Fungsional Aditif Ortogonal pada $W_0(E)$ di dalam R^n

Riyadi

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sebelas Maret

Abstract

This paper discusses about a representation theorem of an orthogonally additive functional on $W_0(E) \subset \mathbb{M}(E)$, that is a collection of all McShane integrable functions on a cell $E=[\bar{a},\bar{b}]$ in Euclidean space $\mathbf{R}^n$, which satisfies some certain properties. This result is a generalization of Chew result.

Key words : orthogonally additive functional, McShane integrable, Euclidean space $\mathbf{R}^n$.

PENDAHULUAN

Penelitian yang membahas tentang fungsional linear dan fungsional aditif ortogonal telah banyak dilakukan oleh para peneliti terdahulu, diantaranya telah dilakukan oleh Hildebrandt (1966), Chew (1985), Paredes (1993) dan Aye dan Lee (2002a, 2002b, 2003). Chew (1985) dan Lee (1989) membahas tentang representasi fungsional linear dan fungsional aditif orthogonal yang bekerja pada ruang fungsi yang terintegral Henstock, yang didefinisikan pada interval $[a,b] \subset \mathbf{R}$. garis lurus. Sedangkan Paredes (1993) berhasil menggeneralisasikan hasil-hasil yang diperoleh Chew dengan cara mengembangkan ruang fungsi baru yang merupakan abstraksi dari ruang fungsi yang telah didefinisikan Chew, namun ruang fungsi tersebut juga masih didefinisikan pada interval $[a,b] \subset \mathbf{R}$.

Hildebrandt (1966) membahas tentang representasi fungsional linear kontinu pada ruang BV[a,b], ruang fungsi yang bervariasi terbatas yang didefinisikan pada [a,b]. Sedangkan, Aye dan Lee (2002a, 2002b, dan 2003) membahas tentang fungsional aditif ortogonal yang bekerja pada ruang fungsi yang bervariasi terbatas yang didefinisikan pada [a,b].

Makalah ini merupakan generalisasi dari hasil Chew (1985), khususnya generalisasi tentang representasi fungsional aditif ortogonal pada ruang fungsi W_0 dengan :

$W_o = \left\{ f \in m[1,\infty) : \frac{1}{x}\int_1^x |f| \to 0 \text{ untuk } x \to \infty \right\}$

yang semula didefinisikan pada ruang fungsi yang terintegral Lebesgue yang didefinisikan pada interval [a,b] $\subset \mathbf{R}$ digeneralisasikan untuk ruang fungsi yang terintegral McShane yang didefinisikan pada sel $[\bar{a},\bar{b}]$ di dalam ruang Euclide $\mathbf{R}^n$.

TEORI-TEORI DASAR

Fungsional T pada ruang fungsi X dikatakan aditif ortogonal jika T (*f* + *g*) = T (*f*) + T (*g*) asalkan *f*, *g* $\in$ X, *f* dan *g* mempunyai *support* yang saling asing. *Support* fungsi *f* $\in$ X, ditulis supp(*f*) didefinisikan supp(*f*)=$\{x \in$dom(f) :$f(x) \neq 0\}$.

Berdasarkan pengertian ini diperoleh bahwa dua fungsi *f* dan *g* dikatakan mempunyai support yang saling asing jika *f*(*x*)*g*(*x*)=0 untuk setiap *x*.

Dalam makalah ini, **R** menyatakan koleksi semua bilangan real, $\mathbb{P}$(E) menyatakan koleksi semua partisi Lebesgue pada E dan $\mathbb{M}$(E) menyatakan koleksi semua fungsi yang terintegral McShane pada sel E=$[\bar{a},\bar{b}]$. Telah diketahui bahwa $\mathbb{M}$(E) merupakan ruang linear dan ruang integral mutlak.

Teorema 2.1.

Diketahui E=$[\bar{a},\bar{b}]$ sel dan $\mathbb{M}$(E) menyatakan koleksi semua fungsi yang terintegral McShane pada sel E. Jika $f \in$ $\mathbb{M}$(E) maka terdapat barisan fungsi sederhana $\{s_n\}$ pada E sehingga $s_n(\bar{x}) \to f(\bar{x})$ hampir di mana-mana pada E untuk n$\to\infty$ dan $|s_n| \leq |f|$ untuk semua n.

Teorema 2.2.

Diketahui E=$[\bar{a},\bar{b}]$ sel dan f_n, f : E $\to$ **R** untuk setiap n. Jika :

(i) $f_n \to f$ hampir di mana-mana untuk n $\to \infty$ dan $f_n \in$ M(E) untuk setiap n.

(ii) $|f_n| \leq M$ hampir di mana-mana pada E untuk setiap n dan suatu bilangan M≥0.

maka f ∈ M(E) dan $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n = \int\limits_E f$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Karakteristik Ruang Fungsi W_o(E)

Di dalam makalah ini, $\mathbf{R}^n$ menunjukkan ruang Euclide dimensi *n*, $\mathbf{R}$ menunjukan sistem bilangan real dan $\overline{\mathbf{R}}$ menunjukan sistem bilangan real yang diperluas. Diketahui $\overline{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbf{R}^n$, $\overline{b}$ dikatakan menuju tak hingga, ditulis $\overline{b} \to \infty$, jika min $|b_i| \to \infty$.

Definisi 3.2.

Diketahui E = $[\overline{1}, \overline{b}] \subset \mathbf{R}^n$ dengan $\overline{b} > \overline{1}$ dan f : $[\overline{1}, \overline{b}] \to \overline{\mathbf{R}}$ fungsi terukur dan terintegral McShane pada $[\overline{1}, \overline{b}]$. Didefinisikan ruang W_0(E) sebagai berikut :

$$W_0(E) = \left\{ f \in M[\overline{1}, \overline{\infty}) : \lim_{|\overline{b}|\to\infty} \frac{1}{\alpha[\overline{1}, \overline{b}]} \int_{\overline{1}}^{\overline{b}} |f| = 0 \right\}.$$

Teorema 3.3.

W_0(E) merupakan ruang Banach terhadap norma $\|f\| = sup \left\{ \frac{1}{\alpha[\overline{1}, \overline{b}]} \int_{\overline{1}}^{\overline{b}} |f| : \overline{b} > \overline{1} \right\}$.

Bukti : Dalam hal in hanya akan ditunjukkan bahwa W_0(E) lengkap. Ambil sebarang barisan Cauchy $\{f_n\} \subset W_0$(E), yaitu untuk setiap bilangan ε > 0 terdapat bilangan asli N_1 sehingga jika n,m ≥ N_1 berlaku $\|f_m - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ambil sembarang $\overline{x}$ ∈E, selanjutnya dibentuk partisi McShane P = $\{(I, \xi)\}$ sehingga $\overline{x}$ merupakan salah satu titik terkaitnya. Fungsi f_m, f_n ∈ M(E) dan M(E) merupakan ruang linear maka f_m - f_n ∈ M(E), dan karena M(E) ruang integral mutlak maka | f_m - f_n | ∈ M(E). Oleh karena itu untuk setiap bilangan ε > 0 terdapat fungsi positip δ pada E sehingga untuk setiap partisi McShane P = $\{(I,\bar{\xi})\}$ pada E berlaku :

$$\left|\int_E \left|f_m(\bar{x}) - f_m(\bar{x})\right| d\alpha - P\sum\left|f_m(\bar{\xi}) - f_n(\bar{\xi})\right|\alpha(I)\right| < \frac{\varepsilon\alpha(E)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\alpha(E)}\int_E \left|f_m(\bar{x}) - f_m(\bar{x})\right| d\alpha - \frac{1}{\alpha(E)}P\sum\left|f_m(\bar{\xi}) - f_n(\bar{\xi})\right|\alpha(I)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(E)}P\sum\left|f_m(\bar{\xi}) - f_n(\bar{\xi})\right|\alpha(I) < \frac{1}{\alpha(E)}\int_E \left|f_m(\bar{x}) - f_n(\bar{x})\right| d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Akibatnya berlaku $\frac{1}{\alpha(E)}\left|f_m(\bar{\xi}) - f_n(\bar{\xi})\right| \alpha(I)$ < ε untuk setiap $(\bar{\xi}, I) \in$ P(E), khususnya untuk $(\bar{x}, I) \in$ P(E) berlaku: $\frac{\alpha(I)}{\alpha(E)}\left|f_m(\bar{x}) - f_n(\bar{x})\right|$ < ε atau $\left|f_m(\bar{x}) - f_n(\bar{x})\right| < \frac{\alpha(E)}{\alpha(I)}$ε untuk setiap ε > 0.

Hal ini berarti barisan $\{f_n(\bar{x})\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam $\mathbf{R}$, oleh karena itu terdapat fungsi f yang terintegral McShane pada $[\bar{1}, \bar{b}]$ dengan $\bar{b} > \bar{1}$ sehingga $f_n \to f$ hampir di mana-mana pada $[\bar{1}, \bar{b}]$, yaitu untuk setiap bilangan ε> 0 terdapat bilangan asli N_2 sehingga jika n > N_2 berlaku : $\left|f_n - f\right| < \varepsilon$, hal ini berakibat :

$$\int_{\bar{1}}^{\bar{b}} \left|f_n - f\right| < \int_{\bar{1}}^{\bar{b}} \varepsilon = \varepsilon\alpha[\bar{1}, \bar{b}], \text{ untuk setiap } \bar{b} > \bar{1}$$

$$\Leftrightarrow sup\left\{\frac{1}{\alpha[\bar{1}, \bar{b}]}\int_{\bar{1}}^{\bar{b}} \left|f_n - f\right| : \bar{b} > \bar{1}\right\} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left\|f_n - f\right\| < \varepsilon$$

Dengan kata lain, barisan $\{f_n\}$ konvergen norma ke fungsi *f*. Lebih lanjut diperoleh :

$\lim\limits_{|\bar{b}|\to\infty} \dfrac{1}{\alpha[\bar{1},\bar{b}]}\int_{\bar{1}}^{\bar{b}}|f| \le \lim\limits_{|\bar{b}|\to\infty} \dfrac{1}{\alpha[\bar{1},\bar{b}]}\int_{\bar{1}}^{\bar{b}}|f-f_n| + \lim\limits_{|\bar{b}|\to\infty} \dfrac{1}{\alpha[\bar{1},\bar{b}]}\int_{\bar{1}}^{\bar{b}}|f_n| < \varepsilon$ untuk setiap bilangan $\varepsilon >$ 0. Jadi $\lim\limits_{|\bar{b}|\to\infty} \dfrac{1}{\alpha[\bar{1},\bar{b}]}\int_{\bar{1}}^{\bar{b}}|f| = 0$, hal ini berarti f $\in$ W_o. Jadi W_o lengkap, oleh karena itu W_o merupakan ruang Banach. ■

Teorema 3.4.

Diketahui E = $[\bar{1},\bar{b}] \subset$ **R**^{n} sel dengan $\bar{b} > \bar{1}$. Norma || . || pada ruang W_o(E) seperti dimaksud pada Teorema 3.3.memenuhi sifat : Jika barisan $\{f_n\} \subset$ W_o(E) konvergen norma ke suatu fungsi f $\in W_o$(E) maka terdapat barisan bagian $\{f_{n(i)}\} \subset \{f_n\}$ dan h $\in W_o$(E) sehingga $f_{n(i)} \to f$ hampir di mana-mana pada $[\bar{1},\bar{b}]$ dan $|f_{n(i)}| \le$ h untuk setiap $n(i)$.

Bukti : Ambil sembarang barisan $\{f_n\} \subset$ W_o(E) sehingga $\{f_n\}$ konvergen norma ke suatu fungsi f $\in W_o$(E), yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N_1 sehingga jika n $\ge N_1$ berlaku : $\|f_n - f\| < \varepsilon$ ………………… (*)

Ambil sembarang $\bar{x} \in$E, selanjutnya dibentuk partisi McShane P = $\{(I,\bar{\xi})\}$ sehingga $\bar{x}$ merupakan salah satu titik terkaitnya. Fungsi $f_n, f \in$ M(E) dan M(E) merupakan ruang linear maka $f_n - f \in$ M(E), dan karena M(E) ruang integral mutlak maka $|f_n - f| \in$ M(E). Oleh karena itu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positip δ pada E sehingga untuk setiap partisi McShane P = $\{(I,\bar{\xi})\}$ pada E berlaku:

$$\left|\int_E |f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|\, d\alpha - P\sum |f_n(\bar{\xi}) - f(\bar{\xi})|\alpha(I)\right| < \frac{\varepsilon\alpha(E)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\alpha(E)}\int_E |f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|\, d\alpha - \frac{1}{\alpha(E)}P\sum |f_n(\bar{\xi}) - f(\bar{\xi})|\alpha(I)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(E)}P\sum |f_n(\bar{\xi}) - f(\bar{\xi})|\alpha(I) < \frac{1}{\alpha(E)}\int_E |f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Akibatnya berlaku $\frac{1}{\alpha(E)}\left|f_n(\bar{\xi})-f(\bar{\xi})\right|\alpha(I)$ < ε untuk setiap $(\bar{\xi},I)\in$P(E), khususnya untuk $(\bar{x},I)$ berlaku : $\frac{\alpha(I)}{\alpha(E)}\left|f_n(\bar{x})-f(\bar{x})\right|$< ε atau $\left|f_n(\bar{x})-f(\bar{x})\right|$ < $\frac{\alpha(E)}{\alpha(I)}$ε untuk setiap ε > 0. Hal ini berarti barisan $\{f_n\}$ konvergen titik demi titik ke fungsi f hampir di mana-mana pada E .... (**)

Berdasarkan (*),untuk setiap bilangan asli *i* terdapat bilangan asli $N(i)$ sehingga jika n(i) $\geq N(i)$ berlaku :

$\left\|f_{n(i)}-f\right\|$ < 2^{-i} untuk setiap i

Akibatnya diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|f_{n(i)}-f_{n(i+1)}\right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left\|f_{n(i)}-f\right\| + \sum_{i=1}^{\infty}\left\|f_{n(i+1)}-f\right\|$$

$$< \sum_{i=1}^{\infty}2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty}2^{-(i+1)} < \infty$$

Hal ini berarti untuk setiap bilangan η > 0 terdapat bilangan asli N_2 sehingga jika $i \geq N_2$ berlaku $\sum_{i=N_2}^{\infty}\left\|f_{n(i)}-f_{n(i+1)}\right\|$ < η.

Selanjutnya dibentuk barisan-barisan $\{g_m\}$ dan $\{h_m\}$ dengan $g_m=\sum_{i=1}^{m}\left(f_{n(i)}-f_{n(i+1)}\right)$ dan $h_m=\sum_{i=1}^{m}\left|f_{n(i)}-f_{n(i+1)}\right|$. Jelas bahwa g_m, h_m $\in W_o(E)$ untuk setiap m. Selanjutnya ambil sembarang m, n dan tanpa mengurangi arti dapat dianggap m > n, diperoleh :

$$\left\|g_m-g_n\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{m}\left(f_{n(i)}-f_{n(i+1)}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(f_{n(i)}-f_{n(i+1)}\right)\right\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{m}\left(f_{n(i)}-f_{n(i+1)}\right)\right\|$$

$$\leq \sum_{i=n+1}^{m}\left\|f_{n(i)}-f_{n(i+1)}\right\|$$

Khususnya, jika m > n ≥ N_2 berlaku :

$$\left\| g_m - g_n \right\| \le \sum_{i=n+1}^{m} \left\| f_{n(i)} - f_{n(i+1)} \right\| \le \sum_{i=N_2}^{\infty} \left\| f_{n(i)} - f_{n(i+1)} \right\| < \eta.$$

Hal ini berarti bahwa barisan $\{g_m\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam $W_o(E)$ yang lengkap. Jadi $\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n(i)} - f_{n(i+1)}\right)$ konvergen. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^{\infty}\left|f_{n(i)} - f_{n(n+1)}\right|$ juga konvergen. Oleh karena itu untuk setiap m dan setiap $i \le$ m berlaku :

$$\left|\sum_{j=i}^{m}\left(f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right)\right| \le \sum_{j=i}^{m}\left|f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right| \le \sum_{j=i}^{\infty}\left|f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right| < \infty.$$

Ambil N_o = maks $\{N_1, N_2\}$ maka berdasarkan (**) untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $m \ge N_o$ berlaku :

$$\left|\sum_{j=i}^{m}\left(\left(f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right) - \left(f_{n(j)} - f\right)\right)\right| = \left|f_{n(i)} - f_{n(i+1)} + f_{n(i+1)} - \cdots - f_{n(m)} - f_{n(i)} + f\right|$$

$$= \left|f_{n(m+1)} - f\right| < \varepsilon.$$

Hal ini berarti bahwa untuk setiap i barisan $\left\{\sum_{j=i}^{m}\left(f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right)\right\}$ konvergen titik demi titik ke fungsi $\left(f_{n(i)} - f\right)$ hampir di mana-mana pada $\left[\bar{I}, \bar{b}\right]$. Akibatnya :

$$\left|\,\left|f_{n(i)}\right| - |f|\,\right| \le \left|f_{n(i)} - f\right| = \left|\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right)\right| \le \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\left|f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right|$$

$= \sum_{j=i}^{\infty}\left|f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right|$ untuk setiap i, sehingga $\left|f_{n(i)}\right| \le \sum_{j=i}^{\infty}\left|f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right|$ + | f | untuk setiap i.

Ambil $h = \sum_{j=i}^{\infty}\left|f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\right|$ + | f | maka $h \in W_o(E)$. Jadi terdapat barisan bagian $\left\{f_{n(i)}\right\} \subset \left\{f_n\right\}$ dan $h \in W_o(E)$ sehingga $f_{n(i)} \to f$ hampir di mana-mana pada $\left[\bar{I}, \bar{b}\right]$ dan $\left|f_{n(i)}\right| \le h$ untuk setiap $n(i)$. ■

Representasi Fungsional Aditif Ortogonal pada W_0 di dalam R^n

Lemma 4.1.

Diketahui E = $\left[\bar{I},\bar{b}\right] \subset$ **R**^{n} sel dengan $\bar{b}$ > $\bar{I}$. Jika F fungsional aditif ortogonal dan kontinu terbatas pada ruang W_0(E), maka terdapat fungsi $k(\bar{x},t)$: $E \times R \to R$ sehingga $k(\bar{x},t)$ terintegral McShane terhadap $\bar{x}$ pada E untuk setiap t $\in$ **R** dengan $k(\bar{x},0)$ = *0* untuk hampir semua $\bar{x} \in$ E dan berlaku :

$F(s)$ = $\int_E k(\bar{x}, s(\bar{x}))\, d\bar{x}$ untuk setiap fungsi sederhana s pada E.

Bukti : Karena F kontinu terbatas, untuk setiap bilangan ε>0 dan *t* terdapat bilangan $\delta(\varepsilon,t)$ > 0 sehingga jika $\mu(E)$ < $\delta(\varepsilon,t)$ maka $\left|F(t\chi_E)\right|$ < ε. Dengan kata lain F sebagai fungsi himpunan kontinu mutlak terhadap μ …………………… (1)

Selanjutnya, jika $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ dengan $E_i^o \cap E_j^o$ = ϕ untuk $i \neq j$, maka berlaku :

$F(t\chi_E)$ = $\lim_{n\to\infty} F\left(t\chi_{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}\right)$ = $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F\left(t\chi_{E_i}\right)$ = $\sum_{i=1}^{\infty} F\left(t\chi_{E_i}\right)$. Hal ini berarti F merupakan fungsi himpunan yang aditif dan terhitung ………………….…… (2)

Dari (1) dan (2), maka menurut Teorema Radon-Nikodym terdapat fungsi $k_t^*(\bar{x})$ pada E sehingga $F(t\chi_E) = \int_E k_t^*(\bar{x})\, d\bar{x}$ untuk setiap E. Selanjutnya, didefinisikan fungsi $k(\bar{x},t)$ = $k_t^*(\bar{x})$ untuk setiap $\bar{x}$ $\in$*E* dan *t* $\in$ $\mathbf{R}$. Jika t = 0 maka $F(t\chi_E) = F(\theta)$ = 0, oleh karena itu $\int_E k_0^*(\bar{x})$ = 0 untuk setiap E. Jadi $k(\bar{x},0)$ = θ untuk hampir semua $\bar{x}$ $\in$*E*. Selanjutnya, ambil sembarang himpunan sederhana s pada E dengan $s(\bar{x})$ = $\sum_{i=1}^{n} t_i \chi_{E_i}(\bar{x})$ dengan E_i himpunan terukur yang sepasang-sepasang saling asing dan $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, maka diperoleh :

$F(s)$ = $F\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \chi_{E_i}\right)$ = $\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} k(\bar{x},t_i)\, d\bar{x}$ = $\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} k(\bar{x},s(\bar{x}))\, d\bar{x}$ = $\int_E k(\bar{x},s(\bar{x}))\, d\bar{x}$. ■

Lemma 4.2.

Diketahui E = $\left[\bar{l},\bar{b}\right] \subset$ **R**^{n} sel dengan $\bar{b}$ > $\bar{l}$, F fungsional aditif ortognoal dan kontinu terbatas pada ruang $W_o(E)$, dan $k(\bar{x},t)$: $E \times R \to R$ fungsi yang diperoleh pada Lemma 4.1. Jika untuk setiap bilangan δ > 0 dan setiap interval tertutup terbatas P = [-d,d] dengan d > 0 dibentuk bilangan-bilangan :

$$W(\delta;P;E) = \sup\left\{\int_E \left|k(\bar{x},t_1) - k(\bar{x},t_2)\right| d\alpha : t_1,t_2 \in P \; dan \; |t_1 - t_2| < \delta\right\} \text{ dan}$$

$$W(\delta;P) \quad = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} W(\delta;P;E_i) : \bigcup_{i=1}^{n} E_i ,\, E_i \cap E_j \; untuk \; i \neq j\right\}$$

maka $\lim_{\delta\to 0^+} W(\delta;P) = 0$ untuk setiap interval P.

Bukti : Jika 0 < $\delta_1 \le \delta_2$ dan t_1, t_2 ∈ P dengan $|t_1 - t_2| < \delta_1$ maka $|t_1 - t_2| < \delta_2$. Hal ini berakibat jika $0<\delta_1 \le \delta_2$ maka $W(\delta_1;P) \le W(\delta_2;P)$. Jadi net $\{W(\delta;P) : \delta \downarrow 0\}$ turun monoton dan terbatas ke bawah dan salah satu batas bawahnya adalah 0. Oleh karena $\lim_{\delta\to 0^+} W(\delta;P)$ ada.

Andaikan $\lim_{\delta\to 0^+} W(\delta;P) = \varepsilon$ untuk suatu bilangan ε>0. Berdasarkan definisinya, terdapat himpunan saling asing $E_1, E_2, \cdots, E_n$ dengan $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$ dan bilangan-bilangan $t_1^i, t_2^i, i = 1, 2, \cdots, n$ sehingga $\left|t_1^i - t_2^i\right| \le \delta$, $\left|t_1^i\right|$ ≤ d, $\left|t_2^i\right|$ ≤ d dan $\sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} \left|k(\bar{x},t_1^i) - k(\bar{x},t_2^i)\right|$ > ε.

Selanjutnya untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$ didefinisikan himpunan-himpunan :

$$E_i^+ = \left\{\bar{x} \in E_i : k(\bar{x},t_1^i) - k(\bar{x},t_2^i) \ge 0\right\} \text{ dan } E_i^- = E_i - E_i^+$$

dan juga didefinisikan fungsi-fungsi :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \left(t_1^i \chi_{E_i^+} + t_2^i \chi_{E_i^-}\right) \text{ dan } g = \sum_{i=1}^{n} \left(t_2^i \chi_{E_i^+} + t_1^i \chi_{E_i^-}\right)$$

Jelas bahwa $f, g \in W_0(E)$ dan berlaku :

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{1}{\alpha[\overline{1},\overline{b}]}\int_{\overline{1}}^{\overline{b}}|f| : \overline{b} > \overline{1}\right\}$$

$$= \sup\left\{\frac{1}{\alpha(E)}\int_E\left|\sum_{i=1}^{n}\left(t_1^i\chi_{E_i^+} - t_2^i\chi_{E_i^-}\right)\right| : E = \left[\overline{1},\overline{b}\right], \overline{b} > \overline{1}\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\frac{1}{\alpha(E)}\int_E\sum_{i=1}^{n}\left(\left|t_1^i\chi_{E_i^+}\right| + \left|t_2^i\chi_{E_i^-}\right|\right) : E = \left[\overline{1},\overline{b}\right], \overline{b} > \overline{1}\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\frac{1}{\alpha(E)}\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i^+} d\chi_{E_i^+} + \frac{1}{\alpha(E)}\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i^-} d\chi_{E_i^-} : E = \left[\overline{1},\overline{b}\right], \overline{b} > \overline{1}\right\}$$

$$= \sup\left\{\frac{1}{\alpha(E)} d\sum_{i=1}^{n}\alpha(E_i) : E = \left[\overline{1},\overline{b}\right], \overline{b} > \overline{1}\right\} = d$$

Dengan cara yang sama diperoleh : $\|g\| < d$. Lebih lanjut diperoleh :

$$f - g = \sum_{i=1}^{n}\left(t_1^i\chi_{E_i^+} + t_2^i\chi_{E_i^-}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(t_2^i\chi_{E_i^+} + t_1^i\chi_{E_i^-}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(t_1^i - t_2^i\right)\chi_{E_i^+} + \left(t_2^i - t_1^i\right)\chi_{E_i^-}\right)$$

Analog dengan cara di atas juga diperoleh : $\|f - g\| \leq$ d. Karena F kontinu dan terbatas maka $|F(f) - F(g)|$ < ε. Dari pihak lain diperoleh :

$$|F(f) - F(g)|$$

$$= \left|\int_E k\left(\overline{x}, \sum_{i=1}^{n}\left(t_1^i\chi_{E_i^+} + t_2^i\chi_{E_i^-}\right)\right) - \int_E k\left(\overline{x}, \sum_{i=1}^{n}\left(t_2^i\chi_{E_i^+} + t_1^i\chi_{E_i^-}\right)\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} k\left(\overline{x}, t_1^i\chi_{E_i^+}\right) + \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} k\left(\overline{x}, t_2^i\chi_{E_i^-}\right) - \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} k\left(\overline{x}, t_2^i\chi_{E_i^+}\right) - \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} k\left(\overline{x}, t_1^i\chi_{E_i^-}\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i}\left(k\left(\overline{x}, t_1^i\chi_{E_i^+}\right) - k\left(\overline{x}, t_1^i\chi_{E_i^-}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i}\left(k\left(\overline{x}, t_2^i\chi_{E_i^-}\right) - k\left(\overline{x}, t_2^i\chi_{E_i^+}\right)\right)\right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i^+} \left| k\left(\bar{x}, t_1^i \chi_{E_i^+}\right) - k\left(\bar{x}, t_2^i \chi_{E_i^+}\right) \right| + \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i^-} \left| k\left(\bar{x}, t_1^i \chi_{E_i^-}\right) - k\left(\bar{x}, t_2^i \chi_{E_i^-}\right) \right| \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i^+} \left| k\left(\bar{x}, t_1^i\right) - k\left(\bar{x}, t_2^i\right) \right| + \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i^-} \left| k\left(\bar{x}, t_1^i\right) - k\left(\bar{x}, t_2^i\right) \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} \left| k\left(\bar{x}, t_1^i\right) - k\left(\bar{x}, t_2^i\right) \right| > \varepsilon$$

Kontradiksi, jadi pengandaian salah, oleh karena itu yang benar adalah $\lim_{\delta \to 0^+} W(\delta; P) = 0$. ■

Lemma 4.3.

Diketahui E = $\left[\bar{I}, \bar{b}\right] \subset$ **R**^{n} sel dengan $\bar{b}$ > $\bar{I}$. Jika F fungsional aditif ortogoal dan kontinu terbatas pada ruang $W_o(E)$, maka fungsi $k(\bar{x}, t)$: $E \times R \to R$ fungsi yang diperoleh pada Lemma 1 kontinu seragam pada setiap interval tertutup terbatas P $\subset$ **R** dan untuk setiap $\bar{x} \in$E.

Bukti : Ambil sembarang $\bar{x} \in$E dan sembarang interval tertutup terbatas P $\subset$ **R**. Menurut Lemma 4.2. diperoleh $\lim_{\delta \to 0^+} W(\delta; P)$ = 0, yaitu :

$$0 = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} W(\delta; P; E_i) : \bigcup_{i=1}^{n} E_i,\ E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j \right\}$$

$$\geq \lim_{\delta \to 0^+} \left\{ \sup \int_E \left| k(\bar{x}, t_1) - k(\bar{x}, t_2) \right| d\alpha : t_1, t_2 \in P \ dan \ |t_1 - t_2| < \delta \right\}$$

$$\geq \lim_{\delta \to 0^+} \left\{ \int_E \left| k(\bar{x}, t_1) - k(\bar{x}, t_2) \right| d\alpha : t_1, t_2 \in P \ dan \ |t_1 - t_2| < \delta \right\}$$

Hal ini berarti, jika t_1, $t_2 \in$ P dengan $|t_1 - t_2| < \delta$ berlaku : $\lim_{\delta \to 0^+} \int_E \left| k(\bar{x}, t_1) - k(\bar{x}, t_2) \right| d\alpha$ = 0, yaitu untuk setiap bilangan ε>0 terdapat bilangan δ>0 sehinga jika t_1, $t_2 \in$ P dengan $|t_1 - t_2| < \delta$ berlaku :

$$\int_E \left| k(\bar{x}, t_1) - k(\bar{x}, t_2) \right| d\alpha < \frac{\varepsilon \alpha(E)}{2}$$

Ambil sembarang $\bar{x} \in$E, selanjutnya dibentuk partisi McShane P = $\{(I,\bar{\xi})\}$ sehingga $\bar{x}$ merupakan salah satu titik terkaitnya. Fungsi $k(\cdot,t_1)$, $k(\cdot,t_2)$ $\in$ M(E) dan M(E) merupakan ruang linear maka $k(\cdot,t_1)$- $k(\cdot,t_2) \in$ M(E), dan karena M(E) ruang integral mutlak maka | $k(\cdot,t_1)$- $k(\cdot,t_2)$ | $\in$ M(E). Oleh karena itu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positip η pada E sehinga untuk setiap partisi McShane P = $\{(I,\bar{\xi})\}$ η-fine pada E berlaku:

$$\left|\int_E \left|k(\bar{x},t_1)-k(\bar{x},t_2)\right| d\alpha - P\sum\left|k(\bar{\xi},t_1)-k(\bar{\xi},t_2)\right|\alpha(I)\right| < \frac{\varepsilon\alpha(E)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\alpha(E)}\int_E \left|k(\bar{x},t_1)-k(\bar{x},t_2)\right| d\alpha - \frac{1}{\alpha(E)}P\sum\left|k(\bar{\xi},t_1)-k(\bar{\xi},t_2)\right|\alpha(I)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(E)}P\sum\left|k(\bar{\xi},t_1)-k(\bar{\xi},t_2)\right|\alpha(I) \quad < \frac{1}{\alpha(E)}\int_E \left|k(\bar{x},t_1)-k(\bar{x},t_2)\right| d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan bilangan δ_1 = inf $\{\eta(\bar{x}) : \bar{x} \in E\}$, jelas bahwa $\delta_1 > 0$ dan selanjutnya dipilih bilangan δ_o = min $\{\delta, \delta_1\}$, maka diperoleh :

$$\frac{1}{\alpha(E)}P\sum\left|k(\bar{\xi},t_1)-k(\bar{\xi},t_2)\right|\alpha(I) \quad < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Akibatnya berlaku $\frac{1}{\alpha(E)}\left|k(\bar{\xi},t_1)-k(\bar{\xi},t_2)\right|\alpha(I) < \varepsilon$ untuk setiap $(\bar{\xi},I) \in$ P(E), khususnya untuk $(\bar{x},I) \in$ P(E) berlaku: $\frac{\alpha(I)}{\alpha(E)}\left|k(\bar{x},t_1)-k(\bar{x},t_2)\right| < \varepsilon$ atau $\left|k(\bar{x},t_1)-k(\bar{x},t_2)\right| < \frac{\alpha(E)}{\alpha(I)}\varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Jadi, untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan $\delta_o>0$ sehinga jika t_1, $t_2 \in$ P dengan $|t_1 - t_2| < \delta_0$ berlaku $\left|k(\bar{x},t_1)-k(\bar{x},t_2)\right| < \frac{\alpha(E)}{\alpha(I)}\varepsilon$. Dengan kata lain fungsi $k(\bar{x},\cdot)$ kontinu seragam pada setiap interval tertutup terbatas P$\subset$**R** dan untuk setiap $\bar{x} \in$E. ■

Teorema 4.4.

Diketahui E = $[\bar{I},\bar{b}] \subset$ **R**^{n} dengan $\bar{b}$ > 1. Fungsional *F* aditif ortogonal dan kontinu terbatas pada ruang W_o(E) jika dan hanya jika terdapat fungsi Caratheodory $k(\bar{x},t) : E \times R \rightarrow R$ dengan

$k(\bar{x},0)$ = *0* untuk hampir semua $\bar{x} \in$ E sehingga $k(\bar{x},t)$ terintegral McShane terhadap $\bar{x}$ pada E untuk setiap t $\in$ **R** dan berlaku : $F(f) = \int_E k(\bar{x}, f(\bar{x}))\, d\bar{x}$ untuk setiap fungsi f $\in$ $W_o(E)$.

Bukti : Syarat cukup. Jika f $\in$ $W_o(E)$, maka terdapat barisan fungsi sederhana $\{s_n\}$ pada E, sehingga $s_n(\bar{x}) \to f(\bar{x})$ hampir dimana-mana pada E untuk $n \to \infty$ dan $|s_n(\bar{x})| \le |f(\bar{x})|$ untuk semua n. Menurut Lemma 4.3., fungsi $k(\bar{x},\cdot)$ kontinu seragam pada setiap interval tertutup terbatas P$\subset$**R** dan untuk setiap $\bar{x}$ $\in$E, akibatnya: $k(\bar{x}, s_n(\bar{x})) \to k(\bar{x}, f(\bar{x}))$ hampir di mana-mana pada E dan terdapat bilangan M≥0 sehinga $|k(\bar{x}, s_n(\bar{x}))| \le M$ hampir di mana-mana pada E. Oleh karena itu menurut Teorema Kekonvergenan Terdominasi $\lim_{n\to\infty} k(\bar{x}, s_n(\bar{x}))$ terintegral McShane dan berlaku :

$$\lim_{n\to\infty} \int_E k(\bar{x}, s_n(\bar{x}))\, d\bar{x} = \int_E k(\bar{x}, f(\bar{x}))\, d\bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad F\left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) = \int_E k(\bar{x}, f(\bar{x}))\, d\bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(f) = \int_E k(\bar{x}, f(\bar{x}))\, d\bar{x}$$

Syarat perlu. Ambil sembarang f, g $W_o(E)$ sehingga f $\perp$ g, yaitu $f(\bar{x})g(\bar{x})$ = 0 hampir di mana-mana pada E. Selanjutnya, dibentuk himpunan-himpunan :

$A = \{\bar{x} \in E : g(\bar{x}) = 0\}, B = \{\bar{x} \in E : f(\bar{x}) = 0\}$dan $C = \{\bar{x} \in E : f(\bar{x}) \ne 0 \; dan \; g(\bar{x}) \ne 0\}$,

diperoleh :

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \int_E k(\bar{x}, (f+g)(\bar{x}))\, d\bar{x} \\ &= \int_E k(\bar{x}, f(\bar{x}) + g(\bar{x}))\, d\bar{x} \\ &= \int_E k(\bar{x}, f(\bar{x}))\, d\bar{x} + \int_E k(\bar{x}, g(\bar{x}))\, d\bar{x} \\ &= F(f) + F(g) \end{aligned}$$

Jadi F aditif orthogonal pada $W_o(E)$.

Selanjutnya, ambil sembarang f $\in$W$_o$(E) dan sembarang barisan $\{f_n\}\subset$ W$_o$(E) sehinga $\{f_n\}$ konvergen terbatas ke fungsi f hampir dimana-mana pada E, yaitu terdapat bilangan M $\geq$ 0 sehingga $|f_n(\bar{x})|$ $\leq$ M untuk setip n dan $f_n(\bar{x}) \to f(\bar{x})$ hampir di mana-mana pada E. Karena fungsi $k(\bar{x},\cdot)$ kontinu seragam pada setiap interval tertutup terbatas P$\subset$**R** dan untuk setiap $\bar{x}$ $\in$E, maka terdapat bilangan N≥0 sehingga $|k(\bar{x}, f_n(\bar{x}))| \leq N$ untuk semua n dan $k(\bar{x}, f_n(\bar{x})) \to k(\bar{x}, f(\bar{x}))$ hampir di mana-mana pada E. Oleh karena itu, menurut Teorema Kekonvergenan Terdominasi berlaku :

$\lim_{n\to\infty} \int_E k(\bar{x}, f_n(\bar{x}))\, d\bar{x}$ = $\int_E k(\bar{x}, f(\bar{x}))\, d\bar{x} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F(f_n)$ = $F(f)$. Dengan kata lain F kontinu terbatas paada W$_o$(E). ■

PENUTUP

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa syarat perlu dan cukup agar fungsional *F* aditif ortogonal dan kontinu terbatas pada ruang W$_o$(E) adalah adanya fungsi Caratheodory $k(\bar{x}, t)$: $E \times R \to R$ yang mempunyai sifat $k(\bar{x},0)$ = *0* untuk hampir semua $\bar{x}$ $\in$ E dan $k(\bar{x}, t)$ terintegral McShane terhadap $\bar{x}$ pada *E* untuk setiap *t* $\in$ **R**.

DAFTAR PUSTAKA

Aye, K.K. dan Lee, P.Y., 2002a, *Orthogonally additive Functional on BV*, Singapura: Nanyang Technological University.

Chew, T.S., 1985, *Orthogonally additive Functional*, Singapura: Universitas Nasional Singapura.

Darmawijaya, S, 2003, *On Bounded Interval Functions*, Yogyakarta : SEAM GMU.

Hildebrandt, T.H., 1966, Linear Continuous Functionals on The Space (BV) with Weak Topologies, *Proc. Amer. Math. Soc* 17, 658-664.

Indrati, C.R., 2002, *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi n*, Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Lee, P.Y., 1989, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Singapura: Wold Scientific.

Paredes, L.I., 1993, *Orthogonally additive Functionals and Superposition Operators on* $w_o(\phi)$,Ph.D. Thesis, University of The Philippines.

Pfeffer, W.F., 1993, *The Riemann Approach to Integration*, New York: Cambridge University Press.