JAE Vol. 13 No. 2, Oktober 1994: 1-20

ANALISA PILIHAN EKONOMI DALAM MULTISOLUSI OPTIMUM MODEL "LINEAR PROGRAMMING"

Yusmichad Yusdja[1)]

Abstrack

The first consideration of multisolution is laid on an idea that economics is a science subjected to a set of decision alternatives. Existing math models utilized, however, are generally static in nature reflected by only one solution as a result and there are no other alternatives provided. The unique solution gives no possibilities to develop economic decisions. Therefore, a multisolution calculation based on existing economic math models is required to be engineered. The main objective of this paper is to perform optimum multisolution of a Linear Programming Model. The conclusion of this paper show that the multisolution analysis on solution of LP's optimum condition finds several important issues. One of these conclusions shows that the LP's optimum solution is not always economically efficient. Besides the alternative owns similar objectives only different in how resource is allocated so that in the optimum alternatives there are possibility to insert the reality problem of resource into the decision making process.

PENDAHULUAN

Dalam analisis ekonomi kuantitatif dikenal berbagai model matematika antara lain yang populer adalah LP ("Linear Programming"), NLP ("Non Linear Programming"), Input-Output analisis dan berbagai turunan dari model-model tersebut. Model-model ini sangat bermanfaat dalam menghitung solusi optimal dalam hal pendapatan atau biaya terhadap alokasi sumber daya kepada berbagai aktivitas ekonomi. Pemanfaatan model-model ini ternyata sangat luas, baik dalam ilmu ekonomi mikro maupun ekonomi makro.

Pada umumnya model matematika dibangun untuk kebutuhan segala macam disiplin ilmu, karena itu, untuk penggunaan setiap model matematika dalam ilmu ekonomi harus mempertimbangkan kelemahan dan kelebihan model tersebut. Akurasi sebuah model akan sangat tergantung kepada seberapa jauh hubungan antara asumsi dan kriteria solusi yang melekat pada model tersebut dengan batasan ilmu ekonomi.

Selain asumsi dan kriteria solusi tersebut, model matematika pada umumnya memiliki solusi yang tunggal. Pertimbangan solusi tunggal ini adalah semata-mata berdasarkan prinsip matematika yang mementingkan hasil akhir. Jika dalam suatu model terdapat banyak solusi (multisolusi) yang sama besarannya (optimum), matematika tidak mempersoalkan hal ini, yang penting memilih salah satu solusi yang paling mudah

1) Staf Peneliti pada Pusat Penelitian Sosial Ekonomi Pertanian, Bogor

dicapai dengan perhitungan yang sederhana. Dalam ilmu ekonomi kuantitatif, sering sekali diperlukan tidak saja solusi akhir tetapi juga alokasinya, dan ini dapat dipenuhi dengan antara lain adanya multisolusi.

Pada sisi lain, ilmu ekonomi itu sendiri mengajarkan bagaimana membuat berbagai pilihan dalam banyak solusi. Karena itu, sesuai dengan tugas ilmu ekonomi dan bukan tugas matematika adalah perlu menyajikan berbagai pilihan keputusan sehingga pengguna dapat membuat kebijaksanaan ekonomi yang lebih sesuai dengan realita kelangkaan sumberdaya yang dihadapinya. Atas dasar pertimbangan itulah, makalah ini bertujuan menampilkan rekayasa multisolusi dan manfaatnya bagi analisis ekonomi dengan menggunakan model LP sebagai kasus.

KONSEP DASAR "LINEAR PROGRAMMING"

Bentuk Umum dan Penentuan Solusi

George B. Dantzing sebagaimana disebutkan di dalam Gass, 1975; adalah seorang ahli matematika yang mengembangkan model ini 44 tahun yang lalu sebelumnya diformulasikan oleh ahli matematika Rusia, bagi kepentingan perencanaan angkatan udara Amerika Serikat. Kini, model ini telah digunakan secara luas dalam berbagai bidang seperti pertanian, industri, transportasi, ekonomi dan sebagainya. LP adalah suatu tehnik matematika dalam memprogramkan sumber-sumber terbatas bagi pencapaian optimasi tujuan (Gass, 1975).

Bentuk umum LP adalah sebagai berikut :

$$\text{Maksimumkan} \quad C = \Sigma C_n X_n \tag{1}$$

$$\text{Kendala} : \quad \Sigma a_{mn} X_n \leq b_m \tag{2}$$

$$\text{dan} : \quad X_n \geq 0 \tag{3}$$

$$\text{atau Minimumkan} \quad C = \Sigma C_n X_n$$

$$\text{Kendala} : \quad \Sigma a_{mn} X_n \geq b_n$$

$$\text{dan} : \quad X_n \geq 0$$

Istilah C digunakan untuk persoalan optimasi baik untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan. Bentuk persamaan (1) dan (2) harus linier. Lebih jauh mengenai asumsi dan kriteria solusi LP dibahas berikut ini dengan menggunakan buku referensi Chiang (1986), Gass (1975), Bronson (1988) dan Hughes-Grawong (1973).

Landasan Pertama : Titik Ekstrim

Konsepsi solusi LP adalah pada titik ekstrim atau titik temu ("the point of contact") dalam konsep linier yakni identik dengan konsep titik singgung ("point of tangency") pada non linier. Titik ekstrim adalah titik potong antara fungsi kendala sesamanya atau antara fungsi kendala dengan salah satu sumbu diagram geometrik. Ini berarti untuk mengoptimalkan C, solusi harus berada pada salah satu titik ekstrim yang dibentuk oleh sistem persamaan 2 pada bidang batas yang memenuhi syarat.

Dalam proses perhitungannya terlebih dahulu harus ditentukan seluruh titik ekstrim pada daerah fisibel, dan kemudian nilai X pada titik ekstrim tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan 1 sampai ditemukan nilai C optimum. Jadi tampak jelas bahwa besarnya parameter fungsi tujuan tidak mempengaruhi lokasi titik ekstrim tetapi berpengaruh pada titik ekstrim mana dipilih sebagai solusi akhir. Kenyataan ini sangat penting, karena konsep titik ekstrim belum tentu sejalan dengan konsep ekonomi. Apa yang kita lakukan selama ini adalah menyesuaikan solusi titik ekstrim tersebut ke dalam ekonomi.

Landasan Kedua : Solusi Tunggal

Pemecahan LP dengan aljabar matriks sudah diformat untuk menghasilkan solusi LP optimum yang tunggal. Dengan melakukan ini tidak ada kesalahan dari segi tujuan perhitungan sekalipun terdapat multisolusi. Hal ini juga berarti bahwa titik ekstrim harus diterjemahkan sebagai sebuah titik dan bukan sebuah garis atau bidang ataupun ruang ekstrim pada diagram Cartesian. Hal ini adalah benar jika ruang atau bidang kendala (persamaan 2) memiliki bentuk m = n, yang memungkinkan persinggungan antara bidang pada sebuah titik.

Konsekuensi dari prinsip ini adalah bahwa suatu sistem persamaan multidimensi (n) harus diterjemahkan ke dalam dimensi yang sama dengan cara jumlah variabel (m) atau harus selalu dipaksakan sama sehingga tercapai m = n, dengan demikian akan selalu terdapat satu solusi. Jika dalam persamaan 2 terdapat mn maka persoalan ini harus diselesaikan dengan menghilangkan sebanyak m-n variabel terlebih dahulu. Jadi penghapusan ini dilakukan secara teknis matematika, yang bagi ilmu ekonomi penghapusan tersebut berarti dengan sengaja melenyapkan peluang masuknya suatu aktivitas ke dalam proses pengambilan keputusan.

Landasan Ketiga : Bilangan Kontinu

Penggunaaan bilangan dalam sistem diskrit merupakan suatu keharusan dalam pemecahan LP. Dengan sistem bilangan kontinu, solusi pada titik ekstrim selalu dapat terjadi, dan ini juga berarti pada kondisi m=n solusi akan selalu tunggal. Sekalipun titik ekstrim itu merupakan bilangan-bilangan pecahan yang sering sekali tidak mempunyai arti praktis bagi ekonomi. Bagi matematika hal itu tidak menjadi masalah, karena jika digunakan konsep bilangan non-diskrit maka ada kemungkinan titik ekstrim tersebut tidak dapat ditemukan. Dengan demikian, Ilmu ekonomi harus selalu menelan solusi yang tidak praktis tersebut.

Pada sisi lain, para ahli ekonomi menganggap bahwa perbedaan antara solusi bilangan pecahan dan bilangan bulat sangat kecil dan karena itu dapat diabaikan, dan tidak perlu dipersoalkan. Selain itu memproses LP dengan menggunakan bilangan non-diskrit akan memakan waktu dan biaya yang besar. Pendapat para ahli ekonomi ini sama saja dengan pendapat para ahli matematika yang mementingkan hasil akhir.

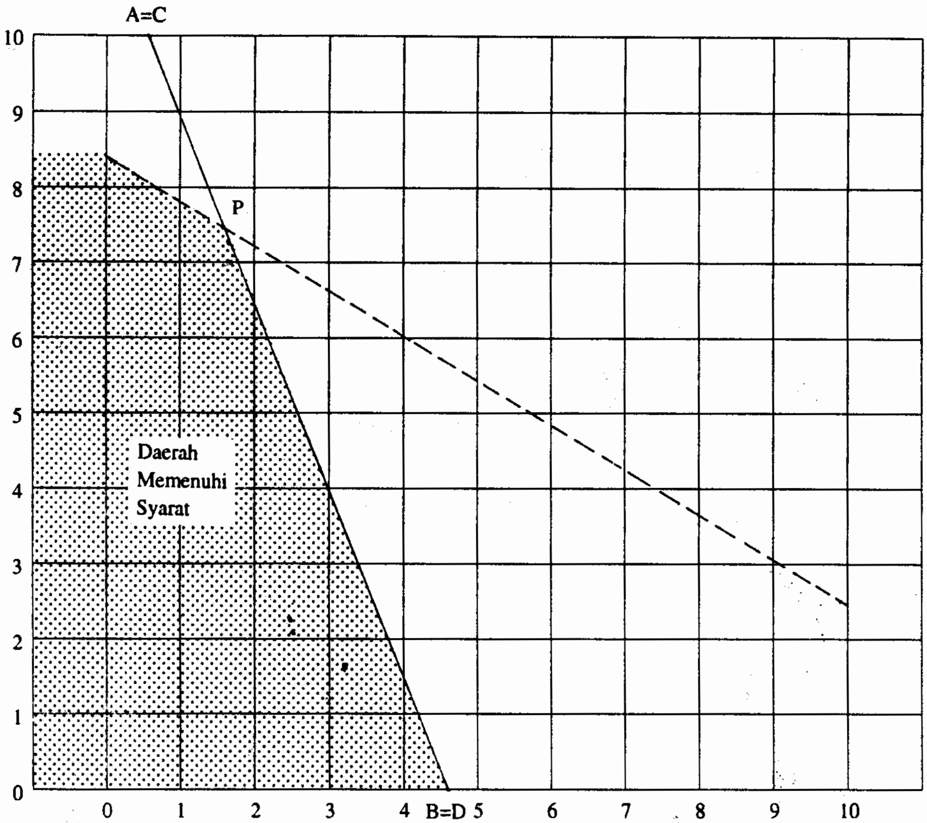
Pendapat tersebut keliru, karena ada suatu yang lebih penting yang tersembunyi dibalik penggunaan bilangan diskrit yakni adanya multisolusi pada titik ekstrim yang dibangun oleh bilangan diskrit tersebut. Pada diskusi lebih jauh akan diperlihatkan bahwa titik ekstrim dengan nilai pecahan tersebut sebenarnya menutup suatu bidang atau ruang ekstrim yang dapat menghasilkan multisolusi. Bagi ilmu ekonomi, bidang multisolusi ini lebih penting dibandingkan sekedar memperdebatkan perbedaan nilai yang kecil antara bilangan pecahan dan bilangan bulat dan biaya perhitungan yang mahal.

Hubungan Dengan Multisolusi

Pertanyaan yang muncul adalah apakah ada hubungan antara ke empat landasan LP tersebut di atas dengan multisolusi? Permasalahannya memang terletak pada empat landasan itu, karena multisolusi dapat muncul dengan memperluas pengertian landasan-landasan tersebut. Hal ini dijelaskan pada Gambar 1, 2 dan 3.

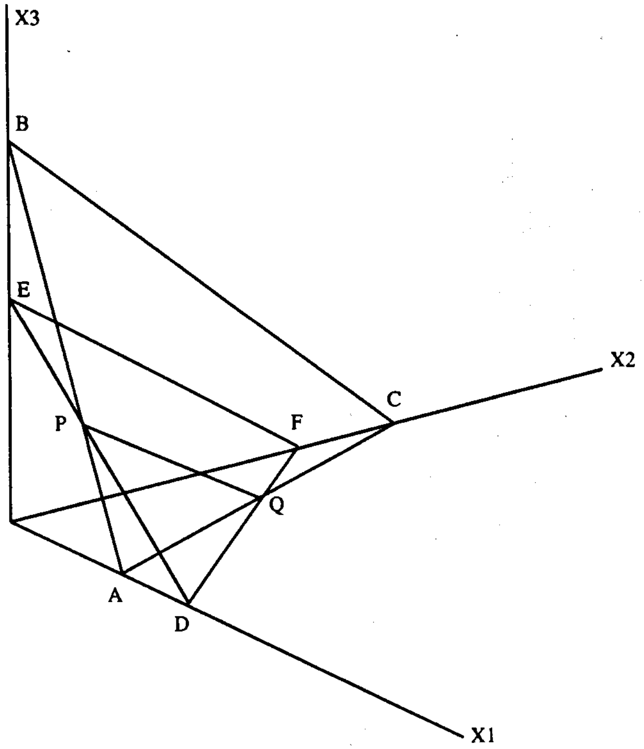
Gambar 1 memperlihatkan munculnya multisolusi karena tangen fungsi tujuan sama dengan tangen salah satu fungsi kendala. Dalam kondisi ini, penyelesaian LP sebenarnya berbentuk multisolusi yakni berada pada sebuah garis, PB. Dalam hal ini, aljabar matriks akan memilih salah satu titik ekstrim tersebut P atau B. Titik-titik di antara PB yang juga memberikan solusi yang sama dengan P atau B tidak pernah mendapat kesempatan. Jika hal ini terjadi dalam multidimensi yang lebih kompleks, maka multisolusi tidak hanya berada pada sebuah garis tetapi dalam sebuah bidang, ruang atau multiruang.

Gambar 2 memperlihatkan bahwa multisolusi dapat terjadi jika m-n. Jika persamaan kendala terdiri dua persamaan tiga dimensi maka perpotongan kedua persamaan ini akan berbentuk sebuah garis. Jika dua bidang empat dimensi berpotongan akan membentuk sebuah bidang. Jika multidimensi berpotongan dengan bidang multidimensi maka titik potongnya berbentuk sebuah multiruang. Titik potong yang berbentuk garis, bidang dan multidimensi ini merupakan kumpulan bakal titik-titik multisolusi yang sama baiknya. Kasus Gambar 2 paling sering ditemukan dalam pemecahan masalah LP.



Gambar 1. Fungsi Tujuan AB berhimpitan dengan salah satu fungsi pembatas yakni CD, sehingga PB merupakan garis solusi yang memenuhi syarat, dengan P dan B sebagai titik ekstrim. Solusi di antara titik P dan B tidak pernah dipermasalahkan

Gambar 3 memperlihatkan bagaimana multisolusi terjadi karena titik ekstrim merupakan bilangan kontinu. Fungsi tujuan tepat bersinggungan dengan fungsi kandala pada titik P yang berupa bilangan pecahan. Di bawah titik P, pada daerah yang memenuhi syarat bagi persoalan memaksimumkan fungsi tujuan, terdapat beberapa titik solusi bilangan bulat. Gambar 3 ini memperlihatkan bahwa titik solusi bilangan pecahan menutup multiruang ekstrim yang sebenarnya dapat menghasilkan multisolusi yang memiliki manfaat bagi analisis ekonomi.

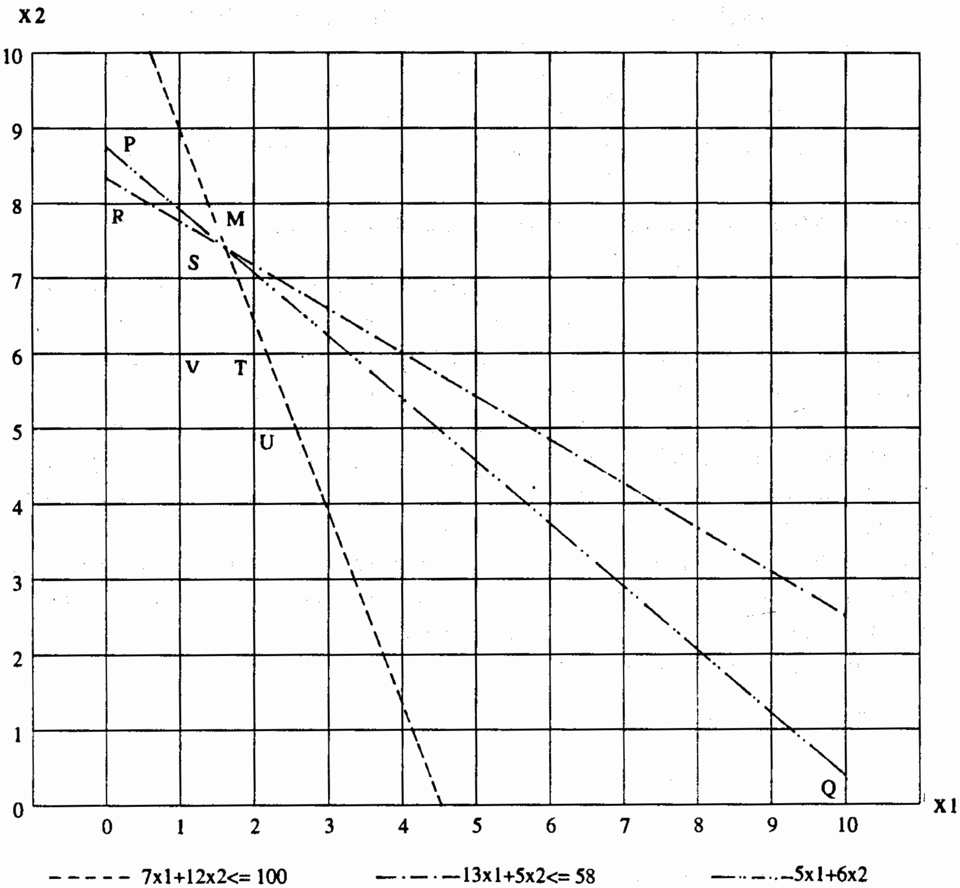


Gambar 2. Bidang pembatas tiga dimensi ABC berpotongan dengan bidang pembatas lainnya yang juga tiga dimensi DEF pada sebuah garis PQ. Garis PQ merupakan sebuah garis ekstrim tempat kedudukan banyak titik ekstrim. Dalam penyelesaian LP, hanya dipilih salah satu titik ekstrim tersebut

Algorithma Matriks dan Pemanfaatan Metoda Numerik Bilangan Sembilan

Aljabar matriks merupakan salah suatu metoda pemecahan sistem persamaan aljabar dengan arah pemecahan pada titik ekstrim. Aljabar matriks sangat umum digunakan dalam pemecahan masalah optimasi, karena lebih cepat dan efektif. Masalahnya adalah aljabar matriks tidak dirancang untuk mencari multisolusi dari persamaan LP. Dengan demikian jika ingin memecahkan masalah multisolusi LP harus digunakan cara berhitung yang lain.

Alternatif pemecahan lain adalah dengan menggunakan metoda numerik dalam bentuk algorithma yang memanfaatkan keunikan sifat-sifat bilangan sembilan (Yusdja,



Gambar 3. Fungsi Tujuan PQ bersinggungan pada bidang pembatas kendala pada titik M yang merupakan kombinasi X1 dan X2 dalam bentuk bilangan pecahan. Solusi pada titik M tersebut menutup bidang multisolusi bilngan bulat yakni R, S, T, U, V dan lainnya

1993). Dengan menggunakan algorithma tersebut dapat dipecahkan masalah multisolusi dan pemecahan bilangan bulat secara efektif (Baca Lampiran). Tulisan ini tidak akan membahas metoda berhitung tersebut tetapi memanfaatkannya sekedar memperlihatkan bagaimana manfaat multisolusi dalam analisis ekonomi. Siapapun bisa membuat aljabar matrik yang baru bagi penyelesaian multisolusi semacam ini.

APLIKASI MULTISOLUSI MODEL "LINEAR PROGRAMMING"

Berikut ini adalah beberapa contoh aplikasi bagaimana manfaat multisolusi bagi analisis ilmu ekonomi. Contoh-contoh berikut sengaja dipilih dari kasus-kasus yang sederhana, namun permasalahannya akan mewakiliki kasus-kasus yang lebih kompleks.

Kasus 1 : Multisolusi Dalam Solusi Maksimum dan Optimum

Berikut ini adalah suatu problem usahatani, menentukan kombinasi komoditas yang diusahakan sehingga diperoleh pendapatan bersih maksimum. Tujuan kasus ini untuk memperlihatkan bahwa melalui pemecahan multisolusi dapat dibuktikan bahwa solusi tunggal LP belum tentu optimum menurut konsep ekonomi.

Sebuah perusahaan pertanian di Cicurug, Sukabumi, merencanakan penggunaan 1 000 hektar lahan untuk menghasilkan Kedele (X_1), padi (X_2) dan ubi kayu (X_3), dengan alokasi input sedemikian rupa sehingga diperoleh pendapatan maksimum, Perencanaan disusun berdasarkan data produksi pada Tabel Lampiran 1. Sumberdaya lain yang tersedia adalah biaya operasional sebesar Rp 312 500 000; jumlah hari kerja sebanyak 313 500 HOK dan biaya panen termasuk pemasaran sebesar Rp 77 000 000. Parameter biaya produksi ditampilkan pada Tabel Lampiran 2.

Perumusan Kedalam Model LP:

Maksimumkan :

$$P = 300X_1 + 400X_2 + 500X_3 \tag{4}$$

Pembatas : (5)

$$\begin{aligned}
1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + S_1 &\leq 1\,000 \\
250\,X_1 + 375\,X_2 + 500\,X_3 + S_2 &\leq 312\,500 \\
285\,X_1 + 380\,X_2 + 475\,X_3 + S_3 &\leq 313\,500 \\
175\,X_1 + 70\,X_2 + 70\,X_3 + S_4 &\leq 77\,000 \\
X_j &\geq 0
\end{aligned}$$

Untuk P= Pendapatan Bersih, X_1 = Aktivitas memproduksi Kedele, ha; X_2 = Aktivitas memproduksi padi, ha; X_3 = Aktivitas memproduksi ubikayu, ha dan S_n = Aktivitas sisa (n = 1, 2, 3, 4)

Persoalan ini sudah diatur demikian rupa supaya diperoleh multisolusi dengan perhitungan sederhana. Perhitungan menggunakan aljabar matriks dan teknik numerik bilangan sembilan (Tabel 1). Hasil perhitungan memperlihatkan bahwa LP memberikan

Tabel 1. Hasil solusi optimal menurut aljabar matriks LP dan sistem numerik bilangan sembilan

	Var.	LP	Perhitungan numerik bilangan sembilan				
			1	2	3	4	5
Aktivitas Real							
- Kedele	X_1	200	200	150	100	500	0
- Padi	X_2	300	300	400	500	600	700
- Ubi kayu	X_3	300	300	250	200	150	100
Aktivitas Sisa							
- Lahan	S_4	200	200	200	200	200	200
Biaya Operasional	S_5	0	0	0	0	0	0
- HOK	S_6	0	0	0	0	0	0
- Biaya Pemasaran	S_7	0	0	250	10500	15750	21000
Maximum Keuntungan Rp.000,-	P	330	330	330	330	330	330

solusi tunggal sedangkan perhitungan numerik bilangan sembilan memberikan multisolusi untuk nilai P yang sama besarnya. Dengan adanya multisolusi, maka tersedia berbagai pilihan. Masalahnya, solusi mana yang akan dipilih? Pemilihan solusi terbaik berdasarkan konsep ekonomi adalah antara lain menggunakan kriteria distribusi atau efisiensi.

Berdasarkan alokasi sumberdaya, dapat dipilih solusi yang menggunakan sumber daya yang mudah diperoleh di daerah setempat atau berapa tingkat produksi suatu komoditas yang sesuai dengan permintaan. Misalnya apakah akan memproduksi kayu sebesar 300 ton, 400 ton atau 700 ton? Sementara dari sisi efisiensi, perlu dihitung rasio biaya dan pendapatan atau kriteria B/C rasio (Tabel 2).

Tabel 2 membuktikan bahwa setiap solusi dalam multisolusi memberikan perbedaan alokasi biaya. Solusi tunggal LP memberikan keuntungan maksimum sebesar Rp 330 000 dengan B/C rasio 1,84 dan biaya rata-rata per Ha sebesar Rp 487 000. Pada multisolusi untuk alternatif ke lima memperlihatkan tingkat keuntungan maksimum yang sama dengan LP tetapi dengan B/C rasio yang lebih tinggi yakni 1,89 karena biaya per ha lebih murah Rp 461 000. Dengan demikian dapat dibuktikan bahwa keliru jika menganggap multisolusi maksimum problema LP sama baiknya, terutama jika dilihat dari ilmu ekonomi.

Kasus 2: Multisolusi Dalam Pembatasan Pendapatan

Adanya multisolusi dari suatu model memungkinkan adanya peluang memilih kombinasi yang terbaik, sebagaimana diperlihatkan dalam kasus berikut. Pemerintah

Tabel 2. Analisis usahatani dengan solusi optimal menurut aljabar matriks LP dan sistem numerik bilangan sembilan

	LP	Berbagai pilihan sistem numerik sembilan				
		1	2	3	4	5
Penggunaan Lahan, hektar						
- Kedele	200	200	150	100	50	0
- Padi	300	300	400	500	600	700
- Ubikayu	300	300	250	200	150	100
- Total Lahan, hektar	800	800	800	800	800	800
- Sisa Lahan, hektar	200	200	200	200	200	200
Pendapatan Kotor, Rp 000						
- Kedele	145000	145000	108750	72500	36250	0
- Padi	253500	253500	338000	2500	507000	591500
- Ubu kayu	321000	321000	267500	214000	160500	107000
Total Pendapatan	719500	719500	714250	709000	703750	698500
Biaya, Rp 000	389500	389500	38450	37900	373750	368500
Keuntungan Bersih Rasic	330000	330000	330000	330000	330000	330000
- Pendapatan/Biaya	1.84	1.84	1.86	1.87	1.88	1.89
- Biaya Rp 000/hektar	487	4.87	480	474	467	461

dalam rangka pemerataan, membatasi pendapatan tertinggi yang boleh dicapai oleh seorang peternak atau sebuah perusahaan yakni sebesar Rp 5 500 000. Ini berarti secara rasional peternak akan berusaha mencapai angka tesebut dengan menekan biaya serendah mungkin.

Sehubungan dengan itu, sebuah perusahaan peternakan bibit ayam menyediakan dana investasi sebesar Rp 5 047 000 dan biaya operasionil sebesar Rp 5 092 000.- untuk membantu koperasi karyawan perusahaannya mendirikan usaha peternakan. Bantuan ini sebenarnya juga memberikan keuntungan kepada perusahaan karena koperasi diwajibkan menampung bibit ayam yang dihasilkan yakni ayam Red (X_1), ayam White (X_2), ayam Broiler (X_3) dan ayam Cross (X_4).

Perusahaan dan koperasi tersebut di atas merencanakan suatu alokasi input sedemikian rupa sehingga diperoleh pendapatan maksimum sesuai ketetapan pemerintah, tetapi perusahaan mewajibkan koperasi menggunakan semua jenis ayam yang dihasilkan dalam jumlah terbesar dari kemungkinan yang ada. Perencanaan disusun berdasarkan data perusahaan bersangkutan, sebagai terlihat pada Tabel Lampiran 3.

Perumusan Masalah Ke Dalam Model LP

Maksimumkan $P = 300X_1 + 600X_2 + 500X_3 + 500X_4$ (6)

Pembatas : $721X_1 + 412X_2 + 618X_3 + 309X_4 \leq 4\,047\,000$ (7)

$$300X_1 + 600X_2 + 200X_3 + 500X_4 = 5\,500\,000 \quad (8)$$
$$268X_1 + 201X_2 + 335X_3 + 201X_4 \leq 5\,092\,000 \quad (9)$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 15\,000 \quad (10)$$
$$X_n \geq 0$$

Untuk: P= Pendapatan bersih; X_1 = Aktivitas memproduksi Red, X_2 = Aktivitas memproduksi White, X_3 = Aktivitas memproduksi Broiler dan X_4 = Aktivitas memproduksi Cross.

Persamaan 8 sengaja diselipkan sebagai pembatas yang telah dtetapkan pemerintah. Dengan selipan tersebut maka, pemecahan fungsi tujuan dipaksa mencapai tingkat pendapatan maksimum sebesar Rp 5 500 000. Dalam analisis ini, perusahaan akan lebih mempersoalkan solusi dengan jumlah ternak ayam terbanyak dari setiap jenis, sementara Koperasi lebih mempermasalahkan biaya minimum.

Hasil perhitungan solusi tunggal dan multisolusi ditampilkan pada Tabel 3. Solusi LP memberikan tingkat pendapatan maksimum sebagaimana telah ditetapkan yakni Rp 5 500 000, dan untuk memenuhi ini LP menyarankan hanya memasukkan satu aktivitas yakni produksi ayam White sebesar 9166 ekor. Jelas bahwa pilihan yang ditawarkan demikian kaku, sehingga harapan perusahaan agar Koperasi menggunakan semua jenis ayam tidak terkabul. Solusi LP tersebut juga tidak memberikan pilihan lain bagi Koperasi.

Pada sisi lain, multisolusi menawarkan 15 alternatif pada tingkat keuntungan Rp 5 500 000 tersebut. Dengan 15 alternatif itu, baik perusahaan maupun Koperasi dapat melakukan suatu perundingan untuk memilih pilihan mana yang terbaik. Hal pertama yang terlihat dari ke 15 pilihan tersebut bahwa pada tingkat pendapatan yang sama jumlah ayam yang ditawarkan adalah antara 9 ribu sampai 12 ribu ekor. Dalam hal ini, pilihan perusahaan adalam jumlah maksimum 12 ribu ekor yang terdiri atas empat jenis ayam.

Untuk membantu Koperasi dalam pengambilan keputusan maka pada baris terakhir dicantumkan indeks besarnya biaya per 1 000 ekor. Nilai biaya 1 adalah untuk pilihan solusi LP. Untuk pilihan lain, jika memiliki nilai indeks lebih kecil dari 1 maka jelas pilihan tersebut lebih efisien dibanding solusi LP. Berdasarkan hal tersebut dapat dilihat bahwa indeks terendah adalah 0,83 (kolom terakhir, Tabel 3). Hal ini membuktikan solusi pilihan LP tidak efisien secara ekonomi. Tetapi pilihan ini tidak memberikan kepuasan pada perusahaan karena pada solusi tersebut hanya ada satu jenis ayam saja sebesar 11 ribu ekor.

Keduanya perlu melihat pilihan-pilihan lain untuk mengambil kesepakatan. Apapun kriteria keputusan yang disetujui tidaklah penting bagi koperasi, karena pilihan manapun dari segi keuntungan tidak berbeda. Sebenarnya pihak perusahaan lebih berkepentingan menunjuk salah satu pilihan dari yang ditawarkan, tanpa merugikan koperasi.

Tabel 3. Solusi optimal dengan pemecahan aljabar matriks dan sistem numerik bilangan sembilan

	Var. LP	Alternatif sistim numerik bilangan sembilan															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Aktivitas Real Produksi Ayam																	
- Ayam Red	X_1	0	0	3	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
- Ayam White	X_2	9.16	9.16	1	4	2	7	5	3	2	0	6	5	4	3	1	0
- Ayam Broiler	X_3	0	0	0	0	1	0	1	2	0	1	2	0	3	1	2	0
- Ayam Cross	X_4	0	0	8	5	7	2	4	6	8	10	3	5	5	7	9	11
Aktivitas Disposal (ribuan)																	
- Investasi	S_5	1270	1270	0	412	0	824	412	0	1030	618	412	1442	0	1030	618	1648
- Biaya Operasional	S_6	3249	3249	2479	2747	2412	3015	2680	2345	2814	2479	2613	3082	2278	2747	2412	2881
Solusi Optimum	P	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500	5500
Jumlah Produksi		9.166	9.166	12	11	12	10	11	12	11	12	11	10	12	11	12	11
Biaya Per 1000 Ekor[1]		613	613	638	634	643	630	640	649	572	586	646	561	655	578	592	510
- Indek Biaya terhadap LP		1	1	1.04	1.03	1.05	1.02	1.04	1.05	0.93	0.95	1.05	0.91	1.05	0.94	0.96	0.83

[1]Dihitung dari total biaya investasi dan biaya operasi

Dengan demikian, dapat dilihat manfaat besar dari analisis multisolusi dalam suatu kerjasama produksi yang saling menguntungkan.

Kasus 3 : Multi Solusi Dalam Pilihan Keseimbangan Permintaan dan Penawaran Dalam Suatu Kontrak Perdagangan

Kasus ini memperlihatkan manfaat multisolusi dalam memutuskan kontrak perdagangan antara dua perusahaan yang saling menguntungkan. Perusahaan pertama adalah KUD Sekarwangi, Cianjur yang mengajukan tender pengangkutan 23 ton beras ke Jakarta. Perusahaan kedua adalah DAMRI yang memiliki tiga jenis angkutan yakni truck (X_1), mini truck (X_2) dan pick up (X_3). Atas dasar Tabel Lampiran 4. KUD mencoba menghitung biaya minimum dengan formulasi sebagai berikut :

Minimumkan $C = 6X_1 + 5X_2 + 3X_3$ (11)

Kendala : $4X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 23$ ton (12)

$X_n \geq$

Untuk C = Biaya Angkutan

Pertama persoalan ini dipecahkan dengan aljabar matriks, diperoleh solusi tunggal dengan nilai C sebesar Rp 345 000 dan kendaraan yang digunakan adalah truck sebanyak 5,75 buah (Tabel 4). Dengan informasi ini, KUD mengajukan penawaran kepada DAMRI bahwa kontrak angkutan beras tersebut dengan biaya Rp 345 000. KUD tahu persis bahwa DAMRI tidak akan dirugikan, karena kombinasi yang bagaimanapun akan selalu menguntungkan bagi DAMRI.

DAMRI, pada sisi lain menginginkan pendapatan maksimum. Persoalannya adalah bagaimana kombinasi kendaraan yang disewakan dengan pendapatan kotor sebesar Rp 345 000 dapat memberikan keuntungan maksimum?. Masalah ini dapat diformulasikan dalam bentuk matematika sebagai berikut :

Minimumkan $C = 6X_1 + 5X_2 + 3X_3$ (13)

Kendala : $4X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 23$ ton (14)

$6X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 345\,000$ (15)

$X_n >= 0$

Persamaan 15 sengaja diselipkan untuk mempertahankan biaya minimum dan memungkinkan diperolehnya multisolusi. Penggunaan aljabar matriks bagi pemecahan persoalan ini memberikan solusi tunggal yang sama dengan semula (Tabel 4, baris pertama), sehingga DAMRI tidak mempunyai pilihan lain. Tetapi dengan pemecahaan numerik bilangan sembilan, diperoleh multisolusi (Tabel 4). Multisolusi pada Tabel 4 ini memberikan kesempatan pada DAMRI untuk memilih salah satu kombinasi yang sesuai tanpa merugikan perusahaan KUD. Pilihan yang rasional bagi DAMRI adalah pilihan yang memberikan keuntungan maksimum yakni menggunakan 11,5 Pick Up dengan keuntungan sebesar Rp 23 000. Solusi LP justru memberikan keuntungan yang terkecil, yakni Rp 17 250.

Sebenarnya seluruh multisolusi pada Tabel 4 tersebut tidak satu pun yang fisibel, karena semua jumlah kendaraan dinyatakan dalam bilangan pecahan. Apakah akan dilakukan pembulatan? Misalnya untuk mendapatkan biaya minimum Rp 345 000 disarankan menggunakan 12 Pick Up sebagai pembulatan dari angka 11,5? Usaha ini menyebabkan tambahan biaya sebesar Rp 15 000 atau total Rp 360 000 dan ini berarti ditolak oleh KUD. Atau DAMRI bersedia rugi sebesar Rp 15 000 yang berarti keuntungan menurun menjadi Rp 21 500. Apakah kerugian semacam ini diperlukan? Hal ini tidak akan terjadi jika digunakan solusi bilangan bulat (Tabel 5).

Atas dasar Tabel 5, maka pilihan buat DAMRI adalah pilihan no 5 karena memberikan keuntungan maksimum sebesar Rp 23 000 dengan mengerahkan armada 10 buah pick up dan 1 buah mini truck dengan biaya Rp 350 000. Tetapi karena KUD ha-

Tabel 4. Solusi biaya minimum menurut aljabar matriks LP dan sistem numerik bilangan sembilan

Pilihan	Trck X_1	Mini T. X_2	Pick Up X_3	Biaya KUD	Keuntungan DAMRI
Menurut LP:				Rp 0000	Rp 000
1	5.75	0	0	34.5	17.25
Sistem Numerik :					
1.	5.75	0	0	34.5	17.25
2.	5	0	1.5	34.5	18.00
3.	3	0	5.5	34.5	20.00
4.	2.5	0	6.5	34.5	20.50
5.	2	0	7.5	34.5	21.00
6.	1	0	9.5	34.5	22.00
7.	0.25	0	11	34.5	22.75
8.	0	0	11.5	34.5	23.00

Tabel 5. Alternatif kombinasi dan biaya menurut perhitungan aljabar sistem numerik bilangan sembilan

Pilihan	Trck X_1	Mini T. X_2	Pick Up X_3	Biaya KUD	Keuntungan DAMRI
				Rp 0000	Rp 000
1.	5	1	0	34.5	16.5
2.	4	1	2	34.5	17.5
3.	2	1	6	34.5	19.5
4.	3	1	4	34.5	18.5
5.	0	1	10	34.5	21.5
6.	1	1	8	34.5	20.5

nya bersedia membayar Rp 34 500 maka DAMRI harus mengurangi keuntungan bersih menjadi Rp 22 500. Jika DAMRI ingin melakukan tender pada perusahaan-perusahaan angkutan lain untuk turut membantu dan ingin melibatkan semua jenis kendaraan untuk pemerataan pendapatan maka DAMRI akan memilih solusi nomor 3. Dan seterusnya.

Kasus beberapa contoh di atas telah memperlihatkan bagaimana multisolusi memberikan manfaat yang besar bagi pengembangan ilmu ekonomi secara praktek.

KESIMPULAN DAN SARAN

1. Suatu model analisis dikatakan dinamis jika model tersebut mampu memberikan berbagai pilihan keputusan (multisolusi) yang sama baiknya tetapi berbeda di dalam alokasi input. Adanya multisolusi memberikan kesempatan bagi berkembangnya ilmu ekonomi dalam pengambilan keputusan. Pada umumnya model-model yang sudah ada bersifat statis karena sangat terikat pada konsep matematika yang melekat pada model itu, sehingga penggunaan model tersebut bagi ilmu ekonomi harus diterjemahkan dengan berhati-hati.

2. Multisolusi dari suatu model dapat dibangkitkan dengan :

   a. Menerapkan pengertian titik potong dan titik singgung menjadi garis sampai pada multiruang perpotongan dan persinggungan.
   b. Menerapkan perhitungan dengan menggunakan susunan bilangan non-diskrit, karena perpotongan atau persinggungan pada bilangan diskrit menutup kemungkinan multisolusi.
   c. Membangkitkan sistem multisolusi di dalam model itu sendiri dengan berbagai teknik matematika, antara lain dengan mengatur terjadinya perpotongan atau persinggungan pada garis atau multiruang geometrik.

3. Tulisan ini telah membuktikan bahwa salah satu kelemahan solusi tunggal adalah tidak terbuktinya solusi tersebut sebagai solusi terbaik. Melalui multisolusi, dapat dibuktikan bahwa solusi optimum pada LP tidak selalu merupakan pilihan terbaik secara ekonomi. Oleh karena ini, penggunaan solusi tunggal harus diterjemahkan secara sempit, supaya pengguna tidak keliru dalam menerapkannya.

4. Dari sisi ilmu ekonomi, adanya multisolusi memberikan banyak pilihan keputusan yang sama baiknya, tetapi berbeda dalam alokasi input. Karena itu, multisolusi memberikan peluang untuk memasukan variabel-variabel di luar model dalam proses pengambilan keputusan mana yang terbaik sesuai dengan realita yang dihadapi. Ini berarti, melalui multisolusi, keputusan optimum yang tidak mungkin dilaksanakan dapat dikeluarkan dari pilihan dan digantikan oleh pilihan lain yang lebih mungkin.

DAFTAR PUSTAKA

Branson, W. H. 1979. Macroeconomics Theory and Policy. 3 th. Harper International Edition. New York.

Chiang, A. C. 1986. Fundamental Methods of Mathematical Economics. 3th Edition. International Student. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokyo.

Gass, S. I. 1975. Linear Programming: Methods & Applications. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokyo.

Kusnadi. Edisi ke 3. Penerbit Erlangga. Jakarta.

Hughes-Grawoig. 1973. Linear Programming. Addision-Wesly Publishing Company Massachusetts.

Ravindran, A; D. T. Philips and J. J. Salberg. 1986. Operations Research: Principles and Practise. John Wiley and Sons. New York.

Samuelson, D. A. and W. D. Nordhans. 1992. Economics. 14th. McGraw-Hill. Inc. New York.

Yusdja, Y. (1993). Formulasi Multisolusi Program Linier dan Program Lingkaran Sebagai Alat Analisis Kebijakan Ekonomi Distribusi. Disertasi. Universitas Padjadjaran. Bandung

Tabel Lampiran 1. Hasil perhitungan biaya dan pendapatan bersih usahatani kedele, padi dan ubi kayu per hektar

	Kedele X_1	Padi X_2	Ubi kayu X_3
Produksi, Kg/Ha	1 800	4 000	10 000
Harga, Rp/kg	402.8	211,25	107
Pendapatan kotor,	725 000	845 000	1070 000
Biaya operasional, Rp/Ha			
- Benih	35 000	55 000	70 000
- Pupuk	40 000	50 000	65 000
- Pestisida	30 000	45 000	90 000
- Traktor	125 000	150 000	150 000
- Biaya lainnya	20 000	75 000	125 000
- Jumlah	250 000	375 0000	500 000
Biaya pemasaran, Rp/Ha	175 000	70 000	70 000
Total biaya, Rp/Ha	425 000	445 000	570 000
Pendapatan bersih, Rp/Ha	300 000	400 000	500 000

Tabel Lampiran 2. Parameter biaya produksi kedele, padi dan ubi kayu

		Kedele X_1	Padi X2	Ubi kayu X_3	Tersedia Bn
1.	Kebutuhan Lahan	1	1	1	1000
2.	Biaya Operasional	250	375	500	312500
3.	Kebutuhan HOK Usahatani/Ha	285	380	475	313500
4.	Biaya Pemasaran Rp 000/Ha	175	70	70	77000

Tabel Lampiran 3. Parameter biaya produksi red, white, broiler dan cross

		Red X_1	White X2	Broiler X3	Cross X4	Bn ooo
1.	Investasi	721	412	618	309	5047
2.	Biaya Operasional/unit	268	201	335	201	5092
3.	Jumlah ayam	1	1	1	1	15
4.	Keuntungan bersih	300	600	200	500	P

Tabel Lampiran 4. Kapasitas dan biaya angkutan

	Truck X_1	Mini Truck X_2	Pick Up X_3
Kapasitas, ton	4	3	2
Keuntungan DAMRI, Rp0000	3	3	2
Sewa Per unit, Rp0000	6	5	3

LAMPIRAN :
KONVENSI ALGORITMA BILANGAN NATURAL SEMBILAN

Berikut ini adalah pokok-pokok idea algorithma aljabar dengan mengunakan sistem numerik bilangan sembilan Bagi pembaca yang ingin mengetahui lebih jauh dapat menemukan rinciannya dalam Yusdja (1993).

Dasar bangunan algoritma bilangan sembilan ini adalah bahwa bilangan "9" dalam susunan bilangan sepuluh dapat digunakan sebagai dasar taksonomi bilangan. Artinya melalui bilangan "9" dapat digeneralisir seluruh bilangan Non Diskrit dalam satu formula atau persamaan berikut:

$$X = (x + \alpha N) \qquad (16)$$

atau $$X = (x) \qquad (17)$$

dimana X = Bilangan itu sendiri

x = Nilai gugus bilangan X

di mana x = 0, 1, 2, 3,..., 8

α = Bilangan natural sembilan sebagai penentu struktur bilangan, apakah bilangan bulat atau pecahan dan jika pecahan, berapa desimal :

= 9 untuk X bilangan bulat

= 0.9 untuk X bilangan pecahan satu desimal.

= 0.09 untuk X bilangan pecahan dua desimal

= 0.009 untuk dan seterusnya

Formulasi (16) memperlihatkan bahwa setiap bilangan dapat diproyeksikan ke dalam satu formula X (huruf besar). Setiap bilangan X tersebut bergerak di dalam 9 orbit yang ditentukan oleh nilai x (huruf kecil). Nilai x mempunyai besaran dari 0 sampai 8, yang memperlihatkan kunci dasar bagi menentukan orbit bilangan X. Seluruh bilangan yang tidak dapat ditangkap oleh formulasi (16) di atas praktis merupakan bilangan pecahan yang tidak dapat diidentifikasi seperti bilangan 0.3333333.... Sementara nilai α merupakan penunjuk sifat suatu bilangan terhadap bilangan sembilan sekaligus menjelaskan posisi desimal dari bilangan X.

Khusus untuk a =9 -artinya X adalah bilangan bulat ditampilkan pada Tabel Lampiran 5.

Tabel Lampiran 5. Kelompok Bilangan Bulat Positip, X Dalam Gugus x

Gugus Bilangan	Deret Bilangan			Formulasi
0	0, 9, 18, ...	X	=	(0 + 9N)
1	1, 10, 19, ...	X	=	(1 + 9N)
2	2, 11, 20, ...	X	=	(2 + 9N)
3	3, 12, 21, ...	X	=	(3 + 9N)
4	4, 13, 22, ...	X	=	(4 + 9N)
5	5, 14, 23, ...	X	=	(5 + 9N)
6	6, 15, 24, ...	X	=	(6 + 9N)
7	7, 16, 25, ...	X	=	(7 + 9N)
8	8, 17, 26, ...	X	=	(8 + 9N)

Nilai x atau nilai gugus dapat ditentukan berdasarkan nilai sisa dari X : 9. Sedangkan N adalah (X - x)/9. Misalkan bilangan X = 17. Dalam bentuk gugus dapat ditulis sebagai X = (8 + 9N), di mana N = 1.

Melalui konvensi persamaan (16), dapat dibangun sekian banyak hukum-hukum operasi matematika, seperti penjumlahan dan perkalian. Dengan bantuan hukum-hukum ini dapat dipecahkan banyak persoalan persamaan dan ketidaksamaan dalam model LP dan NLP. Kelebihan dari penggunaan bilangan "9" adalah kemampuannya menyederhanakan dan mengefektifkan cara berhitung numerik, dengan kata lain persamaan (16) memberikan cara berhitung numerik yang lebih spesifik dibandingkan cara numerik yang sudah ada.

Salah satu contoh sederhana dalam memanfaatkan persamaan (16) adalah bagaimana menampilkan seluruh bilangan bulat X_n yang mungkin dari persamaan berikut :

$$20X_1 + 15X_2 + 10X_3 + 5X_4 = 100 \tag{18}$$

Pertanyaan ini hanya dapat dijawab dengan penyelesaian numerik. Misalnya, berikan nilai bulat tertentu untuk X_1, X_2 dan X_3, kemudian selesaikan X_4. Tetapi dengan cara numerik seperti ini akan memakan waktu yang lama. Tidak demikian halnya jika menggunakan cara numerik berdasarkan persamaan (16), karena sudah terpola dan sistematis. Penyelesaian persamaan (18) melalui persamaan (16) akan lebih efisien dan lebih cepat. Pertama, persamaan (18) dapat diubah ke dalam bentuk persamaan (16), sebagai berikut:

$$20\,(x_1 + \alpha N_1) + 15\,(x_2 + \alpha N_2) + 10\,(x_3 + \alpha N_3) + 5\,(x_4 + \alpha N_4) = 100 \quad (19)$$

Kemudian persamaan (19) disederhanakan berdasarkan persamaan (17) menjadi :

$$(20)\,(x_1) + (15)\,(x_2) + (10)\,(x_3) + (5)\,(x_4) = (100) \quad (20)$$

untuk nilai $x_n = (0,1,2,...8)$. Kemudian secara bergantian subsitusikan nilai x_n kedalam persamaan (20) sehingga terjadi kesesuaian persamaan. Dengan melakukan hal itu secara terus menerus,maka pada akhirnya diperoleh seluruh kombinasi nilai x_n yang mungkin. Beberapa dari hasil perhitungan ditampilkan pada Tabel Lampiran 6. Nilai-nilai yang tersebar pada Tabel Lampiran 6. memberikan beberapa peluang baru antara lain :

1. Solusi LP dapat diselesaikan dengan menggunakan sistem bilangan "9".
2. Mendapatkan multisolusi.
3. Peluang bagi memperdalam pilihan-pilihan ekonomi jika persamaan (18) dianggap sebagai suatu hubungan ekonomi.

Perlu juga dicatat bahwa Tabel Lampiran 6 juga menampilkan solusi pada titik non ekstrim.

Tabel Lampiran 6. Beberapa kemungkinan distribusi nilai X_n yang memenuhi persamaan (18)

X_1	X2	X_3	X_4	20X1	$15X_2$	$10X_3$	5X2	B
5	0	0	0	100	0	0	0	100
4	1	0	1	80	15	0	5	100
4	0	2	0	80	0	20	0	100
4	0	1	2	80	0	10	10	100
3	1	2	1	60	15	20	5	100
3	0	0	8	60	0	0	40	100
2	2	2	2	40	30	20	10	100
2	1	2	5	40	15	20	25	100
2	2	1	4	40	30	10	20	100

Metoda pemecahaanya dengan cara mengkoversikan nilai X pada persamaan (1) ke dalam bentuk sistem numerik bilangan sembilan, sebagai berikut :

$$\text{Maksimumkan } C = \Sigma\ C_n\ (\,(x + aN)\,)_n$$
$$\text{Kendala : } \Sigma\ a_{mn}\ (\,(x + aN)\,)_n \leq b_m$$
$$\text{dan : } (x+aN)_n \geq 0$$

Pemecahan selanjutnya adalah dengan menggunakan hukum 1 dan 2 di atas.