

STUDI ELEMEN *DISCRETE-KIRCHHOFF MINDLIN TRIANGLE* (DKMT) UNTUK ANALISIS STATIK PELAT LENTUR DAN PENGEMBANGAN UNTUK ANALISIS DINAMIK GETARAN BEBAS

Erwin Tirta Winata¹, Charles Julius Salim² dan Wong Foek Tjong³

ABSTRAK : Pengembangan analisis pelat lentur berbasis teori Reissner-Mindlin dengan menggunakan metode elemen hingga telah berkembang sejak lama. Salah satunya adalah elemen *Discrete-Kirchhoff Mindlin Triangle* (DKMT) yang dikemukakan oleh Katili (1993). Adapun kesimpulan yang diberikan mengatakan bahwa elemen ini lolos *patch test*, bebas *shear locking*, tidak sensitif terhadap distorsi geometri, tidak ada *extra zero-energy modes*, dan memiliki konvergensi yang baik. Berdasarkan hasil tersebut, maka penelitian kali ini ditujukan untuk melakukan re-evaluasi terhadap performa elemen DKMT dalam analisis statik serta mengembangkannya untuk analisis dinamik getaran bebas. Batasan yang diberikan berupa analisis linear dan material yang bersifat isotropik. Dari hasil penelitian didapatkan bahwa kesimpulan yang dinyatakan oleh peneliti sebelumnya benar adanya akan tetapi terdapat hasil yang kurang tepat pada permasalahan *rhombic plate*. Sedangkan untuk analisis dinamik getaran bebas, nilai frekuensi natural dan *mode shape* sudah cukup akurat namun membutuhkan jumlah *mesh* yang cukup banyak.

KATA KUNCI: teori Reissner-Mindlin, metode elemen hingga, *Discrete-Kirchhoff Mindlin Triangle* (DKMT), analisis statik, analisis getaran bebas, *shear locking*, frekuensi natural, *mode shape*

1. PENDAHULUAN

Pada awal perkembangannya, analisis pelat lentur didasarkan pada teori *Kirchoff*. Akan tetapi, terdapat kesulitan untuk memenuhi kontinuitas C^1 dalam pembentukan *shape function* sehingga memunculkan teori baru yaitu teori Reissner-Mindlin yang hanya membutuhkan kontinuitas C^0 (Zienkiewicz dan Taylor, 2000). Namun demikian, terdapat permasalahan baru yaitu munculnya gejala *shear locking*, sehingga memerlukan modifikasi khusus untuk mendapatkan hasil yang akurat. Salah satu upaya dalam menghilangkan *shear locking* adalah penggunaan metode *selective reduced integration* (SRI) Dengan metode ini, hasil yang didapat cukup memuaskan namun menghasilkan fenomena "*hour glass mode*" (Hughes et al., 1977).

Pengembangan untuk analisis pelat lentur terus diupayakan, salah satunya yaitu elemen *Discrete Kirchhoff Triangle* (DKT) yang merupakan pengembangan dari teori Reissner-Mindlin berbasis *discrete constraint*, dimana hasil yang didapat cukup memuaskan untuk pelat tipis (Batoz et al., 1980). Performa yang cukup memuaskan dari elemen DKT ini mendorong perkembangan elemen *Discrete Shear Triangle-Batoz Lardeur* (DST-BL) yang diaplikasikan untuk pelat tebal. Hasil yang didapat cukup baik namun tidak lolos *constant curvature patch test* (Batoz dan Lardeur, 1989). Penelitian dilanjutkan dengan penemuan elemen baru *Discrete Shear Triangle-Batoz Katili* (DST-BK). Hasil yang didapat lebih baik dari sebelumnya, namun tidak konvergen menuju solusi DKT pada pelat tipis (Batoz dan Katili, 1992).

¹ Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, erwintirta07@gmail.com

² Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, charles.julius.13@gmail.com

³ Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, wftjong@petra.ac.id

Penelitian kembali dilakukan hingga menghasilkan elemen *Discrete-Kirchoff Mindlin Triangle* (DKMT) yang menunjukkan bahwa hasil yang didapat konvergen menuju elemen DKT pada pelat tipis, memiliki *rank* yang tepat, lolos *patch test*, dan bebas *locking* (Katili, 1993). Kelebihan inilah yang mendasari penulis tertarik untuk melakukan studi lebih lanjut mengenai performa elemen DKMT dan mengembangkannya untuk analisis dinamik getaran bebas.

2. TEORI PELAT LENTUR REISSNER-MINDLIN

Pelat merupakan sebuah elemen struktur tiga dimensi dimana perbandingan antara tebal dan panjang/lebarnya sangatlah kecil. Dalam teori Reissner-Mindlin, terdapat beberapa asumsi dasar yakni garis normal pada permukaan bidang tengah pelat harus tetap lurus sesudah berdeformasi akan tetapi tidak perlu tegak lurus dengan bidang tengah pelat yang telah berdeformasi. Tegangan normal arah z pada bidang tengah dapat diabaikan, $\sigma_{zz} = 0$. Diasumsikan pula bahwa lenturan pada pelat homogen mengakibatkan bidang tengah sebagai permukaan netral dimana nilai $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \gamma_{xy} = 0$ (Wong, 2009).

Secara umum, *displacement* pada pelat lentur dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u = z \beta_x(x, y) \quad (1a)$$

$$v = z \beta_y(x, y) \quad (1b)$$

$$w = w(x, y) \quad (1c)$$

dimana u adalah perpindahan searah sumbu x , v adalah perpindahan searah sumbu y , dan w adalah perpindahan searah sumbu z , β_x merupakan rotasi sumbu z terhadap sumbu x , dan β_y merupakan rotasi sumbu z terhadap sumbu y .

Pada teori pelat lentur terdapat tiga buah persamaan utama. Persamaan pertama adalah persamaan kinematik. Persamaan ini menghubungkan regangan dengan *displacement* pada elemen $\{u\}$

$$\{\varepsilon_b\} = z [\partial]_b \{u\} \quad (2a)$$

$$\{\varepsilon_s\} = [\partial]_s \{u\} \quad (2b)$$

dimana $\{\varepsilon_b\}$ merupakan vektor regangan yang timbul akibat lentur, z adalah variabel yang menyatakan ketebalan pelat, dan $[\partial]_b$ adalah matriks differensial untuk lentur. Sedangkan $\{\varepsilon_s\}$ merupakan vektor regangan akibat geser, dan $[\partial]_s$ adalah matriks differensial untuk geser.

Persamaan kedua dalam pelat lentur adalah persamaan konstitutif yang menghubungkan regangan dengan tegangan. Secara jelas, persamaan tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$\{\sigma_b\} = [E_b] \{\varepsilon_b\} \quad (3a)$$

$$\{\sigma_s\} = [E_s] \{\varepsilon_s\} \quad (3b)$$

dimana $\{\sigma_b\}$ merupakan vektor tegangan akibat lentur, $[E_b]$ adalah matriks yang berisi data properti material untuk lentur. Sedangkan $\{\sigma_s\}$ merupakan vektor tegangan akibat geser, dan $[E_s]$ matriks yang berisi properti material untuk geser. Selanjutnya, untuk mendapatkan gaya dalam momen dan geser dapat dilakukan dengan mengintegrasikan tegangan akibat lentur dan geser terhadap ketebalan pelat.

Persamaan ketiga dalam pelat lentur adalah persamaan kesetimbangan dimana pada elemen DKMT dinyatakan sebagai *governing equation* yang mengikuti persamaan fungsional Hu-Washizu termodifikasi berikut ini:

$$\Pi = \Pi_b(\beta_x, \beta_y) + \Pi_s(w, \beta_x, \beta_y, \{\bar{\gamma}\}, \{T\}) - \Pi_f(w, \beta_x, \beta_y) + \Pi_{ext} \quad (4)$$

dengan Π_b dan Π_s adalah *strain energy* akibat *bending* dan *shear*, $\bar{\gamma}$ adalah regangan geser terasumsi, Π_{ext} adalah efek dari batasan dan gaya lainnya yang mana dalam analisis selanjutnya dapat diabaikan karena saling menghilangkan, dan Π_f adalah *strain energy* akibat beban merata dalam arah z (f_z).

3. PERUMUSAN ELEMEN DKMT

Perumusan *shape function* yang digunakan dibagi menjadi 2 bagian. Bagian pertama menunjukkan interpolasi linear standar yang selanjutnya disebut dengan *complete rigid body* dan *constant-curvature field expansion* (rc-modes) serta fungsi polinomial dengan derajat lebih tinggi untuk bagian kedua. Secara jelas, perumusan *shape function* untuk rotasi normal β_x dan β_y dapat dilihat sebagai berikut:

$$\beta_x = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{xi} + \sum_{k=4}^6 P_k C_k \Delta \beta_{sk} \quad (5a)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{yi} + \sum_{k=4}^6 P_k S_k \Delta \beta_{sk} \quad (5b)$$

dengan N_i dan P_k masing-masing adalah *shape function* untuk interpolasi linear dan polinomial derajat tinggi dalam sistem koordinat natural (ξ, η) . Variabel w_i , β_{xi} dan β_{yi} merupakan *nodal displacement* pada setiap titik pojok elemen segitiga. Sedangkan $\Delta \beta_{sk}$ merupakan penambahan rotasi normal pada titik tengah sisi segitiga. Adapun C_k dan S_k adalah pengukuran arah cosinus dan sinus sisi-sisi segitiga. Bentuk interpolasi di atas akan menjadi dasar penurunan rumus untuk mendapatkan hubungan antara vektor kurvatur dan vektor regangan geser terhadap *nodal displacement*.

Unsur penting lainnya yang menjadi dasar perumusan elemen DKMT adalah penggunaan *discrete constraint* untuk memfasilitasi adanya regangan geser terasumsi ($\bar{\gamma}$). Persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\int_0^{L_k} \delta T_s (\gamma_{sz} - \bar{\gamma}_{sz}) ds = 0 \quad (6)$$

Seperti diketahui, $\bar{\gamma}$ hanyalah unsur tambahan yang bersifat sementara. Penggunaan $\bar{\gamma}$ sangat berperan penting dalam menghubungkan variabel $\Delta \beta_{sk}$ dengan *nodal displacement* (w_i , β_{xi} dan β_{yi}). Dengan demikian variabel yang tidak diketahui tetap berjumlah 9 dan tidak membutuhkan persamaan ekstra. Hubungan antara $\Delta \beta_{sk}$ dan *nodal displacement* dapat dilihat pada persamaan di bawah ini:

$$\{\Delta \beta_n\} = [A_n] \{U_n\} \quad (7)$$

dengan $\{\Delta \beta_n\}^T$ adalah vektor $\Delta \beta_{sk}$ pada setiap titik dan $\{U_n\}$ adalah *nodal displacement* elemen segitiga. Sedangkan $[A_n]$ adalah matriks penghubung yang diturunkan melalui berdasarkan *discrete constraint* yang digunakan pada persamaan (6).

Selanjutnya dengan melakukan penyusunan ulang persamaan di atas akan didapatkan matriks kekakuan dalam bentuk yang lengkap. Matriks kekakuan pada elemen DKMT dapat dilihat sebagai berikut:

$$[K_b] = \int_{A_e} [B_b]^T [H_b] [B_b] dA \quad (8a)$$

$$[K_s] = \int_{A_e} [B_s]^T [H_s] [B_s] dA \quad (8b)$$

$$[K] = [K_b] + [K_s] \quad (8c)$$

dengan $[K]$ adalah matriks kekakuan total, $[K_b]$ adalah bagian matriks kekakuan akibat lentur, dan $[K_s]$ adalah bagian matriks kekakuan akibat geser. Di sisi lain, $[B_b]$ dan $[B_s]$ adalah matriks penghubung antara regangan dan *nodal displacement* untuk lentur dan geser. Sedangkan $[H_b]$ dan $[H_s]$ masing-masing adalah matriks yang menghubungkan vektor momen dengan vektor kurvatur dan vektor gaya geser dengan regangan geser yang bisa didapat dengan mengintegrasikan persamaan (3a) dan (3b) terhadap ketebalan pelat.

Proses selanjutnya mengikuti prosedur MEH standar. Setelah mendapat nilai *nodal displacement*, gaya dalam momen dan geser dapat dengan mudah dihitung dengan mengikuti persamaan:

$$[M] = [H_b] [B_b(\xi, \eta)] \{U_n\} \quad (9a)$$

$$[T] = [H_s] [B_s(\xi, \eta)] \{U_n\} \quad (9b)$$

4. PERUMUSAN ANALISIS DINAMIK GETARAN BEBAS

Governing equation yang digunakan tetap mengikuti prinsip fungsional Hu-Washizu temodifikasi dengan tambahan *strain energy* akibat inersia (Π_i). Untuk penurunan matriks massa, *shape function*

yang digunakan hanya interpolasi linear saja untuk masing-masing *displacement*. Sedangkan untuk matriks kekakuan tetap sama seperti analisis statik. Adapun matriks massa diperoleh dengan persamaan:

$$[M] = \int_A [N]^T [\rho] [N] dA \quad (10)$$

dimana $[N]$ adalah matriks *shape function* dan $[\rho]$ adalah matriks yang berisi nilai kerapatan massa dan momen inersia pelat.

Setelah mendapatkan matriks kekakuan dan matriks massa, maka proses selanjutnya adalah mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen dari persamaan eigen berikut ini:

$$(K - \omega^2 M)\{A_n\}_G = \{0\} \quad (11)$$

dimana $\{A_n\}_G$ adalah vektor eigen yang merupakan *mode shape* dari getaran pelat lentur dan ω adalah frekuensi sudut dari getaran pelat untuk setiap *mode shape* yang terjadi.

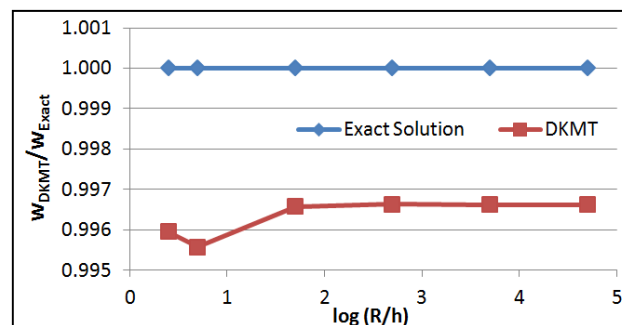
5. HASIL PERHITUNGAN NUMERIK

5.1. Pengujian *Shear Locking*

Pengujian dilakukan pada pelat berbentuk lingkaran. Peninjauan tidak dilakukan untuk satu lingkaran penuh akan tetapi cukup ditinjau seperempat saja dengan syarat memasukkan kondisi batas untuk menjaga kesimetrian dari pelat. Pengujian dilakukan untuk perletakan sendi dengan nilai $E = 10.92, \nu = 0.3, R = 5$ dan $h = 2, h = 1, h = 0.1, h = 0.01, h = 0.001, h = 0.0001$. *Mesh* yang digunakan berjumlah 96 elemen. Hasil yang didapat ditunjukkan pada **Tabel 1** dan **Gambar 1**.

Tabel 1. Perbandingan Hasil *Displacement* Berdasarkan DKMT dan Solusi Eksak pada Pusat Lingkaran dengan Jumlah Elemen 96 dan Rasio R/h Mulai dari 2.5 Hingga 50000

Jumlah Elemen	WDKMT					
	$R/h = 2.5$	$R/h = 5$	$R/h = 50$	$R/h=500$	$R/h=5000$	$R/h=50000$
96	5.846	41.416	39695.00	39680000	3.97E+10	3.97E+13
Solusi Eksak (w_t)	5.870	41.599	39831.56	39813880	3.98E+10	3.981E+13



Gambar 1. Perbandingan Hasil *Displacement* Berdasarkan DKMT dan Solusi Eksak pada Pusat Lingkaran dengan Jumlah Elemen 96 dan Rasio R/h Mulai dari 2.5 Hingga 50000

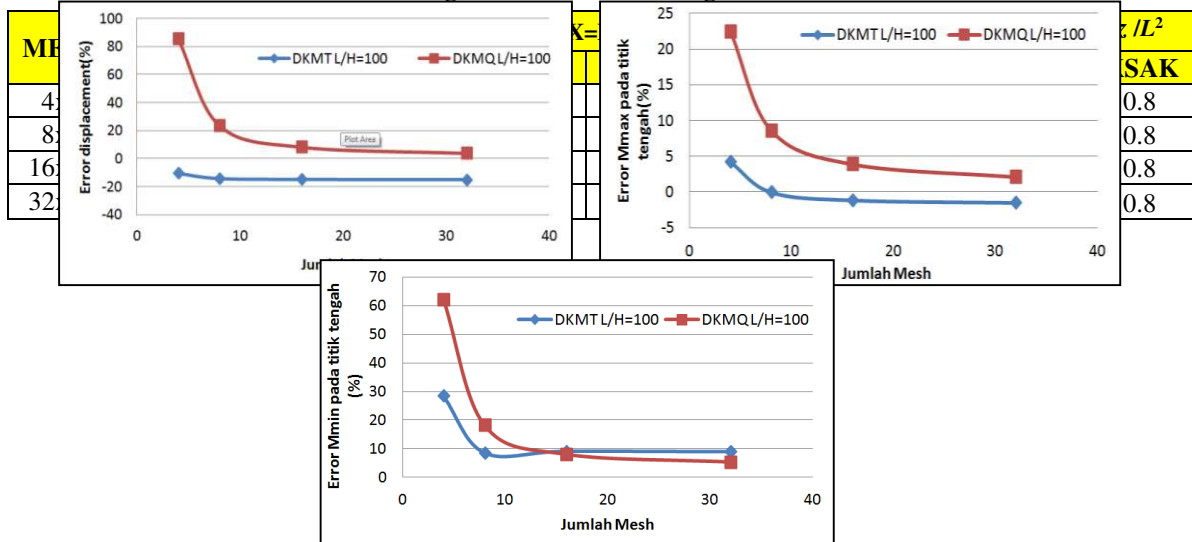
Berdasarkan hasil pada **Gambar 1**, dapat dilihat bahwa error yang dihasilkan relatif kecil dan konstan untuk pelat dengan rasio $R/h > 10000$. Hasil yang salah barulah didapat ketika pelat ditipiskan untuk $h < 10^{-102}$ (hasil tidak ditampilkan). Akan tetapi hal ini bukan disebabkan karena kegagalan elemen, melainkan karena keterbatasan akurasi digit pada program. Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa elemen DKMT bebas *shear locking* bahkan untuk pelat yang ekstrim tipis.

5.2. Pengujian pada *Rhombic Plate*

Pengujian pada *rhombic plate* dilakukan dengan ukuran $L = 100$ m dan sudut $= 30^\circ$ (sudut kritis). Adapun dimensi dan properti material dari pelat yang digunakan meliputi $E = 10.92, \nu = 0.3$, dan $h = 1$. Selanjutnya pelat ini diberi beban merata sebesar 1 dengan perletakan berupa sendi di sekeliling pelat. *Mesh* yang digunakan pada pengujian ini bervariasi mulai dari $4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16$, dan 32×32 .

Adapun hasil yang didapat untuk *displacement*, momen maksimum dan momen minimum di tengah pelat ditampilkan pada **Tabel 2** dan diperjelas pada **Gambar 2**.

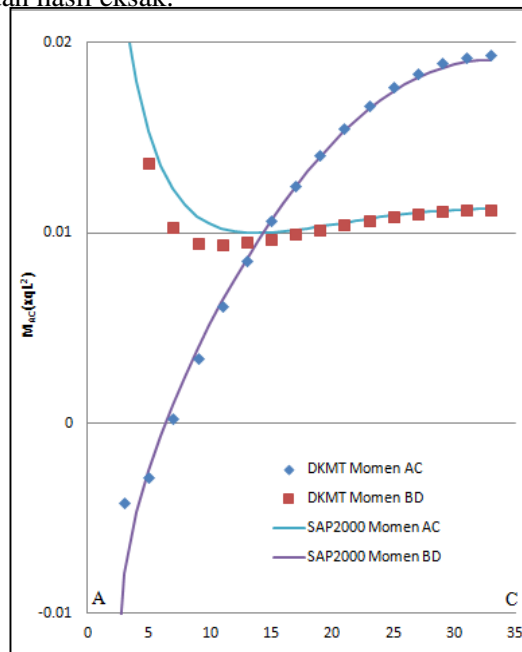
Tabel 2. Konvergensi Mesh terhadap Displacement (w), Momen Maksimum dan Momen Minimum pada Titik Tengah Rhombic Plate dengan $L/h = 100$



Gambar 2. Persentase Error Displacement, Momen Maksimum dan Momen Minimum terhadap Hasil Eksak pada Titik Tengah Rhombic Plate dengan $L/h = 100$

Pada **Gambar 2** terlihat bahwa hasil *displacement* dari DKMT lebih kecil dari hasil eksak atau konvergen ke arah yang lebih kaku. Begitu pula untuk grafik momen maksimum konvergensi mesh juga cenderung menuju dibawah hasil eksak. Sedangkan untuk grafik momen minimum, dapat dilihat bahwa konvergensi mesh semakin mendekati hasil eksak.

Selain itu, *rhombic plate* juga memiliki suatu keistimewaan yakni adanya singularitas pada momen diagonalnya. Banyak elemen yang gagal menunjukkan hasil sesuai yang diharapkan. Akan tetapi, elemen DKMT mampu menggambarkan nilai momen diagonal ini dengan cukup akurat. Secara jelas hasil plot momen diagonal dapat dilihat pada **Gambar 3** beserta perbandingannya dengan hasil dari SAP 2000 v11 sebagai acuan hasil eksak.



Gambar 3. Momen Rhombic Plate di Sepanjang Diagonal BD dengan $L/h = 100$

5.3. Pengujian Analisis Dinamis Getaran Bebas pada Pelat Bujursangkar

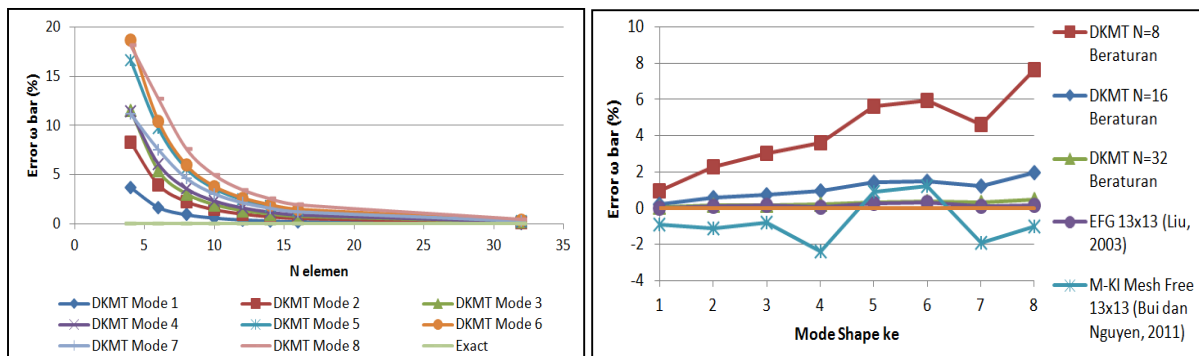
Pengujian analisis dinamis getaran bebas dilakukan salah satunya pada pelat bujursangkar. Perletakan yang digunakan berupa sendi di sekeliling pelat dengan dimensi dan properti material antara lain panjang sisi (a) = 10 m, $E = 200 \times 10^9$ N/m², $\nu = 0.3$, $\rho = 8000$ kg/m³, dan $h = 0.05$. Mesh yang dilakukan terdiri dari $N=4 \times 4$, 8×8 , 16×16 , dan 32×32 . Hasil yang dicari berupa frekuensi natural ternormalisasi ($\bar{\omega}$) yang dihitung dengan persamaan:

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\omega^2 \rho h a^4}{D} \right)^{1/4} \quad (12)$$

dengan ω^2 adalah nilai eigen yang melambangkan nilai frekuensi natural dari pelat dan D adalah kekakuan lentur pelat. Adapun hasil yang didapat akan ditampilkan pada **Tabel 3** dan perbandingan konvergensi dengan hasil dari metode lain akan ditunjukkan pada **Gambar 4**.

Tabel 3. Perbandingan Konvergensi $\bar{\omega}$ pada Pelat Bujursangkar dengan Ketebalan $h = 0.05$ m untuk Model Mesh $N=4 \times 4$, 8×8 , 16×16 , dan 32×32 dalam Kondisi Perletakan Sendi

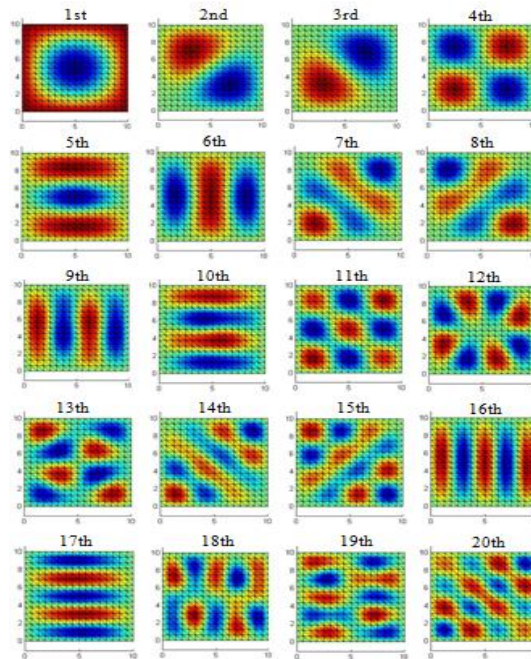
No.	DKMT Beraturan				17x17 EFG (Liu, 2003)	17x17 M-KI Mesh Free (Bui dan Nguyen, 2011)	Eksak
	4x4	8x8	16x16	32x32			
	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}$
1	4.608	4.485	4.453	4.445	4.443	4.403	4.443
2	7.605	7.184	7.064	7.034	7.031	6.946	7.025
3	7.836	7.239	7.078	7.038	7.036	6.969	7.025
4	9.904	9.205	8.968	8.905	8.892	8.671	8.886
5	11.587	10.495	10.075	9.968	9.959	10.023	9.935
6	11.792	10.526	10.080	9.969	9.966	10.058	9.935
7	12.589	11.849	11.465	11.360	11.341	11.113	11.327
8	13.385	12.191	11.549	11.381	11.347	11.215	11.327
9	14.767	14.223	13.276	13.030	13.032	12.833	-
10	93.058	14.224	13.290	13.033	13.036	13.049	-



Gambar 4. Perbandingan Konvergensi Nilai $\bar{\omega}$ antara DKMT dan Hasil Eksak untuk Mode Shape ke 1 Hingga 8 pada Pelat dengan Ketebalan $h = 0.05$ m dengan Jumlah Elemen $N = 4, 8, 16$, dan 32 pada Kondisi Perletakan Sendi

Pada **Gambar 4** terlihat bahwa elemen DKMT konvergen cukup lambat terutama pada mode tingkat tinggi. Elemen baru mendapatkan hasil yang sangat akurat ketika elemen diperhalus hingga $N=32$. Begitu pula saat dibandingkan dengan hasil dari metode lain DKMT $N=32$ memberikan persentase error mendekati 0% untuk mode 1-8. Akan tetapi di sini terlihat bahwa elemen DKMT membutuhkan jumlah elemen yang cukup halus hingga $N=32$ untuk mendapatkan hasil yang sama dengan *Element Free Garkin* (EFG) yang dalam kasus ini hanya butuh 13×13 titik.

Berikut ini juga ditampilkan *mode shape* dari pelat bujursangkar dengan perletakan sendi untuk 20 mode pertama seperti terlihat pada **Gambar 5**.



Gambar 5. Mode Shape untuk 20 Mode Pertama Pelat Bujursangkar Elemen DKMT dalam Kondisi Perletakan Sendi dengan Ketebalan $h = 0.05$ m

6. KESIMPULAN

Secara umum, penelitian menunjukkan bahwa hasil yang didapat sesuai dengan kesimpulan yang dikatakan oleh peneliti sebelumnya yang meliputi lolos *patch test*, bebas *locking*, tidak sensitif terhadap distorsi geometri, tidak ada *extra zero-energy modes*, dan memiliki konvergensi yang baik. Akan tetapi terdapat permasalahan pada *rhombic plate* dimana hasil *displacement* (w) dan nilai momen pada titik tengah berada di bawah hasil eksak atau konvergen menuju arah yang lebih kaku. Namun elemen DKMT cukup berhasil dalam menggambarkan nilai singularitas pada momen diagonal *rhombic plate*. Sedangkan pada analisis dinamis getaran bebas, elemen DKMT mampu memberikan nilai frekuensi natural dan *mode shape* yang cukup akurat untuk semua bentuk pelat. Namun elemen membutuhkan jumlah *mesh* yang banyak seperti 32×32 *mesh* pada pelat bujursangkar untuk mendapatkan hasil yang akurat tersebut.

7. DAFTAR REFERENSI

- Batoz, J.L. dan Katili, I. (1992). On a Simple Triangular Reissner/Mindlin Plate Element Based on Incompatible Modes and Discrete Constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, 1603-1632.
- Batoz, J.L., Bathe, K.J., dan Ho, L.W. (1980). A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, 1771-1812.
- Batoz, J.L., dan Lardeur, P. (1989). A Discrete Shear Triangular Nine d.o.f. Element for The Analysis of Thick to Very Thin Plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 533-560.
- Bui, T.Q. dan Nguyen, M.N. (2011). A Moving Kriging Interpolation-based Meshfree Method for Free Vibration Analysis of Kirchhoff Plates. *Computers and Structures*, 89, 380 – 294.
- Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., dan Kanok-Nukulchai, W. (1977). A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, 1529-1543.

- Katili, I. (1993). A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields-Part I: An Extended DKT Element for Thick-Plate Bending Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1859-1883.
- Liu, G.R. (2003). *Mesh Free Methods*. Boca Raton, CRC Press.
- Wong, F.T. (2009). *Kriging-Based Finite Element Method for Analyses of Plate and Shells*. Unpublished doctoral dissertation. Asian Institute of Technology. Bangkok.
- Zienkiewicz, O.C. dan Taylor, R. L. (2000). *The Finite Element Method*, Volume 2: Solid Mechnics, 5th edition. Oxford, Butterworth Heinemann.