Abstrak

*Metode elemen hingga (Program RB2D) diaplikasikan pada analisis struktur rangka batang. Setiap elemen batang pada struktur rangka batang diasumsikan hanya mengalami gaya tekan dan gaya tarik pada sumbu aksialnya. Beban dan reaksi hanya bekerja pada simpul-simpul batang. Elemen-elemen rangka batang dihubungkan oleh simpul-simpul yang berperilaku seperti sendi. Pada dasarnya analisis dapat dilakukan dengan menggunakan metode-metode konvensional seperti metode keseimbangan titik simpul dan metode potongan. Persoalan menjadi cukup rumit apabila metode-metode tersebut diaplikasikan pada struktur rangka batang statis tak tentu yang kompleks. Perpindahan titik simpul struktur setelah berdeformasi dan tegangan yang terjadi cukup sulit untuk diperoleh. Persoalan tersebut dapat diatasi dengan mudah antara lain menggunakan metode elemen hingga (Program RB2D), yang cukup mudah diaplikasikan pada struktur statis tertentu maupun statis tak tentu, termasuk menghitung perpindahan-perpindahan titik simpulnya, maupun pengaruh perubahan temperatur dan penurunan tumpuan pada struktur.*

Kata kunci : *elemen hingga, rangka batang, deformasi, tegangan.*

## PENDAHULUAN

Bangunan dengan struktur rangka batang banyak kita jumpai dalam berbagai bentuk konstruksi modern dewasa ini, antara lain jembatan rangka, kuda-kuda baja, gudang, hanggar dan sebagainya.

Konstruksi rangka batang sangat menguntungkan terutama untuk bangunan-bangunan yang berbentuk panjang. Selain dapat meminimalkan berat struktur, juga cukup menarik dari segi arsitektur apabila didisain untuk itu.

Model tipikal struktur rangka batang bidang yang ditinjau dapat dilihat pada Gambar 1. Untuk mendapatkan desain struktur yang optimal diperlukan metode analisis dan disain struktur yang tepat dan mudah.

Tulisan ini membahas analisis elemen hingga untuk analisis struktur rangka batang. Setiap elemen batang pada struktur rangka batang bidang diasumsikan hanya mengalami gaya tekan dan gaya tarik yang bekerja pada sumbu aksial batang (Gambar 2).

Pada struktur rangka batang bidang, semua beban dan reaksi hanya bekerja pada sambungan-sambungan batang yang disebut simpul. Elemen-elemen dihubungkan oleh simpul-simpul pada ujung-ujungnya yang berperilaku seperti sendi.

Struktur rangka batang yang sederhana dapat dianalisis dengan menggunakan beberapa metode statika dasar yang sudah dikenal, antara lain metode keseimbangan titik simpul dan metode potongan. Persoalan menjadi cukup rumit apabila metode-metode tersebut diterapkan untuk menganalisis struktur rangka batang statis tak tentu yang lebih kompleks. Perpindahan-perpindahan titik simpul struktur setelah berdeformasi cukup sulit untuk diperoleh.

Dilain pihak metode elemen hingga (Program RB2D) dapat dengan mudah diaplikasikan untuk menganalisis struktur statis tertentu maupun statis tak tentu, termasuk menghitung perpindahan-perpindahan titik simpulnya, pengaruh perubahan temperatur dan penurunan tumpuan.

## MODEL ELEMEN HINGGA UNTUK STRUKTUR RANGKA BATANG

### Sistem Koordinat Lokal dan Global

Gambar 3. menunjukkan elemen rangka batang bidang dalam sistem koordinat lokal dan global. Pada skema penomoran lokal, kedua nodal elemen diberi nomor 1 dan 2. Sistem koordinat lokal terdiri dari sumbu  $x'$ , yang melalui sepanjang elemen dari nodal 1 ke nodal 2. Semua nilai-nilai dalam sistem koordinat lokal ditandai dengan tanda ( $'$ ).

Sistem koordinat global bersifat tetap dan tidak tergantung pada orientasi suatu elemen. Dalam sistem koordinat global setiap titik nodal memiliki dua derajat kebebasan (dof).

Skema penomoran adalah sebagai berikut:

Sebuah nodal 1 yang mempunyai nomor nodal global  $j$  berhubungan dengan derajat kebebasannya  $2j-1$  dan  $2j$ .

Perpindahan-perpindahan global yang berhubungan dengan nodal  $j$  adalah  $Q_{2j-1}$  dan  $Q_{2j}$ , seperti pada Gambar 1.

Misalkan  $q_1'$  dan  $q_2'$  masing-masing adalah perpindahan-perpindahan nodal 1 dan 2 dalam sistem koordinat lokal maka vektor perpindahan elemen dalam sistem koordinat lokal adalah

$$q' = [q_1' \quad q_2']^T \quad (1)$$

Vektor perpindahan elemen dalam sistem koordinat global adalah

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T \quad (2)$$

Hubungan antara  $q'$  dan  $q$  adalah sebagai berikut: Pada Gambar (1.b.),  $q_1'$  adalah sama dengan jumlah proyeksi  $q_1$  dan  $q_2$  pada sumbu  $x$ . Jadi

$$q_1' = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta \quad (3.a)$$

demikian juga

$$q_2' = q_3 \cos \theta + q_4 \sin \theta \quad (3.b)$$

Cosinus-cosinus arah  $l$  dan  $m$  diperkenalkan sebagai  $l = \cos \theta$ , dan  $m = \cos \phi$  ( $= \sin \theta$ ).

Cosinus-cosinus arah ini adalah cosinus sudut yang dibentuk oleh sistem koordinat lokal dan sistem koordinat global.

Persamaan (3.a) dan (3.b) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$q' = Lq \quad (4)$$

dengan matriks transformasi  $L$  diberikan sebagai

$$L = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \quad (5)$$

Cosinus-cosinus arah  $l$  dan  $m$  dihitung dari data koordinat nodal (Gambar 4), masing-masing

$$l = \frac{x_2 - x_1}{l_e} \quad \text{dan} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{l_e} \quad (6)$$

dengan

$$l_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (7)$$

### Matriks Kekakuan

Elemen rangka batang adalah elemen satu-dimensi yang ditinjau dalam sistem koordinat lokal. Sehingga matriks kekakuan elemen rangka batang dalam sistem koordinat lokal berbentuk

$$k' = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

dengan  $A_e$  adalah luas penampang melintang dan  $E_e$  adalah modulus Young.

Untuk mengekspresikan matriks kekakuan elemen dalam sistem koordinat global ditinjau energi regangan pada elemen. Energi regangan elemen dalam koordinat lokal diberikan oleh

$$U_e = \frac{1}{2} q'^T k' q' \quad (9)$$

Substitusi Persamaan (4) ke persamaan (9), diperoleh

$$U_e = \frac{1}{2} q^T [L^T k' L] q \quad (10)$$

Energi regangan dalam koordinat global dapat ditulis sebagai

$$U_e = \frac{1}{2} q^T k q \quad (11)$$

dengan  $k$  adalah matriks kekakuan elemen dalam koordinat global, yaitu

$$k = L^T k' L \quad (12)$$

Substitusi Pers (5) dan Pers (8) ke persamaan (12) di atas, diperoleh

$$k = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Matriks-matriks kekakuan elemen kemudian dirakit untuk mendapatkan matriks kekakuan struktur.

Penurunan  $k = L^T k' L$  di atas mengikuti juga prinsip variasional Galerkin. Kerja Virtual  $\delta W$  sebagai hasil dari perpindahan  $\psi'$  adalah

$$\delta W = \psi'^T (k' q') \quad (14.a)$$

Karena  $\psi' = L\psi$  dan  $q' = Lq$ , maka

$$\begin{aligned} \delta W &= \psi'^T [L^T k' L] q \\ &= \psi'^T k q \end{aligned} \quad (14.b)$$

Vektor perpindahan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan keseimbangan

$$KQ = F \quad (15)$$

dengan  $K$  adalah matriks kekakuan struktur,  $Q$  adalah vektor perpindahan dan  $F$  merupakan vektor beban.

### Perhitungan Tegangan

Rumusan-rumusan untuk mendapatkan tegangan-tegangan pada elemen dapat diperoleh dengan catatan bahwa suatu elemen rangka batang dalam koordinat lokal adalah elemen sederhana dengan dua gaya (Gambar 2). Oleh karena itu, tegangan  $\sigma$  pada suatu elemen rangka batang, diberikan oleh

$$\sigma = E_e \varepsilon \quad (16.a)$$

Karena regangan  $\varepsilon$  berubah dalam panjang per satuan panjang semula,

$$\begin{aligned} \sigma &= E_e \frac{q_2' - q_1'}{l_e} \\ &= \frac{E_e}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (16.b)$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam perpindahan global  $q$  menggunakan transformasi  $q' = Lq$  menjadi

$$\sigma = \frac{E_e}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} Lq \quad (16.c)$$

Substitusi  $L$  dari Pers. (5) menghasilkan

$$\sigma = \frac{E_e}{l_e} [-l \quad -m \quad l \quad m] q \quad (17)$$

Setelah perpindahan-perpindahan ditentukan dengan menggunakan persamaan-persamaan elemen hingga, tegangan-tegangan dapat diperoleh dari persamaan (17) untuk masing-masing elemen.

### CONTOH NUMERIK

Contoh numerik, diambil dari buku teks oleh Chandrupatla dan Belegundu, 1997.

Tinjau suatu struktur rangka batang seperti pada Gambar 5. Diberikan harga modulus Youngnya,  $E = 29.5 \times 10^6$  psi dan luas tampang batang  $A_e = 1 \text{ in}^2$  untuk semua elemen.

**Hasil Perhitungan**

Tabel 1. Perpindahan Titik Sempul

Perpindahan Nodal	Analitis (in)	RB2D (in)
$Q_1$	0	$1.3241 \times 10^{-6}$
$Q_2$	0	$-2.614 \times 10^{-7}$
$Q_3$	$27.12 \times 10^{-3}$	$2.7120 \times 10^{-2}$
$Q_4$	0	$-1.829 \times 10^{-6}$
$Q_5$	$5.65 \times 10^{-3}$	$5.6507 \times 10^{-3}$
$Q_6$	$-22.25 \times 10^{-3}$	$-2.225 \times 10^{-2}$
$Q_7$	0	$3.4850 \times 10^{-7}$
$Q_8$	0	$0.0000 \times 10^0$

Tabel 2. Tegangan pada Batang

Tegangan	Analitis (psi)	RB2D (psi)
Batang 1	20000.0	$2.000 \times 10^4$
Batang 2	-21880.0	$-2.188 \times 10^4$
Batang 3	-5208.0	$-5.209 \times 10^3$
Batang 4	4167.0	$4.167 \times 10^3$

Tabel 3. Reaksi pada Nodal

Reaksi	Analitis (lb)	RB2D (lb)
DOF 1	-15833.0	$-1.5833 \times 10^4$
DOF 2	3126.0	$3.1254 \times 10^3$
DOF 4	21879.0	$2.1875 \times 10^4$
DOF 7	-4167.0	$-4.1671 \times 10^3$
DOF 8	0.0	$0.0000 \times 10^0$

Hasil perhitungan yang diperoleh dengan program metode elemen hingga RB2D dan

cara analitis untuk perpindahan-perpindahan titik simpul (Tabel 1), tegangan-tegangan pada batang (Tabel 2), serta gaya-gaya reaksi nodal (Tabel 3) tidak mempunyai perbedaan yang signifikan.

**KESIMPULAN**

Metode elemen hingga sangat baik untuk diaplikasikan pada analisis struktur rangka batang sederhana maupun yang lebih kompleks. Metode ini dapat diaplikasikan pada struktur rangka batang statis tertentu maupun statis tak tentu. Program komputer RB2D dapat digunakan untuk analisis struktur rangka batang 2D, karena hasil yang ditunjukkan pada contoh numerik sangat sesuai dengan hasil analitis.

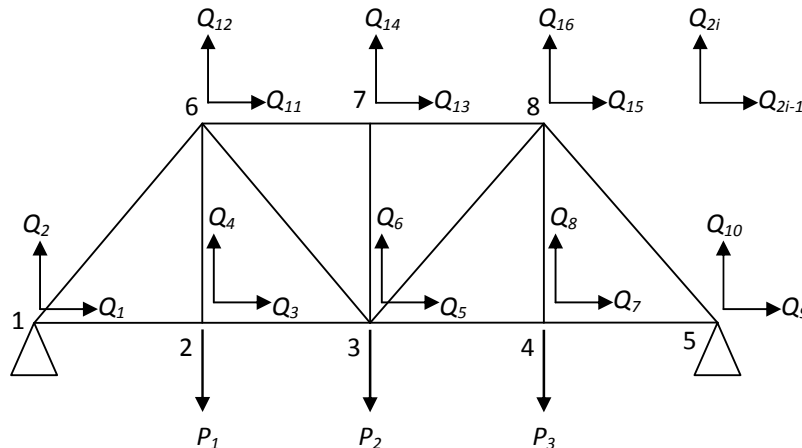
**DAFTAR PUSTAKA**

Chandrupatla, T.R. dan Belegundu, A.D., 1997, "Introduction to Finite Elements in Engineering", 2<sup>nd</sup> Edition, Prentice-Hall, Inc, New Jersey.

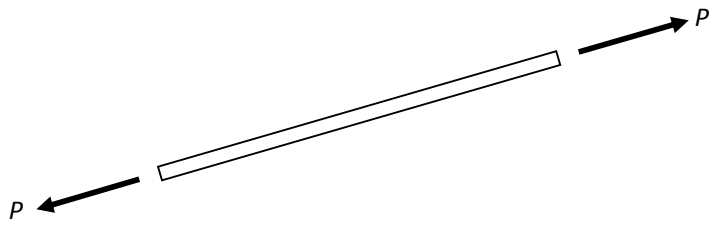
Cook, R.D., 1995, "Finite Element Modeling for Stress Analysis", John Wiley & Sons, Inc, New York.

Hinton, E. dan Owen, D.R.J., 1989, "Finite Element Programming", 5<sup>th</sup> Edition, Academic Press, Inc, San Diego.

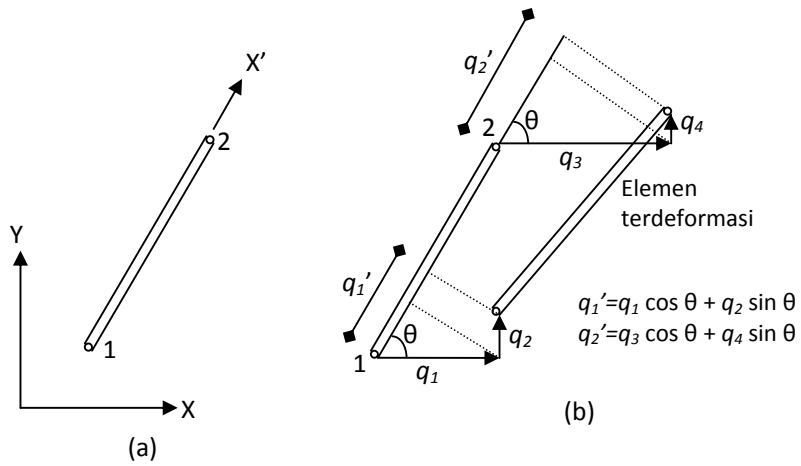
**LAMPIRAN**



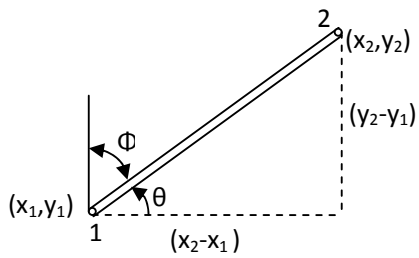
Gambar 1. Struktur Rangka Batang Bidang



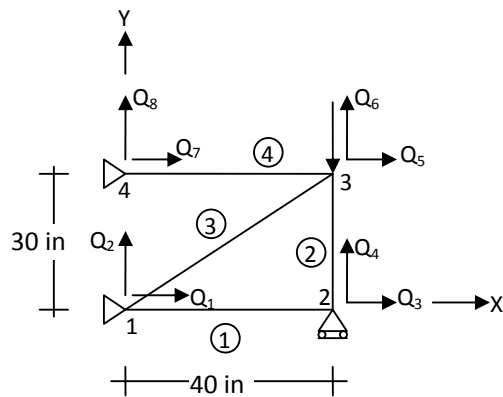
Gambar 2. Elemen Batang



Gambar 3. Elemen Rangka Batang 2D



Gambar 4. Cosinus Arah



Gambar 5. Struktur Rangka Batang