

STUDI KEAKURATAN ELEMEN CANGKANG BERBASIS *KRIGING* DALAM MENGANALISIS CANGKANG YANG TEBALNYA TIDAK KONSTAN

Yosua Christabel¹, Wong Foek Tjong² dan Pamuda Pudjisuryadi³

ABSTRAK : Penelitian ini bertujuan untuk menguji keakuratan elemen cangkang berbasis *Kriging* dalam menganalisis cangkang yang tebalnya tidak konstan. Elemen cangkang berbasis *Kriging* ini sebenarnya mempunyai kapasitas untuk membentuk elemen cangkang dengan tebal tidak konstan hanya belum diuji performanya. Permasalahan yang menjadi sarana uji adalah modifikasi ketebalan dari *benchmark problems* yang sudah ternama dalam dunia metode elemen hingga. Beberapa diantaranya adalah *Cook's Membrane Problem*, *Hemispherical Shell with 18 Degrees Cut-Off*, dan lainnya. Tolok ukur dari pengujian ini adalah displacement. Semua *benchmark problem* tersebut disajikan melalui *ABAQUS* dengan menggunakan elemen 3 dimensi. Performa dari elemen cangkang berbasis *Kriging* secara umum menunjukkan hasil yang baik terhadap berbagai permasalahan tersebut mengingat asumsi dasarnya diturunkan dari elemen 3 dimensi. Penelitian ini diharapkan menjadi sebuah referensi dalam mengembangkan elemen cangkang berbasis *Kriging* dalam dunia metode elemen hingga secara umum serta khususnya teknik sipil.

KATA KUNCI: *kriging*, elemen cangkang, tebal tidak konstan, *ABAQUS*.

1. PENDAHULUAN

Elemen cangkang adalah elemen yang digunakan untuk memodelkan struktur cangkang termasuk pelat dan membran. Studi tentang elemen cangkang (*shell element*) sudah berkembang sejak setengah abad (Alhazza & Alhazza, 2004; Gilewski & Radwańska, 1991; Lomboy, 2007; Yang et al., 2000) dan beberapa sudah diterapkan dalam *software* metode elemen hingga komersial untuk analisis struktur. Pada penelitian sebelumnya oleh Tanjoyo & Subianto, 2009 menguji elemen cangkang yang terdapat dalam SAP 2000 dengan tebal konstan. Penelitian tersebut menggunakan beberapa *benchmark problems* dari literatur (Belytschko et al., 1985; Knight, 1997; Simo et al., 1989; Ma, 1990; White & Abel, 1989) seperti *Cook's Membrane Problem*, *MacNeal-Harder Beams (straight, curved, twisted beams)*, *Morley Rhombic Plate Bending*, *The Rectangular and Circular Plates*, *The Cantilever Quarter Cylinder*, etc. Setelah dibandingkan dengan hasil eksak yang terdapat dari literatur, beberapa kesimpulan dirumuskan dalam penelitian tersebut. Diantaranya adalah jenis elemen yang digunakan untuk memodelkan suatu struktur sangat berpengaruh terhadap hasil yang didapatkan. Secara umum jenis elemen segiempat lebih baik dari elemen segitiga.

Dalam penelitian selanjutnya pada metode elemen hingga, ditemukan suatu jenis metode yang baru yaitu metode elemen hingga berbasis *Kriging* yang di dalamnya mencakup juga elemen cangkang. Elemen cangkang berbasis *Kriging* yang disajikan dalam program *MATLAB (K-Shell)* melalui penelitian Wong, 2009 juga sudah teruji terhadap struktur cangkang yang tebalnya konstan. Sesungguhnya program *MATLAB (K-Shell)* ini mempunyai kemampuan untuk menganalisis struktur cangkang yang tebalnya tidak konstan tetapi belum pernah diuji keakuratannya. Tetapi karena

¹ Mahasiswa S-1 Program Studi Teknik Sipil, yosua_danny7@yahoo.com.

² Dosen Program Studi Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Jl.Siwalankerto 121-131 Surabaya, wftjong@petra.ac.id.

³ Dosen Program Studi Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Jl.Siwalankerto 121-131 Surabaya, pamuda@petra.ac.id.

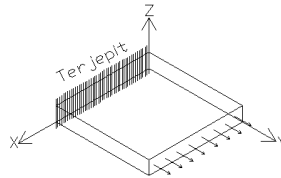
kurangnya *benchmark problems* untuk struktur cangkang yang tebalnya tidak konstan, maka peneliti dalam hal ini akan mengambil *benchmark problems* yang sudah ada seperti dalam penelitian Wong, 2009 kemudian dimodifikasi secara linier maupun non-linier dalam arah tebal.

Kemudian penelitian ini akan menguji struktur cangkang yang tebalnya tidak konstan menggunakan elemen cangkang berbasis *Kriging* dalam program *MATLAB (K-Shell)* dibandingkan dengan *software ABAQUS* karena *software* yang sebelumnya digunakan untuk penelitian Tanjojo & Subianto, 2009 yaitu SAP 2000 tidak mempunyai kemampuan untuk menganalisis maupun menguji struktur cangkang yang tebalnya tidak konstan.

2. LANDASAN TEORI

2.1. ELEMEN CANGKANG (*SHELL ELEMENT*)

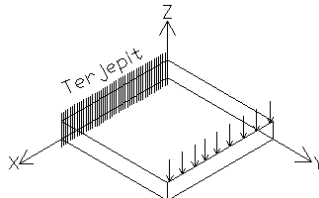
Elemen cangkang (*shell element*) adalah suatu jenis elemen yang digunakan untuk memodelkan struktur cangkang termasuk pelat dan membran. Membran adalah suatu struktur bidang yang dibebani dalam bidangnya, sehingga pada membran hanya terdapat gaya-gaya dalam sebidang, tidak terdapat gaya momen dan gaya geser transversal (Computers and Structures, 1995). **Gambar 1** menunjukkan contoh struktur membran.



Gambar 1. Struktur Membran

Sumber: Tanjojo, F. dan Subianto, K.S. (2009)

Pada struktur pelat, terdapat beban vertikal yang menyebabkan momen lentur dan gaya geser transversal. **Gambar 2** menunjukkan contoh struktur pelat.



Gambar 2. Struktur Pelat

Sumber: Tanjojo, F. dan Subianto, K.S. (2009)

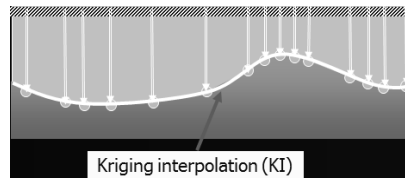
Dalam penelitian terhadap elemen cangkang, ada 3 cara pendekatan yang diajukan (Cook et al., 2002, pp. 563):

1. *Curved shell elements* berdasarkan teori klasik elemen cangkang.
2. *Degenerated-solid shell elements*, berdasarkan dari 3 dimensi diterapkan dengan asumsi-asumsi elemen cangkang dan memiliki 5 *DOF* (*Degree of Freedom*) yaitu 3 perpindahan titik *nodal* pada permukaan elemen dan 2 rotasi dari garis normal.
3. *Superposed shell elements*, dibentuk dari superposisi *plane membrane element* dengan *plate bending element*.

2.2. INTERPOLASI *KRIGING*

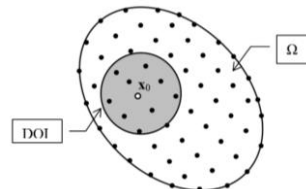
Rumusan Interpolasi *Kriging* adalah teknik geostatik untuk interpolasi ruang dalam terapan ilmu geologi dan pertambangan. *Kriging* diambil dari nama seorang insinyur pertambangan yang bernama Danie G. Krige. Dengan interpolasi ini, titik-titik yang tidak diketahui nilainya dapat di interpolasi dari nilai – nilai yang berasal dari titik-titik disekitarnya yang diketahui.

Gambar 3 menunjukkan titik-titik yang tidak diketahui nilainya dapat di interpolasi dari nilai – nilai yang berasal dari titik-titik disekitarnya yang diketahui.



Gambar 3. Interpolasi Kriging
Sumber: Wong (2009)

Pengertian lebih lanjut tentang *Kriging* ini dapat ditemukan pada H. Wackernagel, 1998 dan R.A. Olea, 1999. Dalam sebuah domain Ω , terdapat sejumlah titik – titik $\mathbf{x}_i, i=1, 2, \dots, N$, dimana N merupakan jumlah dari titik – titik tersebut dan fungsi dari nilai $\mathbf{x}$ tersebut dapat dinyatakan sebagai $u(\mathbf{x})$. Untuk sebuah titik sembarang $\mathbf{x}_0$, nilai dari $u(\mathbf{x}_0)$ diasumsikan dipengaruhi oleh titik – titik di sekitarnya dalam sebuah subdomain yang diberi nama *domain of influence* (DOI). Apabila dalam DOI tersebut terdapat titik – titik $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, dimana n adalah jumlah titik – titik dalam DOI tersebut, maka nilai $u(\mathbf{x}_0)$ dapat diinterpolasi dari nilai – nilai $u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_n)$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada **Gambar 4**.

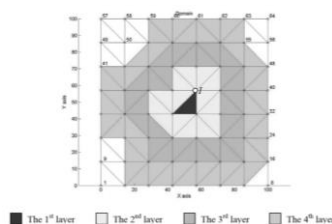


Gambar 4. Titik $\mathbf{x}_0$, DOI dari $\mathbf{x}_0$ Tersebut, dan Titik – Titik Lain yang Tersebar dalam Sebuah Domain Ω
Sumber: Wong (2009)

2.3. ELEMEN CANGKANG BERBASIS *KRIGING* DENGAN ELEMEN SEGITIGA LENGKUNG (*K-SHELL*)

K-Shell dibentuk berdasarkan *degenerated 3D elasticity theory* yang termasuk dalam kategori *degenerated-solid shell element* (Cook et al., 2002, pp. 563) dengan 5 *DOF* (*Degree of Freedom*) yaitu 3 perpindahan titik *nodal* pada permukaan elemen dan 2 rotasi dari garis normal serta kemampuan untuk mengatur variasi dari tebal struktur yang ditinjau. Elemen cangkang ini tidak seperti metode elemen hingga konvensional dimana *shape function*-nya bukan polinomial yang dibentuk dari titik *nodal* elemen tetapi dari *Kriging shape function* yang dibentuk dari beberapa titik *nodal* mencakup beberapa lapis (*layer*) dari elemen-elemen (Kanok-Nukulchai & Wong, 2008; Plengkhom & Kanok-Nukulchai, 2005; Wong & Kanok-Nukulchai, 2009; Wong, 2011).

Pada metode elemen hingga berbasis *Kriging*, DOI ditentukan sesuai dengan kebutuhan, dan tentunya semakin banyak DOI yang ditinjau, maka akan semakin akurat hasil yang didapatkan, namun pekerjaan yang dilakukan menjadi semakin lama. **Gambar 5** menunjukkan ilustrasi untuk elemen dua dimensi berbasis *Kriging*.



Gambar 5. Elemen 2 Dimensi dengan DOI 1 sampai 4 Lapis
Sumber: Wong (2009)

Dalam perumusan, *K-Shell* menggunakan 4 lapis elemen, *quartic polynomial basis*, dan *quartic spline correlation function*. Dengan menggunakan derajat polinomial yang lebih tinggi dapat mengurangi efek *shear locking* dan *membrane locking*. Pendekatan ini tetap saja tidak bisa benar-benar menghapus efek *locking* (Wong & Kanok-Nukulchai, 2006).

2.4. ELEMEN 3 DIMENSI *SOLID* (C3D20 DAN C3D20RH) DALAM ABAQUS

Dalam kepustakaan elemen *solid* dari ABAQUS, terdapat elemen isoparametrik yaitu dalam hal 3 dimensi adalah *Hexahedra*. Elemen ini biasa digunakan karena elemen ini sangat efektif digunakan dalam ABAQUS. Elemen *solid* ini disediakan dengan interpolasi linier dan kuadratik. ABAQUS hanya menyediakan elemen sampai batas interpolasi kuadratik saja karena menurut pengalaman kecuali pada kasus khusus, pengaruh yang dihasilkan oleh elemen dengan derajat lebih tinggi ternyata kecil (Dassault Systemes Simulia Corp, 2009). Sedangkan elemen 3 dimensi *solid* yang digunakan pada penelitian ini adalah C3D20 dan C3D20RH. C3D20RH aman terhadap *Hourglass Mode*, *Shear* dan *Volumetric Locking* karena menggunakan derajat kuadratik.

Dalam elemen 3 dimensi *solid*, derajat kebebasan (*degrees of freedom*) yang berlaku adalah hanya translasi dalam arah X, Y, dan Z saja. Karena permodelan secara 3 dimensi sudah cukup mendekati elemen sebenarnya, dan titiknya bukan mewakili sebuah penampang dari elemen maka tidak ada derajat kebebasan untuk rotasi penampang pada elemen 3 dimensi *solid*.

3. PROSEDUR PELAKSANAAN

Pengujian ini menggunakan elemen cangkang berbasis *Kriging* dan elemen 3 dimensi *solid* (C3D20 dan C3D20RH) pada ABAQUS dengan berbagai kerapatan *meshing* untuk menguji keakuratan dari elemen cangkang berbasis *Kriging*. Pengujian ini dilakukan dalam 2 tahap:

1. Memodelkan *benchmark problems* kecuali permasalahan *Tapered Plate*, dengan tebal konstan pada ABAQUS dan *K-Shell* kemudian dibandingkan dengan hasil eksak maupun referensi yang diambil dari literatur (Belytschko et al., 1985; Dassault Systemes Simulia Corp, 2009; Knight, 1997; Simo et al., 1989; Ma, 1990; White & Abel, 1989; Wong, 2009) untuk memastikan performa dan pemodelan elemen sudah tepat.
2. Memodelkan *benchmark problems* yang dimodifikasi dengan tebal tidak konstan pada ABAQUS dan *K-Shell* kemudian performa *K-Shell* dinilai dengan besaran perbedaannya dari elemen 3 dimensi *solid* ABAQUS.

Tabel 1 menunjukkan elemen-elemen yang digunakan dalam pengujian.

Tabel 1. Elemen-Elemen yang Digunakan dalam Pengujian

Nama Elemen	Deskripsi
C3D20	Elemen 3 dimensi, 20 titik
C3D20R	Elemen 3 dimensi, 20 titik, <i>reduced integration</i>
C3D20H	Elemen 3 dimensi, 20 titik, formulasi <i>hybrid</i>
C3D20RH	Elemen 3 dimensi, 20 titik, <i>reduced integration</i> dan formulasi <i>hybrid</i>
<i>K-Shell</i>	Elemen cangkang segitiga lengkung berbasis <i>Kriging</i> dengan optimasi 4 lapis elemen, <i>quartic polynomial basis</i> , dan <i>quartic spline correlation function</i>

4. HASIL DAN ANALISIS

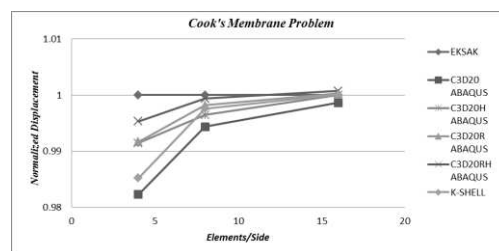
Parameter yang diperiksa adalah keakuratan elemen cangkang berbasis *Kriging* (*K-Shell*) terhadap *displacement* yang terjadi dibandingkan dengan elemen 3 dimensi *solid* (C3D20 dan C3D20RH) dari ABAQUS.

4.1. COOK'S MEMBRANE PROBLEM

Untuk mengetahui perbandingan antara hasil *displacement* yang diperoleh dari *K-Shell* dan *ABAQUS* dengan nilai referensi maka dilakukan normalisasi dari hasil terhadap nilai referensi yang terlihat pada **Tabel 2** dan **Gambar 6**.

Tabel 2. Hasil Normalisasi terhadap *Cook's Membrane Problem* dengan Tebal Konstan

<i>Elements/Side</i>	Eksak	C3D20	C3D20R	C3D20H	C3D20RH	K-Shell
4	1	0.98	0.99	0.99	1.00	0.985
8	1	0.99	1.00	1.00	1.00	0.998
16	1	0.999	1.000	1.000	1.001	1.00

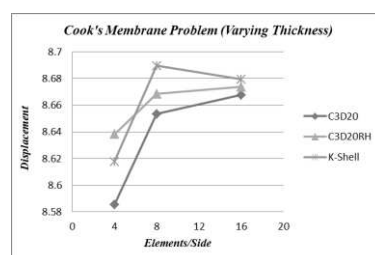


Gambar 6. Normalisasi *Displacement* untuk *Cook's Membrane Problem* dengan Tebal Konstan

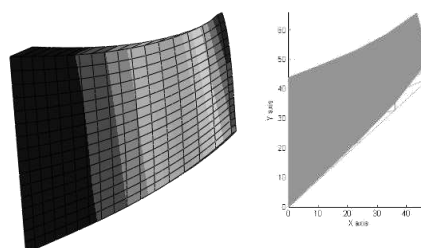
Hasil pengujian *Cook's Membrane Problem* untuk tebal tidak konstan terhadap *K-Shell* maupun lainnya dapat dilihat pada **Tabel 3** dan **Gambar 7**. Kemudian **Gambar 8** menunjukkan *deformed shape* dari *Cook's Membrane Problem* dengan tebal tidak konstan.

Tabel 3. Hasil Pengujian Elemen terhadap *Cook's Membrane Problem* dengan Tebal Tidak Konstan

<i>Elements/Side</i>	C3D20	C3D20RH	K-Shell
4	8.585	8.638	8.618
8	8.653	8.668	8.690
16	8.668	8.674	8.679



Gambar 7. *Displacement* untuk *Cook's Membrane Problem* dengan Tebal Tidak Konstan



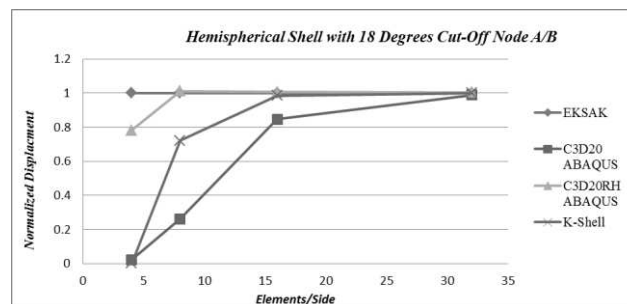
Gambar 8. *Deformed Shape* dari *Cook's Membrane Problem* dengan Tebal Tidak Konstan

4.2. HEMISPHERICAL SHELL WITH 18 DEGREES CUT-OFF

Untuk mengetahui perbandingan antara hasil *displacement* yang diperoleh dari *K-Shell* dan *ABAQUS* dengan nilai referensi maka dilakukan normalisasi dari hasil terhadap nilai referensi yang terlihat pada **Tabel 4** dan **Gambar 9**.

Tabel 4. Hasil Normalisasi terhadap *Hemispherical Shell with 18 Degrees Cut-Off* dengan Tebal Konstan

<i>Elements/Side</i>	Eksak	C3D20	C3D20RH	K-Shell
4	1	0.022	0.780	0.001
8	1	0.261	1.011	0.721
16	1	0.847	1.006	0.985
32	1	0.988	1.003	1.000

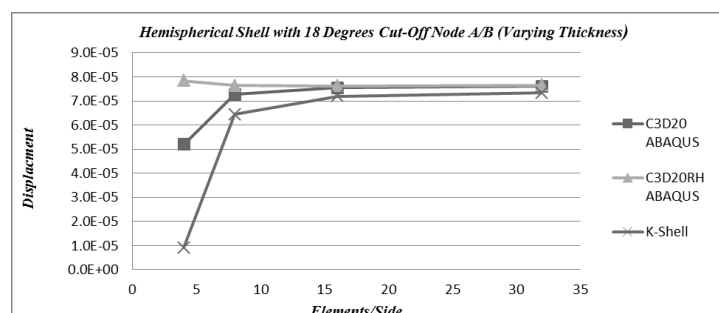


Gambar 9. Normalisasi *Displacement* untuk *Hemispherical Shell with 18 Degrees Cut-Off*

Hasil pengujian *Hemispherical Shell with 18 Degrees Cut-Off* untuk tebal tidak konstan terhadap *K-Shell* maupun lainnya dapat dilihat pada **Tabel 5** dan **Gambar 10**.

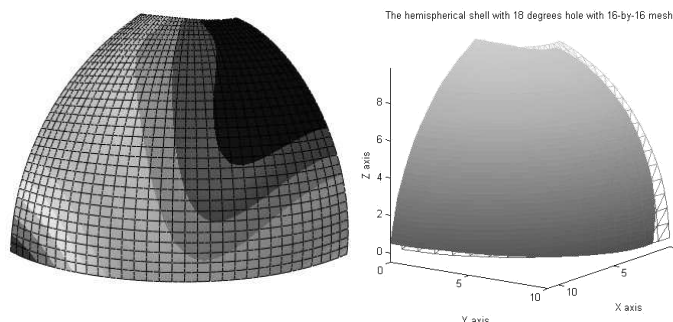
Tabel 5. Hasil Pengujian Elemen terhadap *Hemispherical Shell with 18 Degrees Cut-Off* dengan Tebal Tidak Konstan

<i>Elements/Side</i>	C3D20	C3D20RH	K-Shell
4	5.204E-05	7.842E-05	9.15E-06
8	7.270E-05	7.643E-05	6.44E-05
16	7.550E-05	7.623E-05	7.20E-05
32	7.609E-05	7.659E-05	7.33E-05



Gambar 10. *Displacement* untuk *Hemispherical Shell with 18 degrees Cut-Off* dengan Tebal Tidak Konstan

Gambar 11 menunjukkan *deformed shape* dari *Hemispherical Shell with 18 Degrees Cut-Off* dengan tebal tidak konstan.



Gambar 11. *Deformed Shape* dari *Hemispherical Shell with 18 Degrees Cut-Off*

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. KESIMPULAN

Secara umum, performa dari elemen cangkang berbasis *Kriging* sudah menunjukkan konvergensi yang baik.

5.2. SARAN

Perumusan dari elemen cangkang berbasis *Kriging* ini perlu ditingkatkan agar dapat menganalisis struktur cangkang yang tipis dan tidak terjadi *locking*.

6. DAFTAR REFERENSI

- Alhazza, K. A. & Alhazza, A. A. (2004). A Review of the Vibrations of Plates and Shells. *The Shock and Vibration Digest*, 36(5), 377–395.
- Belytschko, T., Stolarski, H., Liu, W. K., Carpenter, N., & Ong, J. S. J. (1985). Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51(1-3), 221–258.
- Computers and Structures, Inc. (1995). *SAP2000, Analysis Reference*. Berkeley.
- Cook, R. D., D.S. Malkus, M.E. Plesha and R.J. Witt (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th edition. Madison, University of Wisconsin, John Wiley and Sons.
- Dassault Systemes Simulia Corp. (2009). *Abaqus Theory Manual*. Providence, RI, USA.
- Gilewski, W. & Radwańska, M. (1991). A Survey of Finite Element Models for the Analysis of Moderately Thick Shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 9(1), 1–21.
- H. Wackernagel (1998). *Multivariate Geostatistics, the 2nd, Completely Revised Edition*. Springer, Berlin.
- Kanok-Nukulchai, W. & Wong, F. T. (2008). A Break-Through Enhancement of FEM Using Node-Based Kriging Interpolation. *IACM Expressions*, 24–29.
- Knight, N. F. (1997). Raasch Challenge for Shell Elements. *AIAA Journal*, 35(2), 375–381.
- Lomboy, G. R. (2007). *A Quasi-Conforming Shell Element for Geometric and Material Nonlinearity*. Doctoral dissertation. Asian Institute of Technology. Bangkok.
- Ma, H. (1990). *Development of A Geometrically Nonlinear Shell Element by Assumed Strain Methods*. Doctoral dissertation. Asian Institute of Technology. Bangkok.
- Plengkhom, K. & Kanok-Nukulchai, W. (2005). An Enhancement of Finite Element Method with Moving Kriging Shape Functions. *International Journal of Computational Methods*, 02(04), 451–475.
- R.A. Olea (1999). *Geostatistics for Engineers and Earth Scientists*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

- Simo, J.C. and D.D. Fox (1989). 'On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72, 267-304.
- Simo, J.C., D.D. Fox and M.S. Rifai (1989). 'On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory; Computational Aspects', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73, 53-92.
- Tanjoyo, F. dan Subianto, K.S. (2009). *Penilaian Keakuratan dan Konvergensi Elemen-Elemen Shell yang Terdapat dalam SAP 2000 ver.11.0.0.. Tugas Akhir No.11011658/SIP/2009*. Jurusan Teknik Sipil. Universitas Kristen Petra. Surabaya.
- White, D. W. & Abel, J. F. (1989). Testing of Shell Finite Element Accuracy and Robustness. *Finite Elements in Analysis and Design*, 6(2), 129–151.
- Wong, F.T. (2009). *Kriging-based Finite Element Method for Analyses of Plate and Shells*. Doctoral Dissertation. Asian Institute of Technology. Bangkok.
- Wong, F.T. (2011). A Breakthrough Enhancement of Finite Element Method Using Kriging Interpolation. *Proceedings of the First Indonesian Structural Engineering and Materials Symposium* (pp. 11–1–11–16). Parahyangan Catholic University. Bandung.
- Wong, F.T. & Kanok-Nukulchai, W. (2006). Kriging-based Finite Element Method for Analyses of Reissner-Mindlin Plates. *Proceedings of the Tenth East-Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, Emerging Trends: Keynote Lectures and Symposia*, (pp. 509–514). Asian Institute of Technology. Bangkok.
- Wong, F.T. & Kanok-Nukulchai, W. (2009). Kriging-based Finite Element Method: Element-by-Element Kriging Interpolation. *Civil Engineering Dimension*, 11(1), 15–22.
- Yang, H. T. Y., Saigal, S., Masud, A., & Kapania, R. K. (2000). A Survey of Recent Shell Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3), 101–127.