P-ISSN: 2502-7638; E-ISSN: 2502-8391

MENGGUNAKAN CONTOH DALAM PEMBUKTIAN

Christina Kartika Sari[1], Mohamad Waluyo[2], Citra Maharani Ainur[3], Eka Nurhayati Darmaningsih[4]
[1,2,3,4]Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Surakarta
email: christina.k.sari@ums.ac.id

Abstrak
Penelitian ini bertujuan mengidentifikasi bukti-bukti yang dihasilkan mahasiswa dalam memecahkan soal-soal Pengantar Analisis Riil, khususnya bukti yang memanfaatkan contoh spesifik. Pendekatan yang digunakan adalah kualitatif. Subyek diambil dari 54 mahasiswa yang menempuh mata kuliah Pengantar Analisis Riil. Seluruh subjek dihadapkan pada dua soal pembuktian. Dari 54 mahasiswa, tidak lebih dari 15% yang mampu menuliskan bukti yang valid. Sekitar 30% masih belum memiliki pengetahuan yang cukup untuk dapat dirangkai menjadi sebuah bukti yang valid, sehingga mereka gagal dalam membuktikan. Hampir 30% mahasiswa tampak berhasil menyelesaikan pembuktian, tapi ternyata bukti tersebut tidak valid, salah satunya Putri. Putri memilih satu contoh spesifik untuk membuktikan suatu pernyataan implikasi $P \to Q$ yang general. Contoh yang dipilih Putri pun mengabaikan asumsi-asumsi yang diminta oleh soal. Selain itu, Putri tampak mencampuradukkan definisi dan teorema yang sekiranya terkait dengan soal. Oleh karena itu, pembelajaran Pengantar Analisis Riil hendaknya menekankan pemahaman definisi, teorema, lemma, maupun pernyataan matematika lainnya dengan lebih bermakna.

Kata kunci: analisis riil, bukti, contoh spesifik, kesalahan logis, pembuktian,

PENDAHULUAN

Pada tingkat universitas, mahasiswa matematika dihadapkan pada pembuktian dalam mata kuliah yang mempelajari obyek abstrak. Mahasiswa diminta untuk memanfaatkan segala skema yang telah dimilikinya, seperti logika matematika, untuk digunakan dalam memecahkan masalah terkait pembuktian sifat dan teorema. Menurut Selden (2012), pembuktian pada tingkat universitas berbeda dengan pembuktian pada tingkat sekolah menengah. Seperti pada mata kuliah Pengantar Analisis Riil, mata kuliah ini menuntut penalaran dan kemampuan berpikir kritis karena dalam mata kuliah ini mahasiswa diajarkan untuk mempelajari dan memahami konsep-konsep abstrak yang merupakan bagian dari Matematika Analisis, seperti sifat-sifat dasar bilangan riil dan pembuktiannya, barisan bilangan riil serta sifat-sifat terkait kekonvergenan barisan tersebut.

Kemampuan mengkonstruksi bukti sangat penting bagi mereka yang berada pada bidang matematika (Weber, 2001; Ko dan Knuth, 2009). Bukti berperan dalam menjelaskan kebenaran pernyataan matematika (Hanna dan Villiers, 2009; Ko dan Knuth, 2009; Lai, Weber, Ramos, 2012; Stylianou, Blanton, dan Rotou, 2015), menyusun teori matematika secara sistematis, dan menemukan teorema baru (Lai, Weber, Ramos, 2012). Namun pada kenyataannya, pembuktian merupakan permasalahan yang sukar dipecahkan (Bills dan Tall, 1998; Thompson, Senk dan Johnson, 2012; Selden and Selden, 2013). Dalam hal ini ada dua kemungkinan, mahasiswa mengetahui definisi tapi tidak bisa menggunakannya dalam pembuktian, atau mahasiswa tidak mengetahui definisi dari suatu konsep yang dibuktikan. Selden dan Selden (2007) menambahkan bahwa ketika dihadapkan pada soal pembuktian, beberapa mahasiswa tidak bisa menggunakan definisi suatu konsep dan gagal dalam menghubungkan definisi dengan struktur yang dibuktikan. Padahal bukti dari suatu sifat atau teorema bukanlah suatu hal yang unik. Berbagai variasi bukti suatu teorema telah banyak berkembang, bahkan sebagian merupakan bukti yang lebih efisien dari pada bukti awal ketika teorema tersebut disusun (Dawson, 2006). Dengan demikian, sebenarnya, mahasiswa memiliki pilihan-pilihan untuk membuktikan suatu pernyataan.

Pembuktian melibatkan pemikiran mengenai suatu hal yang baru, fokus pada aspek-aspek yang penting, penggunaan pengetahuan-pengetahuan yang telah dimiliki, melihat hubungan-hubungan yang ada, mendefinisikan hal baru (jika diperlukan), dan membuat argumen yang valid (Tall, et al, 2012). Bukti formal merupakan sebuah urutan dari rumusan-rumusan yang telah terbentuk, berupa aksioma-aksioma atau kesimpulan-kesimpulan lain yang telah terbentuk, dan berakhir dengan sebuah teorema yang terbukti (Dawson, 2006). Pada dasarnya, dalam pembuktian yang ditulis mahasiswa terdapat dua aspek, yaitu *the formal-rhetorical part* dan *the problem-centered part*. Bagian pertama, kerangka bukti, meliputi pernyataan yang ada pada teorema, definisi, atau pernyataan lain yang tidak menuntut pemahaman yang mendalam. Sedangkan bagian kedua, bagian di mana masalah terpusat, merupakan pernyataan inti masalah yang memerlukan intuisi dan pemahaman kuat mengenai konsep-konsep yang terlibat (Selden dan Selden, 2013).

Weber (2001) mengkategorikan pembuktian yang dilakukan mahasiswa menjadi empat kategori, yaitu: 1) bukti yang benar, 2) gagal merangkai pengetahuan sintaksis yang dimiliki, 3) tidak memiliki pengetahuan sintaksis yang cukup sebagai dasar pembuktian, dan 4) kesalahan logis. Pembuktian dianggap benar apabila mahasiswa berhasil mendapatkan bukti yang valid, sedangkan dianggap gagal merangkai pengetahuan sintaksis yang dimiliki apabila mahasiswa mengetahui fakta-fakta yang digunakan untuk pembuktian tapi tidak berhasil menggunakan fakta-fakta tersebut untuk mengkostruksi bukti yang diminta. Selanjutnya, pembuktian mahasiswa dianggap tidak memiliki pengetahuan sintaksis apabila mahasiswa tidak mengetahu fakta-fakta yang digunakan untuk mengkonstruksi bukti. Apabila mahasiswa berhasil mengkonstruksi bukti tapi ternyata bukti tersebut tidak valid maka dikategorikan dalam kesalahan logis. Dengan demikian, berdasarkan kategori Weber tersebut, pembuktian yang valid adalah bukti yang benar (*correct proof*), sedangkan kategori pembuktian yang lain merupakan pembuktian yang tidak valid.

Stavrou (2014) menyatakan bahwa mahasiswa sering kali melakukan pembuktian-pembuktian yang tidak valid, yakni mengasumsikan pernyataan yang akan dibuktikan untuk membuktikan pernyataan tersebut, menggunakan contoh khusus kemudian digeneralisasi menjadi pernyataan umum, tidak melakukan pembuktian dua arah untuk membuktikan pernyataan ekuivalen, dan melakukan kesalahan dalam penggunaan definisi. Bahkan, ada mahasiswa yang berkomentar tidak mengetahui bagaimana memulai langkah pembuktian serta memberikan contoh yang tidak perlu.

Contoh merupakan objek matematika yang spesifik dan konkret, bukan lagi sesuatu yang umum dan abstrak (Millls, 2014). Contoh spesifik diberikan kepada mahasiswa untuk memulai mempelajari bukti, berlanjut pada contoh yang lebih luas hingga diperoleh suatu bukti formal yang bisa diterima oleh mahasiswa (Hanna dan Villiers, 2009).

Sebenarnya contoh berperan penting dalam pembuktian dugaan (*conjecture*) di matematika (Lockwood, Ellis, dan Lynch, 2016). Pemilihan contoh yang tepat, serta didukung penggunaan contoh yang benar dapat digunakan untuk mengembangkan dan memahami suatu bukti. Namun seringkali, mahasiswa tidak cermat dalam melakukannya. Pemilihan contoh yang tepat dapat dilakukan di antaranya dengan: memilah contoh-contoh sesuai hipotesis, termasuk contoh penyangkal; memilih contoh dengan sifat-sifat tertentu yang sesuai dengan pernyataan; atau mengembangkan contoh dari yang sederhana ke yang lebih kompleks. Penggunaan contoh bukan hanya untuk melihat kebenaran dugaan, tapi juga untuk memahami kebenaran dugaan (Ellis, et al, 2013; Lockwood, Ellis, dan Lynch, 2016). Contoh spesifik digunakan untuk memahami bagaimana aplikasi suatu teorema (Thompson, Senk dan Johnson, 2012). Seperti dalam pandangan dosen yang beraliran progresif, pemahaman merupakan tujuan pembelajaran yang penting. Pembelajaran dilakukan secara induktif, berangkat dari contoh-contoh kasus yang memenuhi suatu dugaan, untuk kemudian diperumum, dipercaya dapat meningkatkan pemahaman mahasiswa dalam memahami suatu teorema (Hemmi, 2010).

Berdasarkan observasi pada proses pembelajaran Pengantar Analisis Riil, memang sering kali mahasiswa meminta dosen untuk memberikan contoh sehingga memudahkannya dalam memahami sebuah teorema. Namun, dosen selalu menegaskan bahwa contoh tersebut hanyalah alat untuk memahami bukti, bukan untuk membuktikan kebenaran teorema. Contoh dapat digunakan sebagai bukti apabila kita menyanggah kebenaran suatu dugaan (Hanna dan Villiers, 2009). Bukti dan contoh penyangkal (*counterexample*) membantu melihat apakah suatu pernyataan benar atau tidak (Ko dan Knuth, 2009).

Penelitian ini bertujuan mengidentifikasi bukti-bukti yang dihasilkan mahasiswa dalam memecahkan masalah Pengantar Analisis Riil, terutama bukti yang memanfaatkan contoh kasus spesifik. Apabila berbagai pembuktian yang dilakukan mahasiswa dalam memecahkan masalah Pengantar Analisis Riil telah diidentifikasi, dosen dapat memberi tindakan di dalam proses belajar mengajar, terutama menangani pembuktian tidak valid yang dilakukan mahasiswa. Selain itu, pembuktian-pembuktian yang valid dapat dijadikan masukan bagi dosen dan mahasiswa, sehingga mahasiswa tidak terbelenggu dalam satu pembuktian dari dosen saja.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif. Dalam penelitian ini, subyek penelitian ditentukan dengan pemilihan sampel bertujuan (*purposive sample).* Subyek penelitian terdiri dari 54 mahasiswa mata kuliah Pengantar Analisis Riil. Data utama berupa hasil tes tulis, sedangkan data pendukung berupa hasil observasi yang diperoleh melalui observasi kegiatan belajar mengajar dan hasil tugas terstruktur. Pemeriksaan keabsahan data dilakukan melalui *investigator triangulation*, yakni dengan melakukan pengecekan oleh beberapa pengamat atau ahli (Mackey dan Gass, 2016).

Langkah awal dalam penelitian ini dengan menyusun indikator-indikator bukti dugaan dalam menyelesaikan masalah Pengantar Analisis Riil. Secara garis besar, pembuktian akan berdasar kategori Weber seperti yang ada pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Indikator Pembuktian Berdasarkan Weber

Kategori	Indikator
Bukti yang benar	**Mahasiswa membuktikan dengan benar** • mahasiswa menyelesaikan pembuktian • mahasiswa menggunakan setiap fakta (definisi, teorema, lemma atau pernyataan) dengan benar • mahasiswa mengkaitkan satu fakta dengan fakta lain dengan logis
Gagal merangkai pengatahuan sintaksis	**Mahasiswa gagal dalam membuktikan karena ketidakmampuan dalam merangkai fakta-fakta menjadi bukti yang valid** • Subyek tidak menyelesaikan pembuktian • Subyek menyebutkan fakta-fakta (definisi, teorema, lemma, atau

Kategori	Indikator
	pernyataan) dengan benar • Subyek tidak mampu mengaitkan fakta-fakta tersebut
Tidak memiliki pengetahuan sintaksis yang cukup	**Subyek gagal dalam membuktikan karena kurangnya pengetahuan mengenai fakta-fakta yang digunakan dalam pembuktian** • Subyek tidak menyelesaikan pembuktian • Subyek menyebutkan fakta-fakta (definisi, teorema, lemma, atau pernyataan) tapi tidak benar
kesalahan logis	**Subyek gagal dalam membuktikan karena logical error** • Subyek menyelesaikan pembuktian • Subyek melakukan kesalahan langkah dalam pembuktian

Selanjutnya, hasil pembuktian yang dilakukan oleh satu subjek bernama Putri dianalisis lebih lanjut. Putri dipilih karena kesalahan logis yang dilakukannya pada kedua soal. Untuk memastikan kenyamanan subjek, Putri telah mengetahui bahwa hasil pekerjaannya digunakan untuk data penelitian ini.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk memperoleh data mengenai pembuktian yang dilakukan oleh mahasiswa, dua kasus pembuktian diberikan kepada 54 mahasiswa peserta mata kuliah Pengantar Analisis Riil. Kasus matematika disusun dengan mengambil sebagian teorema pada buku karya Bartle dan Sherbert (2010), dengan simbol R menyatakan sistem bilangan riil. Kasus tersebut dinamai Kasus 1 dan Kasus 2, dengan rincian sebagai berikut:

Kasus 1 : Diberikan $A \subseteq R$ dan $c \in R$. Buktikan bahwa jika terdapat barisan $(x_n) \subseteq A,\ x_n \neq c$ untuk setiap $n \in N$ dan $x_n \to c$, maka c titik limit A.

Kasus 2: Diberikan $f: A \to R,\ f(x) \geq 0$. Buktikan bahwa jika $\lim_{x \to c} f(x)$ ada, maka $\lim_{x \to c} f(x) \geq 0$.

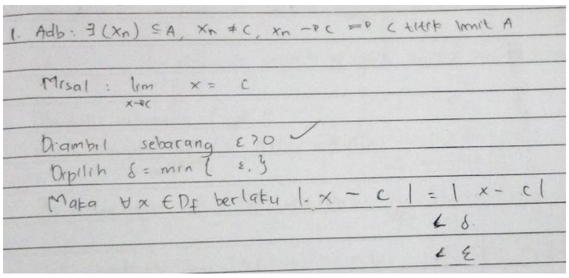
Berdasarkan analisis pada hasil pekerjaan mahasiswa dalam membuktikan Kasus 1, hanya ada 9,26% mahasiswa yang menyebutkan fakta-fakta matematika dengan benar, tapi 1,85% di antaranya juga tidak mampu merangkai fakta tersebut menjadi sebuah bukti yang logis. Pada Kasus 2, ada 14,81% yang berhasil menyusun pernyataan-pernyataan dengan logis sehingga menghasilkan bukti yang valid dan sebesar 9,26% mahasiswa mampu menyebutkan fakta-fakta yang dapat diguakan untuk pembuktian, tapi mereka gagal dalam merangkainya sebagai sebuah bukti yang benar. Menurut Weber (2001), mahasiswa sering gagal dalam melakukan pembuktian pernyataan karena mahasiswa tidak bisa merangkai pengetahuan dan fakta-fakta yang dimiliki untuk mengkonstruksi sebuah bukti. Dengan kata lain, mahasiswa memiliki pengetahuan yang diperlukan untuk membuktikan suatu pernyataan, tapi tidak bisa menggunakan pengetahuan tersebut.

Meskipun mahasiswa telah menerima konsep atau definisi yang terkait, tidak menjamin mahasiswa dapat menggunakannya. Alcock dan Simpson (2011) menyatakan bahwa dari keseluruhan mahasiswa yang telah diberikan definisi barisan naik dan barisan turun dalam perkuliahan Analisis Riil, hanya 29% yang dapat dengan benar menggunakan definisi yang telah diberikan.

Sebanyak 19 mahasiswa tidak memahami pengetahuan sintaksis yang digunakan dalam pembuktian Kasus 1. Hasil ini juga tidak jauh berbeda ketika mereka diminta menyelesaikan Kasus 2, yakni ada 17 mahasiswa yang memiliki pengetahuan terkait konsep-konsep yang semestinya dimanfaatkan dalam pembuktian Kasus 2. Dalam hal ini, mereka melakukan berbagai kesalahan dalam menuliskan fakta-fakta, baik definisi, teorema maupun lemma.

Dari keseluruhan mahasiswa, secara berturut-turut, sebanyak 31,48% dan 33,33% di antaranya melakukan kesalahan logis ketika membuktikan Kasus 1 dan Kasus 2. Mereka mengklaim pernyataan-pernyataan yang salah sebagai suatu kebenaran. Pembuktian yang diyakini benar oleh mahasiswa, padahal sebenarnya tidak valid merupakan kejadian yang sering terjadi. Salah satu kesalahan logis dilakukan dengan memilih menggunakan satu contoh untuk membuktikan suatu pernyataan yang general atau dengan menggunakan berbagai fakta matematika yang salah, tapi diyakini sebagai sesuatu yang benar. Hal ini menghasilkan suatu bukti yang tidak valid (Hanna dan Villiers, 2009). Ada tujuh mahasiswa yang mencoba membuktikan Kasus 1 maupun Kasus 2, dengan menggunakan contoh atau pernyataan khusus yang belum tentu berlaku general. Seperti yang dikatakan Stravou (2014), mahasiswa banyak melakukan pembuktian dengan menggunakan contoh ketika mereka dihadapkan pada pembuktian pernyataan berbentuk implikasi $P \to Q$.

Salah satu mahasiswa yang melakukan hal ini pada kedua kasus adalah Putri. Pembuktian Kasus 1 ditempuh dengan mengambil contoh fungsi dan membuktikan nilai limitnya. Berikut merupakan hasil pekerjaan Putri dalam membuktikan Kasus 1.



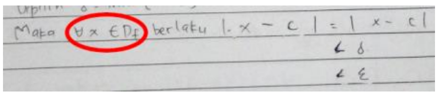
Gambar 1. Pekerjaan Putri dalam membuktikan Kasus 1

Pada awal pembuktian Kasus 1, Putri melakukan pemisalan seperti terlihat pada Gambar 3 berikut.

Gambar 2. Pemisalan yang dilakukan Putri pada Kasus 1

Terlihat bahwa langkah pertama yang dipilih Putri adalah memisalkan nilai limit suatu fungi apabila x mendekati c. Objek matematika $\lim_{x \to c} x = c$ ini merupakan contoh karena spesifik mengenai suatu konsep, serta bersifat konkret (Mills, 2014). Padahal, Kasus 1 menuntutnya untuk membuktikan sebuah teorema mengenai hubungan barisan konvergen dengan titik limit suatu himpunan. Dapat dikatakan, Putri tidak memiliki pengetahuan sintaksis terkait titik limit suatu himpunan. Putri menganggap definisinya sama dengan definisi limit fungsi. Menurut Alcock dan Simpson (2011), sebagian besar mahasiswa tidak konsisten menggunakan definisi yang telah diberikan ketika menemui contoh-contoh penggunaan definisi tersebut. Ditegaskan pula bahwa penyebab hal ini terjadi adalah mahasiswa tidak membaca definisi dengan benar sehingga salah dalam penerapan, atau mahasiswa memang tidak memahami definisi yang telah diberikan dosen.

Dalam membuktikan limit fungsi yang telah dipilihnya $\left(\text{yakni} \lim_{x \to c} x = c\right)$, Putri mengambil sebarang $\varepsilon > 0$, kemudian Putri menentukan δ yang memenuhi pernyataan: $\forall x \in D_f$ dibuktikan bahwa berlaku $|x - c| < \varepsilon$. Meskipun ada kekurangan dalam langkah tersebut (Putri tidak menyebutkan syarat x harus memenuhi $0 < |x - c| < \delta$) seperti terlihat pada Gambar 3 berikut.

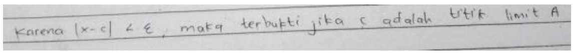


Gambar 3. Proses pembuktian yang dilakukan Putri pada Kasus 1

Namun, keseluruhan langkah tersebut jelas merupakan kerangka pembuktian pernyataan pada Gambar 3 (Selden dan Selden, 2013). Namun, pemilihan $\delta = \min\{\cdots\varepsilon\}$, mengindikasikan bahwa pusat masalah pembuktian yang belum sempurna diatasi. Ketika berbicara minimal suatu himpunan, paling tidak ada dua anggota dalam himpunan itu.

Putri juga menuliskan simbol D_f, yang berarti domain suatu fungsi f. Namun, Putri belum pernah mendefinisikan fungsi f sebelumnya. Hal ini dimungkinkan karena dalam proses pembelajaran sering kali dosen menggunakan objek fungsi dengan huruf f sehingga dalam menyebut domain fungsi menjadi D_f. Akibatnya Putri cenderung menyebut D_f dalam buktinya tanpa mendefinisikannya terlebih dulu.

Untuk menutup bukti, Putri menuliskan seperti yang tampak pada Gambar 4 berikut.

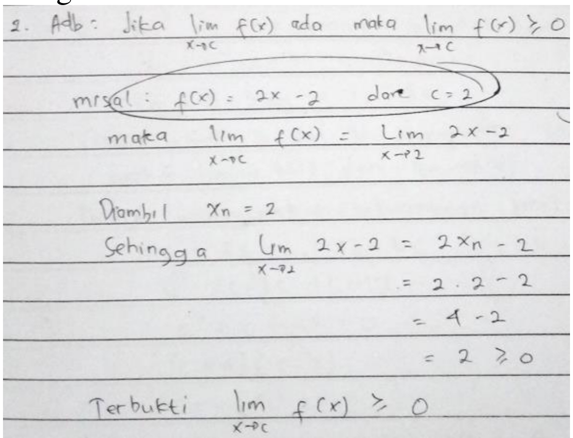

karena $|x-c| < \varepsilon$, maka terbukti jika c adalah titik limit A

Gambar 4. Kesimpulan Putri pada akhir pembuktian Kasus 1

Putri berhasil mengkonstruksi bukti secara utuh. Meskipun limit fungsi merupakan salah satu titik limit suatu himpunan, tapi Putri meyakini membuktikan limit fungsi sama dengan membuktikan titik limit suatu himpunan secara umum.

Kasus 1 merupakan pernyataan dalam bentuk implikasi $P \to Q$. Putri tidak memahami bagaimana teknik membuktikan pernyataan berbentuk demikian. Putri tidak menyinggung sedikit pun mengenai adanya asumsi barisan (x_n) pada A seperti yang muncul pada asumsi soal.

Putri pada Kasus 2, Putri mengambil contoh fungsi dan titik limit tertentu, yaitu fungsi $f(x) = 2x - 2$ dan titik limit $c = 2$, kemudian Putri menghitung limit fungsi tersebut. Gambar 5 di bawah ini merupakan pembuktian yang dilakukan Putri ketika disuguhi Kasus 2.


2. Adb: Jika $\lim_{x\to c} f(x)$ ada maka $\lim_{x\to c} f(x) \geq 0$

misal: $f(x) = 2x - 2$ dan $c = 2$

maka $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to 2} 2x - 2$

Diambil $x_n = 2$

Sehingga $\lim_{x\to 2} 2x - 2 = 2x_n - 2$

$= 2 \cdot 2 - 2$

$= 4 - 2$

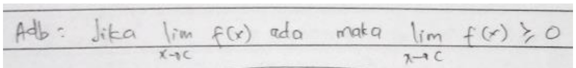
$= 2 \geq 0$

Terbukti $\lim_{x\to c} f(x) \geq 0$

Gambar 5. Pekerjaan Putri dalam membuktikan Kasus 2

Selanjutnya Putri memilih barisan yang bernilai konstan, yakni $x_n = 2$, dan membuktikan bahwa limit fungsi pada suku-suku barisan tersebut bernilai positif.

Tanpa membatasi domain fungsi $f(x) = 2x - 2$, tentu saja hasilnya tidak selalu positif. Putri tampak mengabaikan asumsi bahwa nilai fungsi pada himpunan A haruslah positif. Putri menghilangkan asumsi $f(x) \geq 0$ sejak awal proses pembuktiannya. Sejak awal bukti Kasus 2 Putri menulis seperti yang terlihat pada Gambar 6 berikut.

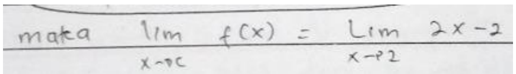

Adb: Jika $\lim_{x\to c} f(x)$ ada maka $\lim_{x\to c} f(x) \geq 0$

Gambar 6. Awal pembuktian Kasus 2

Hal ini cukup berdampak serius dalam proses selanjutnya, Putri sama sekali tidak menyinggung asumsi tersebut, tapi tetap berhasil mengkonstruksi bukti. Meskipun sering kali dijumpai pernyataan matematika yang dapat dibuktikan tanpa menghiraukan salah salah satu asumsinya (ini berarti pernyataan tersebut berlaku pada domain yang lebih luas), tapi hal ini tidak berlaku pada Kasus 2. Dapat dengan mudah ditemukan contoh penyangkal apabila asumsi $f(x) \geq 0$ tersebut dihilangkan. Misalnya saja fungsi konstan $f(x) = -1$, yang didefinisikan pada seluruh x di R, limit fungsi tersebut ada tapi bernilai negatif.

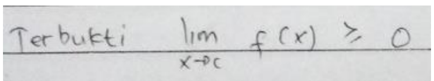
Mahasiswa sering kali tidak memperhatikan pentingnya peranan asumsi yang disuguhkan soal. Mereka menganggap remeh pernyataan-pernyataan pada soal atau teorema yang bukan menjadi pusat masalah (Ioannou, 2016). Lebih lanjut, Ellis, et al (2016) menyatakan bahwa salah satu langkah yang dapat ditempuh dalam pemilihan contoh untuk pembuktian dugaan adalah memeriksa batasan-batasan yang diberikan soal. Dalam Kasus 2, terdapat asumsi $f(x) \geq 0$ yang diabaikan oleh Putri.

Setelah menuliskan pernyataan pada Gambar 6, selanjutnya Putri memisalkan $f(x) = 2x - 2$ dan $c = 2$. Sekali lagi, Putri menggunakan contoh spesifik untuk membuktikan suatu pernyataan yang general. Putri tidak memperhatikan apakah nilai $f(x) = 2x - 2$ selalu memenuhi asumsi $f(x) \geq 0$ meskipun ini benar untuk domain tertentu (ketika $x \geq 1$). Putri hanya mencoba memenuhi asumsi $\lim_{x \to c} f(x)$ ada melalui penjelasannya seperti yang tampak pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Perhitungan nilai $\lim_{x \to c} f(x)$

Langkah selanjutnya yang ditempuh Putri adalah mengambil $x_n = 2$. Kemudian Putri menunjukkan limit $f(x_n) = 2 \geq 0$. Meskipun tidak cukup data untuk menyimpulkan, tapi sekilas Putri tampak mengarahkan buktinya pada kriteria barisan untuk limit fungsi. Selain itu, penulisan barisan yang dilakukannya juga kurang tepat. Pada akhir pembuktian, Putri berhasil mengkonstruksi bukti dengan menuliskannya seperti yang tampak pada Gambar 8.



Gambar 8. Akhir pembuktian Kasus 2

Dari yang terlihat pada hasil pekerjaan Putri di kedua kasus, sebenarnya Putri memahami masalah yang diberikan. Namun, Putri beranggapan bahwa pembuktiannya dapat dilakukan dengan mengkaji salah satu contoh saja (Harel dan Fuller, 2013). Contoh yang dipilih Putri dalam membuktikan Kasus 1 pun tidak sesuai dengan dugaan yang harus dibuktikannya, begitu pula pada Kasus 2. Selain itu, pengetahuan sintaksis Putri untuk membuktikan kedua kasus juga kurang. Hal ini terlihat ketika Putri mengabaikan atau menghilangkan asumsi yang diberikan oleh kedua pernyataan. Senada dengan hasil penyelidikan Mairing (2014), bahwa mahasiswa memahami masalah yang diberikan, mengetahui apa yang diketahui dan ditanyakan pada soal, mengetahui konsep terkait soal, tapi tidak dapat menggunakannya dalam pembuktian, bahkan mahasiswa tidak mempunyai skema dalam pemecahan masalah.

Menurut hasil penelitian yang dilakukan Ioannou (2016), ketika diminta untuk membuktikan suatu pernyataan memenuhi suatu definisi formal, mahasiswa mengalami tiga hal, yakni: 1) mahasiswa mengabaikan prasyarat mendasar yang ada pada definisi, 2) mahasiswa tidak sepenuhnya memenuhi kelengkapan definisi, atau 3) mahasiswa menggunakan konsep-konsep lain yang sekiranya berhubungan dengan pembuktian. Secara garis besar, pembuktian yang dilakukan Putri tampak sesuai dengan hal ketiga, yakni menggunakan contoh fungsi yang menurutnya cocok dengan pernyataan yang dibuktikan.

SIMPULAN

Banyak mahasiswa yang masih belum memiliki pengetahuan yang cukup untuk dapat dirangkai menjadi sebuah bukti yang valid, sehingga mereka gagal dalam membuktikan soal Pengantar Analisis Riil. Selain itu, banyak juga mahasiswa yang berhasil menyelesaikan pembuktian, tapi bukti tersebut tidak valid, salah satunya bernama Putri. Putri menggunakan contoh spesifik untuk membuktikan suatu pernyataan yang general. Bahkan, contoh yang dipilih Putri pun tidak memenuhi asumsi-asumsi yang diminta oleh soal. Putri juga belum memiliki pengetahuan sintaksis yang cukup, definisi belum dipahaminya dengan baik.

Berdasarkan hal tersebut, perkuliahan Pengantar Analisis Riil hendaknya memperhatikan bagaimana mengkonstruksi sebuah bukti. Teknik-teknik pembuktian dikenalkan kepada mahasiswa dengan lebih bermakna. Pemahaman definisi, teorema dan lemma harus lebih ditekankan kepada mahasiswa agar mereka dapat merangkainya sebagai sebuah bukti yang logis ketika dihadapkan pada kasus pembuktian. Selain itu, penggunaan contoh spesifik harus ditekankan sebagai pengantar bukti atau alat bantu memahami teorema, bukan untuk membuktikan teorema.

DAFTAR PUSTAKA

Alcock, Lara dan Adrian Simpson. "Classification and Concept Consistency". *Canadian Journal of* Science*, Mathematics and Technology Education, (2011) 11:2, 91-106. DOI:10.1080/14926156.2011.570476*

Bartle, Robert G dan Donald R. Sherbert. 2010. *Introduction to Real Analysis (Fourth Edition)*. John Wiley & Sons, Inc.

Bills, E. dan David Tall. "Operable definitions in advanced mathematics: The case of least upper bound". *Proceedings of PME 22 (1998)*, 2*: 104-111. Stellenbosch, South Africa*.

Dawson, John W. "Why Do Mathematicians Re-prove Theorems?" *Philosophia Mathematica (III) 14 (2006):269–286. DOI:10.1093/philmat/nkl009.*

Ellis, Ami B, et al. "Choosing and Using Examples: How Example Activity can Support Proof Insight". Dalam Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International 2 – 265. Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2 (2013): 265-272*. Kiel, Germany: PME.

Hanna, Gila dan Michael de Villiers. "The 19th ICMI Study: Proof and proving in mathematics education". *ZDM Mathematics Education (2008) 40: 329–336. Dordrecht: Springer. DOI 10.1007/*s11858*-008-0073-4*.

Harel, Guershon dan Evan Fuller. "Reid, D.A. and Knipping, C.: Proof in mathematics education: research, learning, and teaching". *ZDM Mathematics Education (2013) 45:497–499. DOI 10.1007/s11858-013-0497-3.*

Hemmi, Kirsti. "Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof". *Educ Stud Math (2010) 75:271–291. Springer. DOI 10.1007/s10649-010-9256-3*

Ioannou, Marios. "Commognitive Analysis of Undergraduate Mathematics Students' Responses in Proving Subgroup's Non-Emptiness". Dalam White, B., Chinnappan, M. & Trenholm, S. (Eds.). *Opening up mathematics education research (Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia) (2016): 344–351*. Adelaide: MERGA.

Ko, Yi-Yin dan Eric Knuth. "Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions". *Journal of Mathematical Behavior 28 (2009):*

*68–77. Elsevier. DOI:10.*1016*/j.jmathb.2009.04.005.*

Lai, Yvonne; Keith Weber and Juan Pablo Mejıa-Ramos. "Mathematicians' *Perspectives* on Features of a Good Pedagogical Proof". *Cognition and Instruction, 30(2) (2012): 146–169. Taylor & Francis Group, LLC. DOI: 10.1080/07370008.2012.661814.*

Lockwood, Elise; Amy B. Ellis, dan Alison G. Lynch. "Mathematicians' Example-Related Activity when Exploring and Proving Conjectures". *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed. (2016) 2:165–196. Springer International Publishing Switzerland. DOI 10.1007/s40753-016-0025-2.*

Mairing, Jackson Pasini. "Student's Difficulties in Solving Problem of Real Analysis". Dalam *Proceeding of International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics And Sciences 2014, Yogyakarta State University, 18-20 May 2014.*

Mackey, A. dan Gass, S. M. *Second Language Research: Methodology and Design Second Edition*. New York: Routledge, 2016.

Mills, Melissa. "A framework for example *usage* in proof presentations". *Journal of Mathematical Behavior 33 (2014) 106–118. Elsevier Inc. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.001.*

Selden, Annie. "Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level". Dalam *Proof and Proving in Mathematics Education*. Hanna, G. dan Villiers, M. D. New ICMI Study Series Vol. 15. 2012. Springer.

Selden, Annie dan John Selden. "Overcoming students' *difficulties* in learning to understand and construct proofs". *Technical report of Department of Mathematics, Tennessee Technological University 2007-1.*

Selden, Annie dan John Selden. "Proof and Problem Solving at University Level". *The Mathematics Enthusiast: Vol. 10: No. 1 (2013), Article 14*.

Stavrou, S. G. "Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates". *IUMPST: The Journal. Vol 1 (Content Knowledge), March 2014.*

Stylianou1, Despina A.; Maria L. "Blanton dan Ourania Rotou. Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof". *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed. (2015) 1:91–134. DOI 10.1007/s40753-015-0003-0*

Tall, David, et al. "Cognitive Development of Proof". Dalam *Proof and Proving in Mathematics Education*. Hanna, G. dan Villiers, M. D. 2012. New ICMI Study Series Vol. 15. Springer.

Thompson, Dennise. R.; Sharon L. Senk dan Gwendolyn J. Johnson. "Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks". *Journal for Research in Mathematics Education, (2012) Vol. 43, No. 3: 253-295.*

Weber, Keith. "Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge". *Educational Studies in Mathematics. (2001) 48(1):101-11.*