KAJIAN "MODUL P-BÉZOUT DAN IDEALISASINYA" UNTUK BUKU AJAR MATA KULIAH TEORI GELANGGANG BERBASIS RISET

Muhamad Ali Misri

Tadris Matematika, IAIN Syekh Nurjati Cirebon
Jl. Perjuangan By Pass Sunyaragi Cirebon
alimisri@syekhnurjati.ac.id

Abstract

This paper discusses the properties of P-Bézout modules via idealization. P-Bézout Module here are only Bézout modules. Study of these properties could views in the side of adequacy as a teaching materials on Ring Theory and forming the character of students on other side. Patterns in material transfering process is directly proportional impacted to the student's positive character growth, especially critical and creative thingking as a starting point of teacher's character building which is independent and prestigious since it is able to provide the students wants such as material and personality

Keywords: modules, rings, faithful multiplication Bezout , character buildings, research based teaching materials

Abstrak

Tulisan ini membahas kajian sifat-sifat modul P-Bézout melalui idealisasi. Modul P-Bézout pada tulisan ini hanya berupa modul Bézout. Kajian sifat-sifat tersebut dilihat dari sisi kecukupan sebagai bahan ajar perkuliahan Teori Gelanggang dan dari sisi pembentukan karakter mahasiswa. Pola penyampaian dalam proses penguasan materi berbanding lurus dengan pertumbuhan karakter positif mahasiswa khususnya berupa sifat kritis dan kreatif sebagai titik tolak terbentuknya pribadi guru yang mandiri dan berwibawa karena mampu memberikan kebutuhan siswa dari sisi materi dan kepribadian.

Keywords: *modul, gelanggang, Bézout perkalian yang setia, pembentukan karakter, bahan ajar berbasis riset.*

PENDAHULUAN

Paling tidak ada dua hal yang dapat dicapai dalam proses pembelajaran, yakni perolehan materi ajar dan terbentuknya karakter yang diharapkan dari proses penyampaian materi ajar tersebut. Dalam teori gelanggang, beberapa topik yang perlu dikuasai paling tidak mencakup: pengertian gelanggang dan contohnya, klasifikasi gelanggang, membandingkan gelanggang dan pengetahuan cara pembentukan gelanggang baru.

P-Bézout adalah salah satu struktur hasil pengembangan yang telah dilakukan dalam teori gelanggang. Salah satu kajian dari struktur P-Bézout adalah mengenai modul Bézout dan idealisasinya. Beberapa kajian yang telah dilakukan terkait struktur tersebut yaitu kajian Ali (2006)a, (2006)b dan (2007), Anderson (2000), Winders dan Anderson (2009), Bakkari (2009), Cheniour (2012), Misri dkk (2013), Misri (2015) dan Misri dkk (2016).

Melihat adanya pembaharuan hasil penelitian ini, perlu kiranya dilakukan pembaharuan pula pada buku ajar mata kuliah teori gelanggang. Misri (2016) telah melakukan kajian materi untuk penyusunan buku ajar teori gelanggang dengan mempelajari sifat-sifat modul Bézout sebagai puncaknya. Dengan dilakukannya usaha pembaharuan buku ajar ini, paling tidak ada dua aspek berikut dapat terpenuhi. Pertama, Semua topik yang perlu dikuasai dalam teori gelanggang dapat terintegrasikan dalam satu kajian yakni modul Bézout dan idealisasinya sebagai topik puncak pada kajian tersebut. Kedua, terjadinya pembentukan karakter yang kritis dan kreatif, sistematis dan terarah dalam diri mahasiswa. Pembentukan karakter tersebut tentunya didukung dengan adanya kegiatan-kegiatan berupa membentuk dan mengolah pernyataan-pernyataan dengan menggunakan argumen yang valid dalam melakukan proses pembuktiannya. Dengan kemampuan yang dibangun tersebut, mahasiswa mampu mengintegrasikannya pada setiap mata kuliah yang diambilnya. Kemampuan pada aspek ke dua ini dapat menghantarkan mahasiswa menjadi matematikawan maupun guru matematika yang kritis dan kreatif yang tidak mudah menerima teori atau konsep baru mana pun sebelum jelas terlebih dahulu kebenarannya.

KAJIAN PUSTAKA

Pernyataan merupakan suatu kalimat yang benar atau salah, tetapi tidak keduanya. Suatu pernyataan disebut benar jika nilai kebenaran pernyataan tersebut benar. Sebaliknya, suatu pernyataan disebut salah jika nilai kebenaran pernyataan tersebut salah. Pernyataan disebut juga dengan proposisi dan ditandai menggunakan huruf kapital, seperti: P, Q, atau R. Nilai kebenaran benar ditandai menggunakan huruf kapital T sementara nilai kebenaran salah menggunakan huruf kapital F.

Kalimat “dua itu bilangan ganjil” adalah pernyataan salah. Sementara kalimat “di manakah kau temukan itu?” bukan pernyataan.

Lima bentuk pernyataan dasar diperoleh dengan cara menegasikan atau merangkai pernyataan menggunakan penghubung logika: ‘dan’, ‘atau’, ‘jika maka’ serta ‘jika dan hanya jika’ (Daepp & Gorkin, 2011). Bentuk pernyataan lainnya berasal dari lima bentuk dasar tersebut. Misalkan P dan Q dua buah pernyataan. Bentuk pernyataan “tidak P”, ditulis: $\neg P$, disebut **negasi** P. Bentuk pernyataan “P atau Q”, ditulis: $P \vee Q$, disebut **disjungsi**. Bentuk pernyataan “P dan Q” ditulis: $P \wedge Q$, disebut **konjungsi**. Bentuk pernyataan “Jika P, maka Q”, dapat ditulis: $P \rightarrow Q$, disebut **implikasi**. Terakhir, bentuk pernyataan “P jika dan hanya jika Q”, dapat ditulis: $P \leftrightarrow Q$, disebut ***biimplikasi***.

Pada implikasi, pernyataan P disebut **hipotesis** atau **anteseden** sementara pernyataan Q disebut **konklusi**. Berikut ini cara menyatakan implikasi.

Jika P, Q;
P mengakibatkan Q;
P syarat cukup bagi Q (artinya P cukup untuk membuat Q terjadi);
Q jika P;
Q syarat perlu bagi P (artinya jika P terjadi, maka Q harus terjadi);
Q bilamana P.

Perhatikan bentuk-bentuk pernyataan berikut ini.

Saya lapar;
Saya makan;
Saya tidak lapar;
Saya tidak makan;
Saya lapar tetapi tidak makan;
Saya makan atau saya lapar;
Jika saya lapar, saya makan;
Saya lapar jika dan hanya jika saya tidak makan.
Perhatikan bentuk pernyataan “Jika kamu telah membereskan kamarmu, maka kamu boleh pergi ke rumah temanmu.”!.

Ketika bentuk pernyataan tersebut diucapkan kepada anak kita, kapan ia merasakan bahwa kita berbohong? Pada contoh, antesedennya “kamu telah membereskan kamarmu” dan konklusinya “kamu boleh pergi ke rumah temanmu.”. Ketika anak kita telah membereskan kamarnya dan kita membolehkannya pergi ke rumah temannya, tentu saja ia akan senang karena kita tidak berbohong. Implikasi tersebut menjadi benar. Jadi, ketika antesedennya benar dan konklusinya juga benar, pernyataan secara keseluruhan menjadi benar.

Ketika kita membolehkan anak kita pergi ke rumah temannya meskipun ia belum membereskan kamarnya, kita tidak berbohong. Jadi, pernyataan secara keseluruhan tetap benar meskipun antesedennya salah.

Ketika kita tidak membolehkan anak kita pergi ke rumah temannya karena ia belum membereskan kamarnya, kita juga tidak berbohong. Implikasi tersebut menjadi benar.

Jadi, ketika antesedennya salah dan konklusinya juga salah, pernyataan secara keseluruhan menjadi benar.

Ketika anak kita telah membereskan kamarnya tetapi kita tidak membolehkannya pergi ke rumah temannya, kita berbohong. Jadi, ketika antesedennya benar tetapi konklusinya salah, implikasinya menjadi salah.

Suatu bentuk pernyataan disebut **tautologi** jika nilai kebenaran bentuk pernyataan tersebut pada tabel kebenaran semuanya "T". Sebaliknya, suatu bentuk pernyataan disebut **kontradiksi** jika nilai kebenaran bentuk pernyataan tersebut pada tabel kebenaran semuanya "F". Dua bentuk pernyataan P dan Q disebut **ekuivalen** (secara logis), ditulis: $P \Leftrightarrow Q$, jika $P \leftrightarrow Q$ adalah tautologi. Perlu diperhatikan bahwa tanda $\Leftrightarrow$ bukan penghubung logika dan dengan demikian, $P \Leftrightarrow Q$ bukan suatu bentuk pernyataan. Ia hanya bermakna bahwa $P \leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Pandang bentuk pernyataan $P \to Q$ dan bentuk pernyataan $\neg P \vee Q$. Dua bentuk pernyataan tersebut ekuivalen, ditulis: $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$, mengingat bentuk pernyataan $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ suatu tautologi.

Misalkan P dan Q dua pernyataan. Bentuk pernyataan $\neg Q \to \neg P$ disebut ***kontrapositif*** implikasi $P \to Q$. Bentuk pernyataan $Q \to P$ disebut ***konvers*** implikasi $P \to Q$. Sementara bentuk pernyataan $\neg P \to \neg Q$ disebut ***invers*** implikasi $P \to Q$. Jelas bahwa implikasi dan kontrapositifnya ekuivalen, implikasi dan konversnya tidak ekuivalen, sementara implikasi dan inversnya juga tidak ekuivalen.

Implikasi $P \to Q$ dapat dibentuk menggunakan sembarang pernyataan P dan Q tanpa harus saling terkait. Misalnya, "jika $2 + 3 = 5$, saya akan berlibur ke Bali". Implikasi tersebut tidak pernah ditemukan dalam bahasa.

Perhatikan kalimat "jika saya selesai mengerjakan tugas lebih awal, saya akan menjemputmu sebelum makan siang". Kalimat tersebut berbentuk implikasi $P \to Q$ dengan P "saya selesai mengerjakan tugas lebih awal" dan Q "saya akan menjemputmu sebelum makan siang". Interpretasi umum yang menyatakan bahwa bentuk $\neg P \to \neg Q$: "jika saya belum selesai mengerjakan tugas lebih awal, saya tidak akan menjemputmu sebelum makan siang" adalah benar, bukan disebabkan oleh implikasi $P \to Q$. Jelas bahwa $\neg P \to \neg Q \not\Leftrightarrow P \to Q$. Bahasa memang tidak setepat logika.

Dalam kajian matematika, menentukan benar salahnya suatu pernyataan, perlu mengetahui terlebih dahulu apakah objek yang sedang dibicarakan tersebut sembarang (bersifat umum) atau tertentu (khusus). Ungkapan "untuk setiap", "untuk semua", "untuk suatu" dan "terdapat" disebut **kuantor**. Khususnya, ungkapan "untuk setiap" dan "untuk semua" disebut **kuantor** umum (universal), ditulis: $\forall$ sementara ungkapan "untuk suatu" dan "terdapat" disebut **kuantor** khusus, ditulis: $\exists$. Keberadaan kuantor membuat setiap pernyataan menjadi jelas.

Misalkan x objek yang sedang dibicarakan dan P suatu pernyataan yang memuat x. Pernyataan P ditulis $P(x)$. Dengan memberikan kuantor umum, pernyataan $P(x)$ berubah menjadi: "$\forall x, P(x)$" dibaca: "untuk setiap x, x memiliki sifat P" atau "untuk setiap x, berlaku $P(x)$". Jika pernyataan $P(x)$ diberikan kuantor khusus, maka diperoleh pernyataan: "$\exists x, P(x)$" dibaca: "untuk suatu x, x memiliki sifat P" atau "untuk suatu x, berlaku $P(x)$". Negasi dari pernyataan "$\forall x, P(x)$" adalah "$\exists x, \neg P(x)$". Sementara negasi pernyataan: "$\exists x, P(x)$" adalah "$\forall x, \neg P(x)$".

Pandang pernyataan "setiap jeruk rasanya asam". Bagaimana dengan negasi pernyataan tersebut? Pernyataan "tidak setiap jeruk rasanya asam" merupakan negasinya, tetapi kurang bermanfaat. Lebih baik dengan menyatakan "beberapa jeruk tidak asam" sebagai negasinya, karena lebih bermanfaat. Selanjutnya pandang pernyataan "Ada burung berwarna merah". Negasi pernyataan tersebut adalah "tidak ada burung berwarna merah".

Pandang kalimat "Mahasiswa yang berprestasi pantang menyontek". Misalkan x menyatakan mahasiswa, $P(x)$ menyatakan x berprestasi dan $Q(x)$ menyatakan x menyontek. Dengan demikian, kalimat tersebut menjadi "untuk setiap x, jika $P(x)$ maka $\neg Q(x)$". Untuk dapat menegasikannya, perhatikan langkah-langkah berikut.

$$\begin{aligned}\neg\left(\forall x, \left(P(x) \to \neg Q(x)\right)\right) &\Leftrightarrow \exists x, \neg\left(P(x) \to \neg Q(x)\right)\\ &\Leftrightarrow \exists x, \neg\left(\neg P(x) \vee \neg Q(x)\right)\\ &\Leftrightarrow \exists x, \left(P(x) \wedge Q(x)\right)\end{aligned}$$

Negasi tersebut terlihat pada langkah terakhir yaitu $\exists x, \left(P(x) \wedge Q(x)\right)$, artinya terdapat mahasiswa yang berprestasi tetapi menyontek.

Ada hal penting yang perlu diperhatikan di sini. Pada kalimat "Mahasiswa yang berprestasi pantang menyontek", kuantor tidak diberikan secara jelas. Ketika menemukan kalimat yang seperti itu, berikanlah kuantor umum.

Banyak metode dalam pembuktian, seperti: pembuktian secara langsung, pembuktian dengan kontradiksi, pembuktian melalui kasus per kasus, pembuktian keberadaan suatu objek dan ketunggalannya serta pembuktian dengan induksi matematika. Pada bagian ini, akan dijelaskan teknik pembuktian yang paling sering dilakukan pada metode pembuktian secara langsung dan pembuktian dengan kontradiksi.

Ada beberapa langkah dalam menuliskan suatu bukti. Pertama kenali dahulu masalahnya sehingga menjadi paham. Langkah berikutnya merancang rencana dan merealisasikannya dengan menuliskan bukti tersebut. Terakhir lihat kembali bukti yang telah ditulis tersebut sehingga tidak ditemukan lagi kesalahan. Jika bukti yang ditulis tersebut telah benar, tambahkan kotak kecil ■ pada akhir bukti tersebut. Ada juga yang menggunakan $Q.E.D$ sebagai pengganti ■. Kata "$Q.E.D$" sendiri merupakan singkatan dari *quod erat demonstrandum,* yang berarti "telah didemonstrasikan (ditunjukkan)".

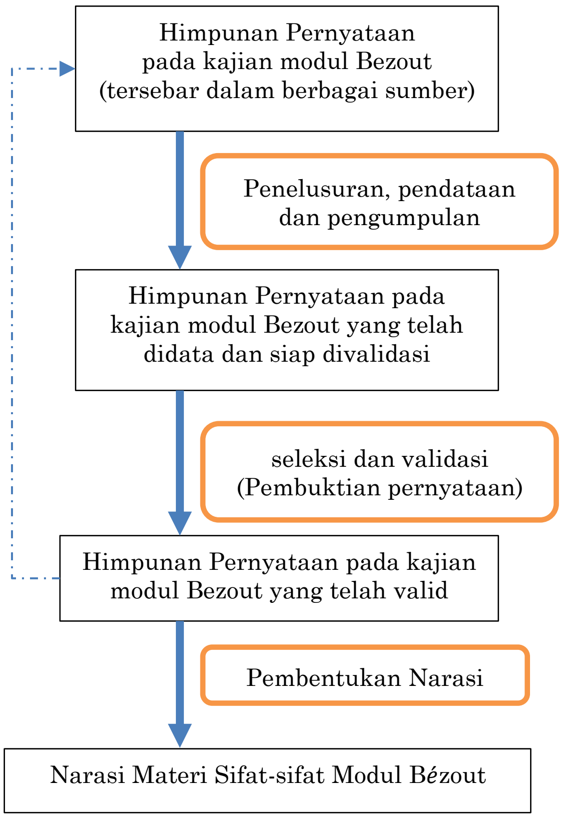
Sebelum memulai pembuktian, pastikan dahulu telah mengetahui semua kata-kata dan istilah yang digunakan dalam pernyataan yang hendak dibuktikan, asumsi apa yang akan digunakan, dan apa yang akan digunakan untuk menunjukkan.

Misalkan akan menunjukkan bahwa "jika P, maka Q benar" dengan pembuktian langsung. Pembuktian cara ini, dimulai dari P dan diteruskan hingga diperoleh Q. Sebelum memulainya, pastikan sudah menguasai makna semua kata dalam implikasi tersebut lalu pastikan implikasi tersebut benar.

Dalam tulisan ilmiah, seperti buku penelitian dan makalah jurnal, pernyataan dibedakan menjadi: proposisi (pernyataan), lema, teorema dan akibat. Teorema merupakan pernyataan inti (utama) yang menjadi hasil utama dalam suatu penelitian. Pernyataan Lema ditulis untuk membuktikan pernyataan teorema. Sementara pernyataan akibat merupakan pernyataan yang ditimbulkan oleh teorema. Ketika penelitian memberikan beberapa hasil, hasil lainnya (selain hasil utama) ditulis dengan nama "pernyataan" atau "proposisi" saja.

Bentuk Pernyataan yang akan dikaji di sini mengenai struktur Bezout dan idealisasinya. Struktur Bézout yang dibahas pada bagian ini berupa gelanggang, modul dan idealisasi Bézout. Khususnya mengenai pengertian serta sifat dan keterkaitannya dengan struktur lain. Materi yang terkait dengan gelanggang Bézout dan idealisasinya diambil dari Cheniour (2012) yang dikutip oleh Misri (2015). Materi yang terkait modul Bézout beserta idealisasinya diambil dari Anderson (2000), Anderson dan Winders (2009), Ali (2007) serta Misri dkk (2016).

Seperti diketahui bersama bahwa isi kajian modul Bézout dan idealisasinya berupa pernyataan-pernyataan logis. Tentu saja kualitas kajian ini ditentukan oleh validitas kebenaran isi dari pernyataan-pernyataan yang dijadikan bahan kajian. Berangkat dari hal tersebut, muncul pemikiran untuk memilih dan menentukan rangkaian pernyataan dalam kajian modul Bézout dan idealisasinya sehingga muncul dalam bentuk narasi. Pemikiran tersebut dapat terlihat pada gambar berikut ini.



Bagan 1. Alur proses Pembentukan narasi materi sifat-sifat modul Bezout

Dari bagan tersebut tampak jelas bahwa narasi yang dihasilkan akan memberi dampak terhadap penguasaan konten materi dan pembentukan karakter mahasiswa.

METODOLOGI

Untuk dapat menghimpun materi kajian sifat-sifat modul Bézout berdasarkan hasil riset, seperti nampak pada bagan 1, digunakan pendekatan penelitian riset sains dasar yang bersifat deskriptif. Penelitian ini juga berupa penelitian kajian kepustakaan, mengingat semua data penelitian diperoleh dari hasil penelusuran pustaka.

Untuk itu, dilakukan tiga tahapan penelitian. Pada tahapan pertama dilakukan inisiasi yakni pengumpulan data berupa pernyataan dengan melakukan penelusuran pada pangkalan data. Pada tahapan ini juga dilakukan pendalaman konsep terkait pernyataan yang telah berhasil dihimpun. Tahapan berikutnya, pernyataan-pernyataan ini kemudian dianalisis menggunakan perangkat pembuktian matematis yang ada sehingga didapatkan sekumpulan pernyataan yang valid secara isi dan struktur kalimatnya. Pada tahapan terakhir, dilakukan penyeleksian. Hasilnya, berupa pernyataan yang telah valid, dituliskan dalam bentuk: definisi, proposisi, lema, teorema dan akibat. Himpunan pernyataan valid tersebut dirangkai membentuk materi "modul Bézout beserta sifat-sifatnya".

Data dalam penelitian ini berupa pernyataan (proposisi): definisi; contoh; lema; teorema maupun akibat, yang berkaitan dengan konsep gelanggang, modul dan idealisasi Bézout. Sementara sumber data berupa artikel jurnal dan prosiding, abstrak, buku teks dan buku hasil penelitian.

Pengumpulan data dilakukan dengan cara penelusuran pada basis data hasil penelitian baik berupa jurnal maupun buku. Penelusuran dilakukan pada pengindeks jurnal dan buku, untuk mendapatkan informasi terkini terkait artikel dan buku terkait modul Bézout dan idealisasinya.

Untuk mendapatkan data yang absah, dilakukan dua hal. Pertama penelusuran data dilakukan hanya pada pangkalan data (pengindeks jurnal dan buku) bereputasi saja baik nasional maupun internasional. Kedua, dilakukan penyaringan data menggunakan alat matematis seperti yang dilakukan pada tahap dua desain penelitian. Sementara itu, kajian karakter diperoleh sebagai dampak dari penerapan kajian tersebut pada proses perkuliahan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Seperti telah disinggung pada bagian pendahuluan, ada dua sisi yang dikaji pada tulisan ini. Kajian tersebut diambil dari sisi kelengkapan konten materi dan sisi pembentukan karakter mahasiswa. Untuk lebih jelasnya simaklah uraian berikut ini.

1. Materi Sifat Modul Bezout Perkalian yang Setia

Struktur Bézout yang dibahas pada bagian ini berupa gelanggang, modul dan idealisasi Bézout. Khususnya mengenai pengertian serta sifat dan keterkaitannya dengan struktur lain. Ada dua hasil utama yang dibahas pada bagian ini. Hasil pertama, terkait gelanggang Bézout dan idealisasinya, diambil dari Cheniour (2012) yang dikutip oleh Misri (2015). Hasil kedua, terkait modul Bézout dan idealisasinya, diambil dari Misri dkk (2016) dan Ali (2007). Hasil kedua ini merupakan perbaikan atas hasil penelitian Misri (2015).

Gelanggang Bézout

Gelanggang Bézout merupakan gelanggang yang setiap ideal yang dibangun secara hingganya utama. Secara formal, pengertian gelanggang Bézout disajikan dalam definisi berikut.

Definisi

Gelanggang R disebut gelanggang Bézout jika setiap ideal yang dibangun secara hingga atas R merupakan ideal utama. Khususnya, jika R daerah integral, gelanggang R disebut daerah Bézout.

Pengertian gelanggang Bézout di atas, disarikan dari tulisannya Cheniour (2012) yang dikutip oleh Misri (2015). Contoh gelanggang Bézout sudah dijelaskan secara terperinci di dalam Misri (2015). Namun demikian, perlu dituliskan kembali dalam tulisan ini untuk dapat memahami gelanggang Bézout. Untuk lebih jelasnya, perhatikan uraian contoh gelanggang Bézout berikut.

Contoh 1. Setiap daerah ideal utama maupun lapangan jelas merupakan daerah Bézout. Contoh sederhananya gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan gelanggang bilangan rasional $\mathbb{Q}$.

Contoh 2. Pandang himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Idealisasi modul $\mathbb{Q}$, ditulis: $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$, merupakan gelanggang komutatif dengan (1,0) sebagai unsur kesatuan dan subhimpunan $\{(0,q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$ sebagai himpunan semua pembagi nol gelanggang tersebut. Mengingat idealisasi tersebut memuat pembagi nol, tentu saja tidak bisa disebut daerah integral. Sementara itu, idealisasi $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$ tentu saja homogen. Untuk itu, semua ideal tak nolnya yang dibangun secara hingga berbentuk $n\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$. Mengingat ideal $n\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q} = \left(\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}\right)(n,0)$, tentu saja idealisasi $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$ merupakan gelanggang Bézout.

Contoh 3. Pandang M sebagai ruang vektor berdimensi dua atas lapangan F, ditulis: $M = F^2$. Idealisasi ruang vektor tersebut, ditulis: $F_{(+)}M$, hanya memiliki empat buah ideal saja. Ideal tersebut yaitu: $0_{(+)}0$, $0_{(+)}F$, $0_{(+)}M$ dan $F_{(+)}M$. Idealisasi $F_{(+)}M$ pastinya homogen. Perhatikan ideal $0_{(+)}M$. Ideal tersebut dibangun secara hingga. Untuk itu, $0_{(+)}M = \left(F_{(+)}M\right)\left(0,(0,1)\right) + \left(F_{(+)}M\right)\left(0,(1,0)\right)$. Mengingat modul M tidak siklik, dengan menggunakan proposisi yang sama, ideal $0_{(+)}M$ tidak utama. Dengan demikian, ada ideal yang dibangun secara hingga tetapi tidak utama. Alasan tersebut penyebab idealisasi $F_{(+)}M$ bukan gelanggang Bézout.

Berikut ini beberapa sifat gelanggang Bézout yang dapat digunakan untuk membantu mengenali struktur tersebut secara lebih mendalam. Sebelum masuk pada bahasan ini, sebaiknya sudah menguasai lapangan hasil terlebih dahulu.

Proposisi (Cheniour, 2012)

Misalkan D dan E keduanya daerah integral yang memenuhi $D \subseteq E$ serta $D_{(+)}E$ idealisasi D-modul E. Idealisasi $D_{(+)}E$ Bézout jika dan hanya jika daerah integral D daerah Bézout dan daerah integral E lapangan hasil bagi atas D.

Pandang tiga buah himpunan sebagai $\mathbb{Z}$-modul yaitu $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$. Menurut proposisi di atas, $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{R}$ bukan gelanggang Bézout walaupun $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{R}$ keduanya daerah Bézout mengingat $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{R}$ bukan lapangan hasil bagi atas $\mathbb{Z}$. Sementara itu, $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$ merupakan gelanggang Bézout karena $\mathbb{Z}$ daerah Bézout dan $\mathbb{Q}$ lapangan hasil bagi atas $\mathbb{Z}$.

Proposisi (Cheniour, 2012)

Misalkan I suatu ideal yang dibangun secara hingga atas gelanggang R. Jika gelanggang R Bézout maka gelanggang faktor R/I juga Bézout.

Pandang $\mathbb{Q}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Jelas gelanggang $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Bézout. Selain itu, mengingat gelanggang $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$ Bézout dan ideal $n\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$ dibangun secara hingga, gelanggang faktor $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}/\, n\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$ juga Bézout.

Modul Bézout

Pada bagian ini akan dijelaskan konsep modul Bézout beserta hasil penelitian mengenai sifat-sifatnya. Hasil utama bagian ini dituliskan dalam **Teorema** dan **Teorema** . Hasil tersebut dapat ditemukan dalam Misri (2016) tetapi tidak terperinci. Kedua teorema tersebut merupakan perbaikan hasil penelitian disertasi yang ditulis setahun sebelumnya (Misri, 2015). Bukti kedua teorema tersebut akan dijelaskan secara rinci pada bagian ini. Sebelum membahas kedua hal tersebut, perhatikan terlebih dahulu pengertian modul Bézout berikut ini.

Definisi (Ali, 2006)

Misalkan R suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan M R-modul. Modul M disebut Bézout jika setiap submodul yang dibangun secara hingganya siklik.

Modul Bézout yang didefinisikan melalui definisi di atas ekuivalen dengan modul yang setiap submodulnya berbentuk $Rm + Rn$ merupakan submodul siklik untuk setiap $m, n \in M$. Sebelum maju pada penyajian contoh modul Bézout, perhatikan terlebih dahulu proposisi berikut ini.

Proposisi (Ali, 2007)

Misalkan M suatu R-modul dan $R_{(+)}M$ idealisasi modul M. Jika idealisasi $R_{(+)}M$ Bézout maka gelanggang R dan modul M keduanya sama-sama Bézout. Kebalikannya *bernilai benar jika modul M dibangun secara hingga dan idealisasi $R_{(+)}M$ homogen.*

Proposisi ini dapat ditemukan di dalam tulisannya Ali (2007) pada teorema 6. Proposisi tersebut dikutip oleh Misri dkk (2016) dan ditulisnya dalam proposisi 1. Dengan memanfaatkan proposisi ini, contoh modul Bézout dapat dibentuk.

Pandang $\mathbb{Q}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Dari penjelasan sebelumnya, diinformasikan bahwa idealisasi $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$ Bézout. Untuk itu, gelanggang $\mathbb{Z}$ dan modul $\mathbb{Q}$, dua-duanya Bézout.

Sebaliknya, Pandang M sebagai ruang vektor berdimensi dua atas lapangan F. Jelas ruang vektor tersebut tidak siklik. Untuk itu, ruang M bukan modul Bézout. Untuk contoh lainnya bisa dilihat pada Misri dkk (Misri, Garminia, & Irawati, 2013).

Sifat – sifat Modul Bézout

Berikut ini kajian sifat-sifat modul Bézout. Sifat yang dibahas di sini berupa sifat submodul dari modul Bézout dan keterkaitannya dengan struktur lain. Struktur yang dikaitkan dengan modul Bézout pada pembahasan kali ini berupa struktur perkalian, faithful, Noether, bebas torsi, dibangun secara hingga, siklik dan CSM.

Lema 1 (Misri, 2015)

Setiap submodul dari modul Bézout juga Bézout.

Bukti. Misalkan N submodul M. Ambil K submodul N yang dibangun secara hingga. Tentu saja K juga submodul M. Mengingat modul M Bézout, submodul K pasti siklik. Akibatnya, submodul N Bézout.

Contoh 4. Setiap ideal lapangan dan daerah ideal utama bersifat Bézout. Pandang $\mathbb{Q}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Semua submodul dari $\mathbb{Q}$, semua ideal atas $\mathbb{Z}$ dan semua ideal atas $\mathbb{Z}_{(+)}\mathbb{Q}$ Bézout.

Sifat selanjutnya terkait dengan struktur modul perkalian dan modul *faithful*, disingkat menjadi modul perkalian *faithful*. Sebelum itu, terlebih dahulu disajikan pembahasan kedua struktur tersebut.

Definisi (Smith, 1988)

Misalkan M suatu R-modul. Modul M disebut modul perkalian jika untuk setiap N submodul dari M terdapat I ideal atas R sehingga memenuhi $N = IM$.

Misalkan N submodul M. Representasi N pada M, ditulis: $[N:M]$, didefinisikan sebagai berikut.

$$[N:M] = \{\, r \in R \mid rM \subseteq N \,\}$$

Representasi N pada M membentuk ideal atas gelanggang R. Ideal $[N:M]$ disebut pula ideal representasi submodul N pada modul M.

Ideal $[N:M]$ pada dasarnya dapat dipandang sebagai himpunan pembuat nol modul M/N. Khususnya, untuk $N = 0$, ideal $[0:M]$ adalah himpunan pembuat nol modul M. Modul yang memenuhi $[0:M] = 0$ disebut modul *faithful*.

Misalkan N submodul dari R-modul perkalian M. Submodul tersebut berbentuk $N = IM$ untuk suatu I ideal atas R. Mengingat $IM \subseteq N$, diperoleh bahwa $I \subseteq [N:M]$. Akibatnya, $N = IM \subseteq [N:M]M \subseteq N$, submodul N dapat ditulis kembali menjadi $N = [N:M]M$.

Pandang himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Mengingat modul $\mathbb{Z}$ siklik, modul ini merupakan modul perkalian dan dapat ditulis menjadi $n\mathbb{Z} = [n\mathbb{Z}:\mathbb{Z}]\mathbb{Z}$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Sementara itu, himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul bukan modul perkalian. Hal ini disebabkan adanya submodul $\mathbb{Z}$ sehingga $[\mathbb{Z}:\mathbb{Q}]\mathbb{Q} = 0 \neq \mathbb{Z}$ mengingat $[\mathbb{Z}:\mathbb{Q}] = \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}\} = 0$.

Pengertian submodul prima dapat dilihat juga dalam Misri (2015) yang merupakan kutipan dari Ali (2001), Khaksari dkk (2004), Tekir (2006), dan Gaur dkk (2007). Contoh submodul prima dapat dijumpai dalam Misri (2015). Sementara pengertian modul Noether dapat di lihat dalam Passman (2004)

Lema 1 (Behboodi & Koohy, 2002)

Jika M suatu R-modul perkalian dan setiap submodul prima dari M merupakan submodul yang dibangun secara hingga, maka modul MNoether.

Lema 2 di atas, dapat ditemukan juga dalam Misri (2010) dan Misri (2015), dikutip dari Gaur dkk (2007).

Misalkan M suatu R-modul dan $g(M)$ menyatakan bilangan asli terkecil sehingga modul M dibangun oleh n buah unsur jika modul M dibangun secara hingga dan ∞ jika tidak dibangun secara hingga. Hasil berikut memberikan estimasi kardinal himpunan pembangun minimal suatu submodul dari modul perkalian, $g(N)$.

Lema 3 (Smith, 1988)

Jika M suatu R-modul perkalian faithful dan N submodul M maka
a. $g(N) \leq g([N: M])\, g(M)$, *dan*
b. $g([N: M]) \leq g(N)\, g(M)$.

Proposisi (Ali, 2006)

Misalkan R daerah integral dan M R-modul perkalian faithful. Modul M Bézout jika dan hanya jika daerah integral R juga Bézout.

Pandang $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Telah disinggung sebelumnya bahwa $\mathbb{Z}$ daerah Bézout. Di sisi lain, ia juga modul perkalian faithful atas dirinya sendiri. Untuk itu, daerah Bézout $\mathbb{Z}$ juga merupakan modul Bézout atas dirinya sendiri.

Perluasan proposisi di atas menghasilkan Teorema 1 dan Teorema 2. Kedua teorema tersebut merupakan puncak kajian pada bagian ini, yang dapat ditemukan dalam Misri dkk (2016).

Teorema 1 (Misri M. A., Garminia, Irawati, & Astuti, 2016)

Misalkan M suatu R-modul faithful. Jika modul M Bézout maka gelanggang R juga Bézout.

Bukti. Pilih $m \in M$ kemudian bentuk pengaitan $f_m: R \to M$ dengan $r \mapsto rm$ untuk setiap $r \in R$. Ambil $r, s \in R$ dengan $r = s$. Pengaitan f_m memenuhi $f_m(r) = rm = sm = f_m(s)$. Akibatnya, pengaitan f_m suatu pemetaan.

Ambil dua unsur $r, s \in R$. Perhatikan bahwa $f_m\,(r + s) = (r + s)\, m = rm + sm = f_m\,(r) + f_m\,(s)$. Sementara itu, $f_m\,(rs) = (rs)\, m = r\,(sm) = r\, f_m\,(s)$. Dengan demikian, pemetaan f_m suatu R-homomorfisma.

Selanjutnya, mengingat modul M *faithful*, yakni: $[0: M] = 0$, diperoleh hasil $Ker\,(f_m) = \{r \in R \mid f_m(r) = 0, m \in M\} = \{r \in R \mid rm = 0, m \in M\} = 0$. Dengan demikian, pemetaan f_m R-homomorfisma satu-satu yang memenuhi $R \cong R/0 \cong f_m\,(R)$.

Terakhir, mengingat $R \cong f_m(R)$ dan $f_m(R) \subseteq M$, menurut Lema 1, R sebagai R-modul merupakan modul Bézout. Dengan kata lain, gelanggang R Bézout. □

Pandang bilangan rasional $\mathbb{Q}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Modul $\mathbb{Q}$ jelas *faithful* mengingat $[0: \mathbb{Q}] = \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Q} = 0\} = 0$. Selain itu, telah dijelaskan pula bahwa Modul $\mathbb{Q}$ Bézout. Menurut Teorema 1, gelanggang $\mathbb{Z}$ juga Bézout. Sebaliknya, pandang jumlah langsung $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Jelas bahwa modul $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *faithful* mengingat $[0: (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})] = \{r \in \mathbb{Z} \mid r(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = 0\} = 0$. Meskipun gelanggang $\mathbb{Z}$ Bézout, ternyata $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ bukanlah modul Bézout. Contoh lainnya terjadi pada ruang vektor berdimensi dua. Mudah untuk menunjukkan ruang vektor itu termasuk modul *faithful*. Mengingat lapangan itu daerah Bézout, tentu saja ruang vektor tersebut bukan modul Bézout.

Misalkan M suatu R-modul dan $0 \neq v \in M$. Unsur v disebut unsur torsi jika $rv = 0$ untuk suatu unsur tak nol $r \in R$. Suatu modul yang tidak memiliki unsur torsi tak nol disebut modul bebas torsi. Setiap modul bebas torsi merupakan modul *faithful*. Untuk itu, diperoleh akibat berikut ini.

Akibat (Misri M. A., Garminia, Irawati, & Astuti, 2016)

Misalkan M suatu R-modul bebas torsi. Jika modul M Bézout maka gelanggang R juga Bézout.

Sifat berikutnya terkait dengan struktur siklik. Pandang $\mathbb{Q}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Pada penjelasan contoh Proposisi (2007), disebutkan bahwa modul $\mathbb{Q}$ Bézout. Seperti diketahui bahwa modul tersebut tidak dibangun secara hingga atas $\mathbb{Z}$. Tentu saja tidak siklik. Dengan demikian, tidak semua modul Bézout bersifat siklik. Begitu juga sebaliknya. Tidak semua modul siklik itu Bézout. Hal tersebut terjadi karena ada modul siklik yang submodulnya tidak siklik meskipun dibangun secara hingga.

Pandang $\mathbb{Z}[x]$ sebagai $\mathbb{Z}[x]$-modul. Modul $\mathbb{Z}[x]$ siklik tetapi ideal $\langle 2, x\rangle$, sebagai submodul $\mathbb{Z}[x]$, tidak siklik. Artinya, modul siklik $\mathbb{Z}[x]$ bukan Bézout. Jadi jelas, tidak semua modul siklik itu Bézout.

Modul yang setiap submodulnya siklik disebut CSM. Jelas semua CSM itu modul siklik. Tetapi tidak semua modul siklik itu CSM. Contohnya $\mathbb{Z}[x]$ sebagai $\mathbb{Z}[x]$-modul. siklik tetapi bukan

CSM. Selain itu, setiap modul CSM itu Bézout. Tetapi tidak semua modul Bézout itu *CSM.*

Berikut ini kaitan modul Bézout, modul dibangun secara hingga, modul siklik, modul Noether dan CSM.

Proposisi (Misri M. A., Garminia, Irawati, & Astuti, 2016)

a. Setiap modul *Bézout yang dibangun secara hingga adalah siklik*
b. Setiap modul *Bézout Noether merupakan CSM.*

Proposisi di atas menunjukkan modul Bézout yang bersifat siklik dan modul Bézout yang bersifat CSM. Untuk modul Bézout yang bersifat CSM diberikan juga oleh proposisi berikut.

Proposisi (Misri M. A., Garminia, Irawati, & Astuti, 2016)

Jika M suatu R-modul perkalian Bézout yang setiap submodul primanya dibangun secara hingga, maka modul M suatu CSM.

Akhirnya sampai pada sifat terakhir, yaitu sifat yang mengaitkan struktur modul Bézout dengan modul siklik dan *faithful*, disajikan dalam Teorema 2. Teorema ini merupakan kebalikan pernyataan Teorema 1.

Teorema 2 (Misri M. A., Garminia, Irawati, & Astuti, 2016)

Misalkan R suatu gelanggang *Bézout dan M R-modul siklik. Modul M Bézout jika modul tersebut faithful*

Bukti. Misalkan R gelanggang Bézout dan M suatu R-modul siklik *faithful*. Untuk itu, modul M merupakan modul perkalian *faithful* yang dibangun secara hingga.

Sekarang ambil N sembarang submodul yang dibangun secara hingga dari M. Mengingat modul M perkalian *faithful* yang dibangun secara hingga serta submodul N dibangun secara hingga dan memenuhi $N = [N: M]M$, menurut Lema 3, ideal $[N: M]$ dibangun secara hingga. Selain itu, mengingat gelanggang R Bézout, ideal $[N: M]$ juga utama. Submodul N dapat ditulis kembali menjadi $N = RaRm = Ram$ untuk suatu $a \in R$ dan $m \in M$. Dengan demikian, submodul N siklik dan mengakibatkan modul M Bézout.

2. **Penerapannya dalam pembentukan karakter kritis dan Kreatif**

Bila ditelaah secara seksama, rangkaian dalam pengungkapan pernyataan Teorema 1 dan 2, ada proses pengungkapan argumen yang disusun secara sistematis. Dengan paduan sifat kritis dan kreatif memunculkan ide dan rancangan tahapan dalam menyusun argumen dalam melakukan pembuktian kedua teorema tersebut. Berdasarkan fakta ini, Penggunaan buku ajar teori gelanggang pada kajian modul Bezout dapat menumbuhkan karakter kritis dan kreatif.

KESIMPULAN DAN SARAN

a. Kesimpulan

Materi gelanggang Bézout digunakan untuk menghantarkan pada materi modul Bézout dan sifat-sifat modul Bézout. Pada materi gelanggang dan modul Bézout dijelaskan konsep dasar dalam mengkaji materi teori gelanggang, seperti: pengertian gelanggang dan modul, sifat dasar gelanggang dan modul, homomorfisma gelanggang dan modul, serta gelanggang dan modul faktor. Pada bagian tersebut diberikan pendalaman materi untuk memberikan wawasan seputar topik penelitian yakni gelanggang dan modul Bézout. Sementara itu, bagian materi sifat-sifat modul Bézout digunakan khusus sebagai pengayaan untuk penanda dan pembeda penguasaan teori gelanggang.

Ada dua teorema dalam materi ini. Teorema pertama menyatakan bahwa semua gelanggang yang menjadi tumpuan modul Bézout faithful merupakan gelanggang Bézout. Sementara itu, teorema kedua menyatakan kebalikannya, yaitu: semua modul siklik faithful yang bertumpu pada gelanggang Bézout merupakan modul Bézout. Untuk menunjukkan kedua teorema tersebut diberikan empat buah lema. Sementara proposisi di sini digunakan untuk memperkaya sifat-sifat modul Bézout selain sifat pada kedua teorema tersebut. Proposisi di sini juga digunakan untuk membantu menjelaskan definisi dalam membentuk contoh.

Selain penguasaan materi yang dimiliki, buku ini juga dapat menumbuhkan karakter kritis dan kreatif yang dapat menghantarkan mahasiswa menjadi matematikawan maupun guru matematika yang kritis dan kreatif yang tidak mudah menerima teori atau konsep baru mana pun sebelum jelas terlebih dahulu kebenarannya.

b. Saran
Penelitian ini hanya membahas struktur Bézout dan idealisasinya. Sementara itu, topik P-Bézout dan idealisasinya tidak hanya terbatas pada struktur Bézout saja. Berdasarkan uraian tersebut, terdapat hal-hal yang dapat dikembangkan untuk keberlanjutan penelitian ini berkaitan dengan materi kajian yaitu struktur P-Bézout secara umum, tidak terbatas hanya pada kajian struktur Bézout saja.

Selain itu, masih ada kemungkinan pengembangan dari sisi lain, yaitu berkaitan alur narasi dan pengembangan karakter yang ingin dicapai dari narasi yang dibentuk. Penyesuaian alur cerita dapat ditata ulang agar struktur P- Bézout dapat dimasukan dalam materi yang telah dibuat ini. Penambahan karakter yang dicapai dapat dijadikan acuan dalam menyusunan pola alur narasi.

DAFTAR PUSTAKA

Ali, M. M. (2001). Finite and infinite collection of multiplication modules. Beitrage zur Algebra und Geometrie, 42(2), 557--573.

Ali, M. M. (2006). Idealization and Theorems of D.D Anderson. Communications in Algebra, 34, 4479-4501.

Ali, M. M. (2006). Invertibility of multiplication modules. New Zealand J. Math, 35(1), 17-29.

Ali, M. M. (2007). Multiplication modules and homogeneous idealization II. BeitrageAlgebra Geom, 48(2), 321-343.

Anderson, D. D. (2000). Some remarks on multiplication ideals II. Comm. Algebra, 28(5), 2577-2583.

Anderson, D. D., & Winders, M. (2009). Idealization of a module. Journal of Commutative Algebra, 1(1), 3-56.

Bakkari, C. (2009). On P-Bézout Rings. Int. J. Algebra, 3(13), 669-673.

Behboodi, M., & Koohy, H. (2002). on minimal prime submodules. Far East J. Math. Sci., 6(1), 83-88.

Cheniour, F. (2012). On Bézout Rings. Int. J. Algebra, 6(32), 1507-1511.

Daepp, U., & Gorkin, P. (2011). Reading, Writing, and Proving: A Closer Look at Mathematics. New York: Springer.

Gaur, A., Kumar, A., & Parkash, A. (2007). Prime submodule in multiplication modules. International Journal of Algebra, 1(8), 375-380.

Khaksari, A., Sharif, H., & Ershad, M. (2004). On prime submodules of multiplication modules. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 17(1), 41-49.

Misri, M. A. (2010). Submodul Prima pada Modul Perkalian (Tesis). Bandung.

Misri, M. A. (2015). Sifat-sifat Modul P-Bezout melalui Idealisasi (Disertasi). Bandung.

Misri, M. A. (2015). Sifat-sifat Modul P-Bézout melalui Idealisasi (Disertasi). Bandung.

Misri, M. A. (2016). Kajian "Modul P-Bézout dan Idealisasinya" untuk Buku Ajar MK Teori Gelanggang Berbasis Riset. Cirebon.

Misri, M. A., Garminia, H., & Irawati. (2013). Generalization of Bézout Modules. Far East J. Math. Sci, 72(1), 131-133.

Misri, M. A., Garminia, H., Irawati, & Astuti, P. (2016). A Note on Bezout Modules. Far East J. Math. Sci., 99(11), 1723-1732.

Passman, D. S. (2004). A course in ring theory. USA: AMS Chelsea Publishing.

Smith, P. F. (1988). Some remarks on multiplication modules. Arch. Math, 50, 223-235.

Tekir, U. (2006). A note on multiplication modules. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 27(1), 103-107.