



Beberapa Metode Pembuktian Teorema Viviani oleh Mahasiswa Calon Guru Matematika

Al Jupri

Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, Indonesia

aljupri@upi.edu

Abstrak

Salah satu teorema penting dalam geometri adalah teorema Viviani. Teorema ini dapat dibuktikan, misalnya, dengan menggunakan konsep luas daerah dan sifat-sifat segitiga sama sisi. Kemampuan membuktikan teorema merupakan kompetensi yang perlu dikuasai oleh calon guru matematika. Oleh karena itu, tujuan penelitian ini adalah untuk menginvestigasi kemampuan mahasiswa calon guru matematika dalam membuktikan teorema Viviani ditinjau dari perspektif teori Van Hiele. Penelitian kualitatif yang dilakukan melalui analisis proses perkuliahan geometri ini melibatkan 80 mahasiswa. Dari hasil analisis data ditemukan tiga cara pembuktian berbeda yang dilakukan mahasiswa dalam membuktikan teorema Viviani. Duacara pembuktian tersebut menggunakan konsep-konsep geometri biasa, dan satu pembuktian lain menggunakan konsep-konsep aljabar. Dapat disimpulkan bahwa, berdasar perspektif teori Van Hiele, mahasiswa telah menggunakan dan mengintegrasikan pengetahuan mereka dalam proses pembuktian yang menandakan tercapainya tingkat berpikir deduktif.

Kata kunci: Calon guru matematika, pembuktian dalam geometri, pendidikan geometri, teorema viviani, teori van hiele

Abstract

Several Methods of Proving Viviani's Theorem by Prospective Mathematics Teacher Students. One of important theorems in geometry is the Viviani's theorem. This theorem can be proved, for instance, by using the concepts of area and an equilateral triangle properties. The ability in proving theorems is a competency that should be mastered by prospective mathematics teachers. Therefore, this study aims to investigate the ability of mathematics education students in proving the Viviani's theorem from the perspective of Van Hiele theory.

This qualitative study, through an analysis of the learning and teaching process in a geometry course, involved 80 students. The results of analysis revealed three different proving methods, posed by students, for Viviani's theorem. Two proofs use geometry concepts, but the other proof uses algebra concepts. As a conclusion, from the Van Hiele theory perspective, the students have used and integrated knowledge in the process of proving which indicate the deductive level of thinking.

Keywords: Geometry education, proof in geometry, prospective mathematics teacher, van hiele theory, viviani's theorem

Pendahuluan

Geometri merupakan salah satu topik esensial dalam pelajaran matematika yang perlu diberikan kepada siswa pada jenjang pendidikan dasar dan menengah (Depdiknas, 2006; Kemendikbud, 2013). Melalui belajar geometri, siswa akan dilatih dalam hal bernalar, berpikir kritis, dan berpikir kreatif (Herskowitz, 1998). Agar hal ini tercapai, maka diperlukan guru matematika yang mampu menyampaikan topik geometri dengan baik. Upaya untuk mencapai hal tersebut adalah dengan menyiapkan guru sebaik mungkin sejak di jenjang pendidikan guru matematika (Jupri & Herman, 2017), khususnya melalui perkuliahan geometri.

Perkuliahan geometri memberi bekal kepada mahasiswa calon guru matematika tidak hanya berupa pengetahuan, tetapi juga kemampuan berpikir secara logis, kritis, dan kreatif (Jupri & Syaodih, 2016). Kemampuan-kemampuan ini, salah satunya, dapat dilatih melalui materi pembuktian teorema-teorema dalam geometri (Jupri, 2017a; 2017b).

Salah satu teorema penting dalam geometri, meski tidak begitu populer, adalah teorema Viviani (Jupri, 2019; Posamentier, 2002). Teorema Viviani berbunyi bahwa:

Jumlah jarak dari suatu titik di dalam daerah suatu segitiga sama sisi ke sisi-sisi segitiga tersebut panjangnya sama dengan garis tinggi segitiga tersebut (Jupri, 2019).

Teorema Viviani dapat dibuktikan dengan, misalnya, menerapkan konsep luas daerah segitiga dan sifat-sifat segitiga sama sisi (Posamentier, 2002). Sementara pada penelitian ini, ditemukan pembuktian teorema Viviani menggunakan konsep aljabar. Penggunaan konsep aljabar merupakan sebuah keunikan dibandingkan dengan penelitian lainnya.

Artikel ini akan disajikan hasil penelitian berdasarkan observasi perkuliahan geometri terhadap mahasiswa calon guru matematika yang membahas topik teorema Viviani. Penelitian ini bertujuan untuk menginvestigasi kemampuan mahasiswa calon guru matematika dalam melakukan pembuktian

teorema dalam geometri. Kerangka teori yang digunakan untuk menganalisis hasil pengamatan tersebut adalah teori Van Hiele salah satu teori khusus yang mengkaji tingkat berpikir geometri khususnya level ketiga yaitu level deduksi formal (Burger & Shaughnessy, 1986; Jupri & Syaodih, 2016).

Landasan Teori

Teori Van Hiele

Kemampuan berpikir dalam geometri, menurut Van Hiele, dapat dikelompokkan ke dalam lima tingkatan (Burger & Shaughnessy, 1986; Jupri & Syaodih, 2016; Van Hiele, 1999). Tingkatan-tingkatan tersebut berjenjang dari yang paling sederhana hingga ke yang paling kompleks. Pada level 0 (visualisasi), tingkat berpikir geometri memiliki ciri bahwa konsep atau obyek geometri baru sebatas dikenal bentuk dan namanya tanpa memperhatikan sifat-sifatnya. Pada level 1 (analisis), tingkat berpikir geometri bercirikan pada kemampuan mengidentifikasi sifat-sifat dari obyek atau konsep geometri, namun hubungan antar sifat tersebut masih dipandang terpisah-pisah. Pada level 2 (abstraksi), tingkat berpikir geometri bercirikan pada kemampuan menemukan hubungan antar sifat-sifat dari konsep atau obyek geometri. Pada level 3 (deduksi), tingkat berpikir geometri bercirikan pada kemampuan dalam membuktikan sifat-sifat obyek atau konsep geometri yang sudah dikenal pada tahap berpikir sebelumnya. Terakhir, pada level 4 (rigor), tingkat berpikir geometri bercirikan kepada kemampuan untuk membandingkan berbagai sistem geometri tanpa menggunakan model-model konkret.

Karakteristik berpikir geometri level 3 (deduksi) pada penelitian ini menjadi alat utama dalam proses analisis karena menyangkut kemampuan melakukan pembuktian sifat atau teorema dalam geometri. Metode pembuktian dalam geometri secara umum sama seperti pada bidang matematika yang lain, seperti bukti langsung, bukti dengan kontradiksi, maupun bukti dengan kontraposisif (Solow, 1990). Namun, pada praktiknya, metode pembuktian dalam geometri dapat dikategorikan menjadi dua: pembuktian dengan menerapkan konsep-konsep yang ada pada geometri sendiri; dan pembuktian yang memanfaatkan konsep dari cabang matematika lain (seperti aljabar ataupun vektor). Proses pembuktian dari kedua metode tersebut dilakukan tentunya dengan menerapkan berbagai konsep geometri yang saling terkait dan berkelindan (Hanna, 2000; Jupri, 2017a).

Metode

Penelitian kualitatif ini dilakukan melalui observasi proses perkuliahan geometri di salah satu universitas di kota Bandung dengan melibatkan 80 mahasiswa calon guru matematika. Observasi yang dilakukan meliputi observasi terhadap langkah-langkah dan proses pembelajaran, serta interaksi pembelajaran yang terjadi antar mahasiswa maupun antara mahasiswa dan dosen.

Pada perkuliahan yang diamati, mula-mula dosen meminta para mahasiswa membuktikan teorema Viviani secara individu, selama 40 menit, dengan cara yang dapat mereka lakukan sesuai pengetahuan geometri yang telah dipelajari. Pengetahuan geometri tersebut, di antaranya, meliputi materi kesejajaran garis, sudut dan sifat-sifatnya, kekongruenan dan kesebangunan segitiga, serta konsep luas daerah. Dengan bekal pengetahuan tersebut mahasiswa diprediksi dapat melakukan pembuktian teorema Viviani dengan benar.

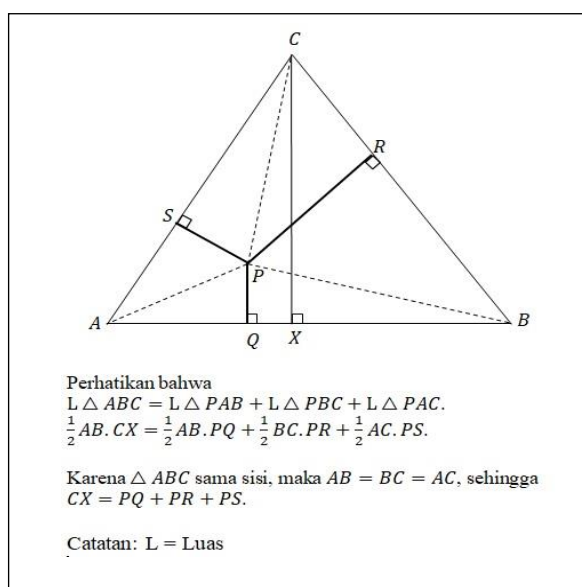
Saat para mahasiswa mengerjakan proses pembuktian, dosen mengawasi mereka dan menjawab pertanyaan saat diperlukan. Setelah itu, dipilih tiga mahasiswa yang berhasil membuktikan teorema Viviani dengan cara berbeda. Satu persatu ketiganya diminta menuliskan dan menjelaskan hasil pembuktiannya. Semua hasil pekerjaan tiga mahasiswa tersebut didokumentasikan.

Hasil pengamatan dan foto dokumentasi dianalisis dengan menggunakan teori Van Hiele, khususnya dalam proses pembuktian teorema. Hasil analisis lalu disajikan, ditelaah, dan diinterpretasikan.

Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan pengamatan proses perkuliahan geometri, maka diperoleh tiga cara berbeda dalam proses pembuktian teorema Viviani yang dilakukan oleh para mahasiswa calon guru matematika. Teorema Viviani yang perlu dibuktikan itu berbunyi "*Jumlah jarak dari suatu titik di dalam daerah segitiga sama sisi ke sisi-sisi segitiga tersebut panjangnya sama dengan garis tinggi segitiga sama sisi tersebut.*" (Jupri, 2019).

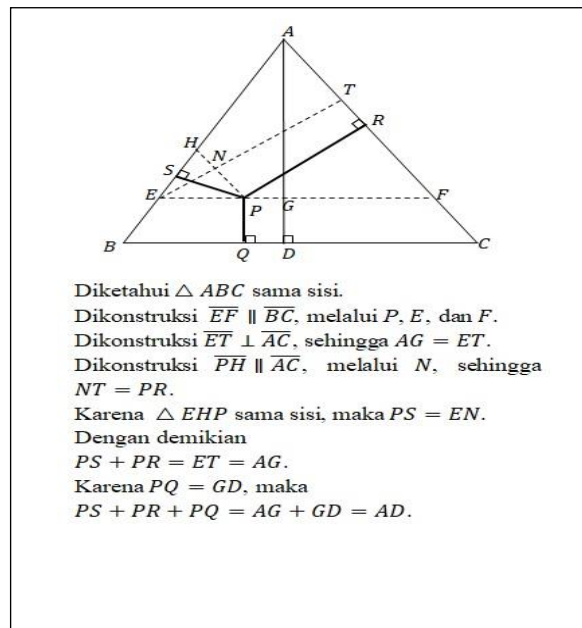
Pembuktian cara pertama yang dilakukan Ani (bukan nama mahasiswa sebenarnya) ditulis ulang dan disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Pembuktian Teorema Viviani Cara I

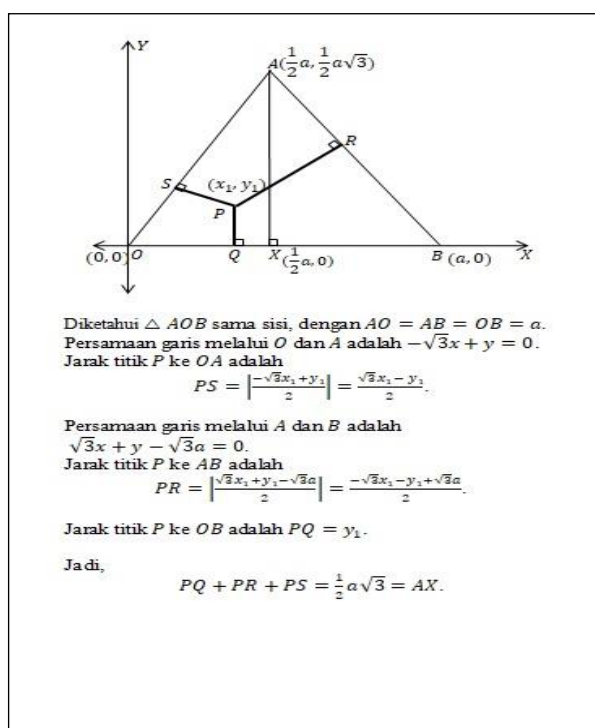
Proses pembuktian yang dilakukan Ani menggunakan konsep luas daerah segitiga dan sifat-sifat segitiga sama sisi. Pembuktian ini sesuai prediksi yang telah dikemukakan sebelumnya dan serupa dengan pembuktian yang ada dalam literatur (Jupri, 2019; Miller, 2012; Posamentier, 2002). Ditinjau dari teori Van Hiele (Burger & Shaugnessy, 1986; Jupri & Syaodih, 2016; Van Hiele, 1999), proses yang dilakukan Ani merupakan wujud dari kemampuan mensintesis berbagai konsep geometri secara terintegrasi dalam proses pembuktian. Hal ini menunjukkan kematangan berpikir deduktif Ani dalam membuktikan suatu sifat atau teorema geometri. Dari pengamatan yang dilakukan, pembuktian dengan cara pertama ini bisa dilakukan oleh sebagian besar mahasiswa (60% total mahasiswa). Sebagian mahasiswa yang lain belum berhasil membuktikan.

Setelah pembuktian cara pertama ditulis dan dijelaskan, dosen kemudian meminta mahasiswa mencari cara pembuktian lain. Dosen menyarankan untuk membaca buku sumber perkuliahan. Dengan sedikit bantuan dosen berupa penjelasan serta proses dan diskusi mengenai konsep kesejajaran garis, akhirnya semua mahasiswa berhasil memahami cara kedua pembuktian teorema Viviani. Cara tersebut menggunakan konsep kesejajaran garis, sifat-sifat segiempat, dan sifat-sifat segitiga sama sisi. Meski bukan hasil temuan mahasiswa secara langsung, dalam kerangka teori Van Hiele, proses memahami pembuktian dan menyajikan kembali pembuktian tersebut dapat dipandang sebagai proses belajar berpikir secara deduktif. Pembuktian cara kedua ini disajikan dan dijelaskan oleh Bella (bukan nama mahasiswa sebenarnya) di depan kelas. Pembuktiannya ditulis ulang pada Gambar 2.



Gambar 2. Pembuktian Teorema Viviani Cara II

Pembuktian cara ketiga hasil dorongan dosen kepada mahasiswa untuk berpikir secara terintegratif antar berbagai konsep matematika, yaitu tidak hanya dengan konsep geometri sendiri tetapi juga disarankan menggunakan konsep cabang matematika lain disajikan oleh Cecep (bukan nama mahasiswa sebenarnya) dengan menggunakan pengetahuan geometri analitik. Cara pembuktian ini menggunakan konsep-konsep aljabar, seperti persamaan garis lurus dan jarak titik terhadap garis. Proses pembuktiannya ditulis ulang secara ringkas dan disajikan pada Gambar 3. Ditinjau dari teori Van Hiele, kemampuan melakukan pembuktian dengan cara aljabar dapat dipandang sebagai kemampuan deduksi formal. Hal ini karena pada pembuktian tersebut dilakukan proses sintesis aneka konsep geometri, seperti sifat segitiga sama sisi dan konsep jarak; serta konsep aljabar, seperti persamaan garis dan jarak titik terhadap garis.



Gambar 3. Pembuktian Teorema Viviani Cara III

Setelah tiga cara berbeda pembuktian teorema Viviani didiskusikan dalam proses pembelajaran seperti uraian di atas, dan mengingat waktu perkuliahan akan segera berakhir, maka dosen menyarankan mahasiswa untuk membaca cara pembuktian lain yang tidak dibahas dalam perkuliahan. Cara pembuktian lain yang disarankan untuk dipelajari, di antaranya, adalah pembuktian secara visual tanpa kata-kata (*proof without words*) yang digagas oleh Kawasaki (2005) dan pembuktian dengan konsep vektor (Samelson, 2003). Selain itu, dosen pun menyarankan mahasiswa untuk mengeksplorasi teorema Viviani dengan menggunakan *software* geometri, khususnya *software GeoGebra*, seperti yang disajikan pada berbagai artikel pendidikan geometri (Jupri, 2018).

Simpulan

Berdasarkan uraian pada bagian sebelumnya, maka diperoleh dua simpulan berikut. Pertama, secara umum mahasiswa calon guru matematika dapat melakukan pembuktian teorema Viviani dengan menerapkan konsep luas daerah dan sifat segitiga sama sisi. Sedangkan dua cara pembuktian lain dapat dipahami dan dilakukan oleh mahasiswa melalui proses bimbingan, diskusi, dan tanya jawab. Cara pembuktian dengan menggunakan konsep aljabar menunjukkan bahwa mahasiswa yang berhasil menemukan cara ini memiliki wawasan yang komprehensif, di mana ia mampu mengintegrasikan aneka konsep geometri dan

aljabar untuk melakukan pembuktian. Fakta-fakta ini menunjukkan bahwa tahap berpikir deduktif, menurut teori Van Hiele, telah mulai dicapai dan dikuasai mahasiswa calon guru matematika. Mengenai pencapaian tahap berpikir deduktif ini, tampaknya, perlu investigasi dan penelitian yang lebih lanjut agar bisa diperoleh kesimpulan yang lebih kokoh dan dapat digeneralisasi.

Kedua, cara dosen dalam membimbing mahasiswa menemukan aneka pembuktian teorema Viviani dapat diteladani untuk diterapkan pada materi-materi geometri yang lain. Dalam hal ini dosen tidak memberi tahu secara langsung, melainkan memberi dorongan agar mahasiswa menemukan dan memahami secara mandiri. Penemuan metode aljabar dan dorongan penggunaan metode vektor untuk membuktikan teorema Viviani menunjukkan bahwa suatu perkuliahan geometri hendaknya tidak terkungkung pada materi perkuliahan yang ada saja, melainkan bisa dikaitkan dengan materi lain yang ada di luar perkuliahan tersebut. Dorongan untuk menggunakan software GeoGebra untuk proses investigasi teorema Viviani patut ditindaklanjuti, baik oleh mahasiswa untuk proses eksplorasi dan penemuan, maupun oleh para peneliti untuk penelitian lebih lanjut dalam bidang pendidikan geometri. Dengan cara ini, pendidikan geometri diharapkan akan berkembang sehingga pada gilirannya proses menyiapkan para calon guru matematika akan lebih baik dan bermutu di masa mendatang.

Daftar Pustaka

- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31–48.
- Depdiknas. (2006). *Kurikulum tingkat satuan pendidikan sekolah menengah pertama*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, 44(1), 5-23.
- Herskowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspective on the teaching of geometry for the 21st century* (hal. 29–36). Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Jupri, A., & Syaodih, E. (2016). Between formal and informal thinking: The use of algebra for solving geometry problems from the perspective of Van Hiele

- theory. *Jurnal Pengajaran Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 21(2), 1-7.
- Jupri, A., & Herman, T. (2017). Theory and practice of mathematics teacher education: An explorative study at the department of mathematics education, Indonesia University of Education. In *Proceedings of International Conference on Mathematics and Science Education*. Atlantis Press.
- Jupri, A. (2017a). From geometry to algebra and vice versa: Realistic mathematics education principles for analyzing geometry tasks. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1830, No. 1, hal. 050001-1-05001-5). AIP Publishing.
- Jupri, A. (2017b). Investigating primary school mathematics teachers' deductive reasoning ability through Varignon's theorem. In *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 895 (2017) 012080.
- Jupri, A. (2018). Peran Teknologi dalam Pembelajaran Matematika dengan Pendekatan Matematika Realistik. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika* (hal. 303-314). Lampung: UIN Raden Intan Lampung.
- Jupri, A. (2019). *Geometri dengan pembuktian dan pemecahan masalah*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Kawasaki, K. I. (2005). Proof without words: Viviani's theorem. *Mathematics Magazine*, 78(3), 213.
- Kemendikbud. (2013). *Kurikulum 2013. Kompetensi Dasar: Sekolah Menengah Pertama (SMP)/Madrasah Tsanawiyah (MTs)*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Miller, R. L. (2012). On proofs without words. *Whitman College, Washington*.
- Posamentier, A. S. (2002). *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*. New York: Key College Publishing.
- Samelson, H. (2003). Proof without words: Viviani's theorem with vectors. *Mathematics magazine*, 76(3), 225.
- Solow, D. (1990). *How to read and do proof*. New York: John Wiley & Sons.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310–316.