JURNAL FOURIER | Oktober 2020, Vol. 9, No. 2, 75-83 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2020.92.75-83 E-ISSN 2541-5239

Nilai Ketakteraturan Total dari Lima *Copy* Graf Bintang

Corry Corazon Marzuki[1], Era Napra Tilopa Sihombing[2], Abdussakir[3], Ade Novia Rahma[4]

[1,2,4]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293, Indonesia.
[3]Program Magister Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, Jl. Gajayana 50, Malang, 65144, Indonesia.

Korespondensi; Corry Corazon Marzuki, Email: corry@uin-suska.ac.id; Era Napra Tilopa Sihombing, Email: erasihombing2701@gmail.com

Abstrak

Misalka $G = (V, E)$ adalah suatu graf dan k adalah suatu bilangan bulat positif. Pelabelan-k total pada G adalah suatu pemetaaan $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Bobot titik t dinyatakan dengan $w_f(t) = f(t) + \sum_{ut \in E(G)} f(ut)$ dan bobot sisi ut dinyatakan dengan $w_f(ut) = f(u) + f(ut) + f(t)$. Suatu pelabelan-$k$ total pada G dikatakan tak teratur total, jika bobot setiap titik berbeda dan bobot setiap sisi berbeda. Nilai k terkecil sehingga suatu graf G memiliki pelabelan-k total tak teratur total disebut nilai ketakteraturan total dari G, dinotasikan dengan $ts(G)$. Pada penelitian ini, ditentukan nilai ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang 5Sn, dengan n adalah bilangan bulat positif dan $n \geq 3$.

Kata Kunci: graf bintang; nilai ketakteraturan total; pelabelan total tak teratur total.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a graph and k is a positive integer, total k-labelling on G is a mapping $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. The weight of the vertex t is defined by $w_f(t) = f(t) + \sum_{ut \in E(G)} f(ut)$ and the weight of the edge ut is defined by $w_f(ut) = f(u) + f(ut) + f(t)$. A total k-labeling of G is called a totally irregular total labeling, if the weight of every two distinct vertices are different and the weight of every two distinct edges are different. The minimum k such that a graph G has a totally irregular total k-labeling of G is called the total irregularity strength of$G$, denoted by $ts(G)$. In this research determined total irregularity strength of five copies of star graph 5Sn, where n is a positive integer and $n \geq 3$.

Keywords: star graph; total irregularity strength; totally irregular total labeling.

Pendahuluan

Teori graf merupakan pokok bahasan yang terus mengalami perkembangan sampai saat ini. Graf merupakan suatu sistem yang terdiri dari suatu himpunan berhingga dan tak kosong dari objek yang disebut titik (*vertex*) dan himpunan pasangan tak terurut dari titik-titik disebut sisi (*edge*). Graf dinotasikan $G = (V, E)$, dengan V merupakan himpunan titik,dan E merupakan himpunan sisi [11].

Teori graf memiliki peran penting dalam kehidupan untuk menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan nyata, salah satunya pelabelan pada graf. Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif atau bilangan bulat tak negatif [9]. Berdasarkan unsur yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*). Jika suatu pelabelan hanya melabeli titik, maka pelabelan semacam ini disebut pelabelan titik. Begitu juga dengan pelabelan sisi hanya melabeli sisi. Jika suatu pelabelan melabeli titik dan sisi, maka pelabelan ini disebut pelabelan total [9].

Pada tahun 2007, Baca, dkk. [3] memperkenalkan pelabelan-k total tak teratur yang mempunyai dua tipe yakni pelabelan-k total tak teratur sisi dan pelabelan-k total tak teratur titik. Misalkan

© 2020 JURNAL FOURIER

diberikan suatu graf $G=(V,E)$, untuk suatu bilangan bulat k, pelabelan-k total tak teratur sisi pada G adalah pemetaan $f:V\cup E\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ yang memenuhi $w_f(uv)=f(u)+f(uv)+f(v)$ berbeda untuk setiap $uv\in E(G)$. Nilai $w_f(uv)$ disebut bobot sisi uv. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur sisi, dinotasikan dengan $tes(G)$, disebut nilai ketakteraturan sisi dari G. Untuk semua bilangan bulat k, pelabelan-k total tak teratur titik pada G adalah pemetaan $f:V\cup E\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ yang memenuhi $w_f(v)=f(v)+\sum_{uv\in E(G)}f(uv)$ berbeda untuk setiap $v\in V(G)$. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur titik, dinotasikan dengan $tvs(G)$, disebut nilai total ketakteraturan titik dari G.

Penelitian mengenai nilai total ketakteraturan titik dan nilai total ketakteraturan sisi ini sudah banyak ditemukan oleh peneliti sebelumnya. Pada tahun 2014, Ahmad., dkk. [1] menemukan nilai total ketakteraturan titik dari graf ladder, yaitu $tvs(DL_n)=\left\lceil\frac{2n+1}{3}\right\rceil$ dan Anjelia, dkk. [2] mendapatkan nilai total ketakteraturan sisi dari graf segitiga bermuda, yaitu $tes\left(Btr_{n,4}\cup Btr_{m,4}\right)=\left\lceil\frac{(30n+15)+(3mn+15)+2}{3}\right\rceil$. Selain itu, Siddiqui, dkk. [18] juga menemukan nilai total ketakteraturan sisi dari gabungan lepas graf matahari. Kemudian pada tahun 2015, Rajasingh, dkk. [14] memperoleh nilai total ketakteraturan sisi dari graf seri parallel, yaitu $tes\left(sp(m,r,l)\right)\geq\left\lceil\frac{lm(r+1)+2}{3}\right\rceil$.

Di samping penelitian mengenai nilai total ketakteraturan titik dan nilai total ketakteraturan sisi yang terus berkembang, pada tahun 2013, Marzuki dkk. [8] mengkombinasikan pelabelan-k total tak teratur sisi dan pelabelan-k total tak teratur titik, sehingga didapatkan suatu pelabelan baru, yaitu pelabelan-k total tak teratur total. Pelabelan-k total tak teratur total pada G adalah pemetaan $f:V\cup E\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ yang memenuhi $w_f(uv)=f(u)+f(uv)+f(v)$ berbeda untuk setiap $uv\in E(G)$ dan $w_f(v)=f(v)+\sum_{uv\in E(G)}f(uv)$ berbeda untuk setiap $v\in V(G)$. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur total disebut nilai ketakteraturan total dari G, yang dinotasikan dengan $ts(G)$.

Penelitian mengenai nilai ketakteraturan total ini juga sudah banyak ditemukan oleh peneliti sebelumnya. Ramdani., dkk. [16] melakukan penelitian dengan hasil diperoleh $ts\left(m(C_n\circ P_2)\right)=mm+1$. Rahangmetan., dkk. [13] melakukan penelitian dengan hasil penelitian diperoleh $ts(mW_n)=\left\lceil\frac{2mn+2}{3}\right\rceil$ dan $ts\left(m(P_1\Theta S_n)\right)=\left\lceil\frac{m(2n+1)+2}{3}\right\rceil$. Kemudian pada tahun 2017 Julaeha, dkk. [7] memperoleh nilai ketakteraturan total pada graf bunga adalah $ts(F_n)=\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$, pada tahun 2018, Nurdin, dkk. [12] memperoleh $tvs(Br_n)=\left\lceil\frac{n+1}{3}\right\rceil$, Marzuki., dkk [10] mendapatkan nilai ketakteraturan total dari p-copy graf theta, yaitu $ts\left(p\theta\left(4,4,(1,0,10)\right)\right)=2p+1$.

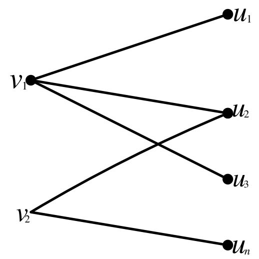
Penelitian ini melanjutkan beberapa penelitian yang sudah dilakukan beberapa peneliti sebelumnya, yaitu Ramdani, dkk. [15] yang memperoleh nilai ketakteraturan total dari 2-copy graf bintang, yaitu $ts(2S_n)=n+1$, kemudian Yuliana [19] pada tahun 2020 melakukan penelitian untuk menentukan nilai ketakteraturan total dari 3-copy graf bintang, yaitu $ts(3S_n)=\left\lceil\frac{3n+1}{2}\right\rceil$, dan pada tahun yang sama Sari [17] juga melakukan penelitian untuk menentukan nilai ketakteraturan total dari 4-copy graf bintang, yaitu $ts(4S_n)=2n+1$. Pada penelitian ini dibahas nilai ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang yang dinotasikan dengan $ts(5S_n)$.

Landasan Teori

Berikut ini diberikan definisi dan teorema yang dibutuhkan dalam menentukan rumus umum nilai ketakteraturan total pada lima *copy* graf bintang untuk $n\geq 3$.

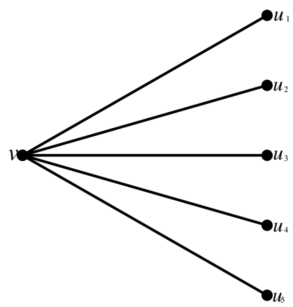
Definisi 1 [4]
Suatu Graf G adalah suatu himpunan berhingga dan tak kosong V yang dinamakan titik bersama himpunan E dari subhimpunan 2-elemen dari V yang dinamakan sisi. Untuk menyatakan suatu graf G memiliki himpunan titik V dan himpunan sisi E, ditulis $G = (V, E)$.

Definisi 2 [9] Suatu graf G disebut graf bipartit jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan X dan Y sedemikian sehingga setiap sisi menghubungkan suatu titik di X kesuatu titik di Y.



Gambar 1. Graf Bipartit.

Definisi 3 [9] Graf bintang dinotasikan dengan S_n, adalah suatu graf bipartit lengkap $K_{1,n}$.



Gambar 2. Graf Bintang $S_5 \approx K_{1,5}$.

Definisi 4 [6] Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik $G_1 \cong G_2$ jika terdapat pemetaan satu-satu $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ sedemikiaan sehingga dua titik v_i dan v_j bertetangga dalam graf G_1 jika dan hanya jika titik $\varphi(v_i)$ dan $\varphi(v_j)$ juga bertetangga dalam graf G_2.

Definisi 5 [5] Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graf yang mempunyai $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika $G_1 \cong G_2 \cong G$ maka dinotasikan dengan $2G$ untuk $G_1 \cup G_2$. Pada umumnya, jika $G_1, G_2, \dots, G_n$ adalah n graf yang isomorfik dengan G, maka $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ dinotasikan dengan nG yang dinamakan *n-copy* graf G.

Pelabelan Graf
Berikut akan dijelaskan tiga jenis pelabelan total tak teratur, yaitu: pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur total.

1. Pelabelan Total Tak Teratur Titik
Pelabelan-k total tak teratur titik pertama kali diperkenalkan oleh Baca dkk [3] dalam paper yang berjudul *On Irreguler Total Labellings*.

Definisi 6 [3]
Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf. Pelabelan $f: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di G memenuhi $w_f(x) \neq w_f(y)$. Nilai $w_f(x)$ merupakan bobot titik x yang dinyatakan sebagai:

$$w_f(x) = f(x) + \sum_{xy \in E} f(xy).$$

Baca dkk [3] juga memberikan batas bawah untuk nilai ketakteraturan titik pada Teorema 1 berikut:
Teorema 1 [3]
Misalkan G adalah graf (p, q), dengan p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya sisi. Jika derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ, maka

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \le tvs(G) \le p + \Delta - 2\delta + 1.$$

Baca dkk [3] juga memperoleh nilai ketakteraturan titik pada graf lengkap yang dinyatakan pada teorema sebagai berikut:
Teorema 2 [3]
Misalkan K_p adalah graf lengkap dengan p titik, maka

$$tvs(K_p) = 2$$

2. Pelabelan Total Tak Teratur Sisi
Pelabelan-k total tak teratur sisi juga diperkenalkan oleh Baca dkk., [3]. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur sisi.

Definisi 7 [3]
Pelabelan-k total dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi dari graf G, jika untuk sebarang dua sisi $e = u_1u_2$ dan $w = v_1v_2$ yang berbeda di graf G berlaku $w_f(e) \neq w_f(w)$ dengan $w_f(e) = f(u_1) + f(e) + f(u_2)$ dan $w_f(w) = f(v_1) + f(w) + f(v_2)$.

Baca, dkk. [3] memberikan nilai batas bawah untuk nilai ketakteraturan sisi pada teorema sebagai berikut:
Teorema 3 [3]
Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Maka

$$\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \le tes(G) \le |E|.$$

Baca dkk [3] juga memperoleh nilai ketakteraturan sisi pada graf lintasan yang dinyatakan pada Teorema 4 sebagai berikut:
Teorema 4 [3]
Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan $n-1$ sisi, dan $n \ge 1$. Maka

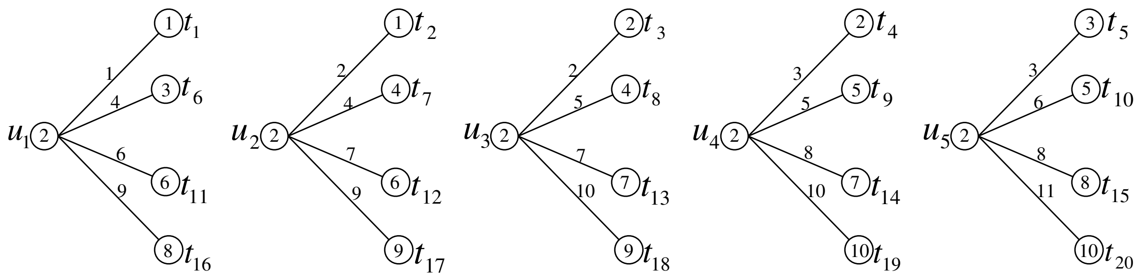
$$tes(P_{n)}) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil.$$

Selain itu, Baca, dkk. juga memperoleh nilai ketakteraturan sisi pada graf lingkaran yang diberikan pada Teorema 5 berikut ini:
Teorema 5 [3]
Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan n sisi, dan $n \ge 3$. Maka

$$tes(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil.$$

3. Pelabelan Total Tak Teratur Total
Pelabelan-k total tak teratur total diperkenalkan oleh Marzuki, dkk. [8] pada tahun 2013. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur total.

Definisi 8 [8]
Pelabelan-k total tak teratur total pada G adalah pemetaan $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ yang memenuhi $w_f(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$ berbeda untuk setiap $uv \in E(G)$ dan $w_f(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Nilai k terkecil sehingga suatu pelabelan graf G dapat dilabeli dengan pelabelan-k total tak teratur total, dinotasikan dengan $ts(G)$, disebut nilai ketakteraturan total dari graf G.
Berikut ini akan disajikan contoh pelabelan-k total ketakteraturan total pada graf $5S_4$.



Gambar 3. Pelabelan-11 Total Tak Teratur Total pada Graf $5S_4$.

Perhatikan bahwa bobot setiap titik pada graf $5S_4$ berbeda dan bobot setiap sisi pada graf $5S_4$ juga berbeda. Oleh karena itu, f adalah pelabelan-11 total tak teratur total pada graf $5S_4$.

Marzuki, dkk. [8] juga memberikan batas bawah dari $ts(G)$ yang dinyatakan pada Teorema 6 berikut:

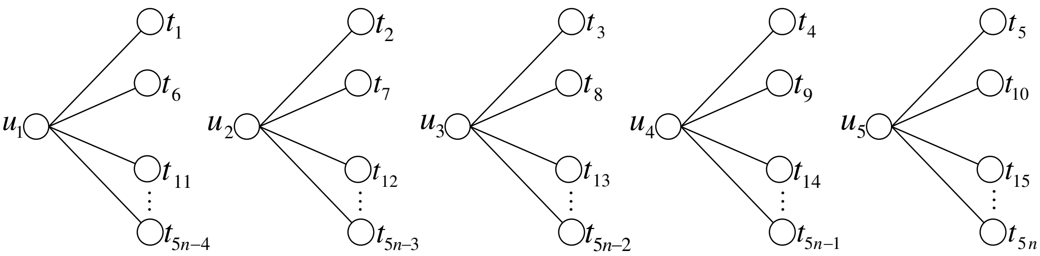
Teorema 6 [8]
Untuk setiap graf G, berlaku $ts(G) \geq max\{tes(G), tvs(G)\}$

Dengan menggunakan definisi dan teorema di atas, akan ditentukan nilai total ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan $5S_n$ adalah lima *copy* graf bintang dengan n bilangan positif dan $n \geq 3$.
2. Menentukan batas bawah $tvs(5S_n)$.
3. Menentukan batas bawah $tes(5S_n)$ menggunakan Teorema 6.
4. Setelah didapatkan langkah 2 dan 3, kemudian ditentukan batas bawah dari $ts(5S_n)$ menggunakan Teorema 10.
5. Menentukan pelabelan total tak teratur total pada lima *copy* graf bintang $5S_n$ untuk $n = 3,4,\ldots,10$ dengan label terbesarnya adalah batas bawah yang diperoleh dari langkah 4.
6. Menentukan rumus untuk label titik dari $5S_n$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang terdapat pada langkah 5.
7. Menentukan rumus untuk label sisi dari $5S_n$ dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada langkah 5.
8. Berdasarkan langkah yang didapat pada langkah 6 dan 7, dapat ditentukan rumus untuk bobot titik dari $5S_n$.
9. Kemudian berdasarkan hasil yang didapat pada langkah 6 dan 7, dapat ditentukan rumus untuk bobot sisi dari $5S_n$.
10. Membuktikan pelabelan yang diperoleh merupakan pelabelan total tak teratur total pada lima *copy* graf bintang $5S_n$ untuk $n \geq 3$, dengan membuktikan tidak ada titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada sisi yang memiliki bobot yang sama.
11. Mengaplikasikan rumus $ts(5S_n)$ yang telah diperoleh untuk $n = 13$.

Hasil dan Pembahasan

Langkah awal yang harus dilakukan adalah pemberian nama pada masing-masing sisi dan titik, hal ini untuk memudahkan dalam merumuskan pelabelan titik, merumuskan pelabelan sisi, merumuskan bobot titik dan merumuskan bobot sisi. Lima *copy* graf bintang dinotasikan dengan $5S_n$ adalah suatu graf dengan himpunan titik $V(5S_n) = \{u_i$ untuk $i = 1,2,3,4,5\} \cup \{t_j$ untuk $j = 1,2,3,\dots,5n\}$ dan himpunan sisi $E(5S_n) = \{u_i t_j$ untuk $i = 1$ dan $j = 1(mod5), i = 2$ dan $j = 2(mod5), i = 3$ dan $j = 3(mod5), i = 4$ dan $j = 4(mod5), i = 5$ dan $j = 0(mod5)$ dimana $j = 1,2,3,\dots,5n\}$. Ilustrasi dari graf $5S_n$ diberikan pada Gambar 4 sebagai berikut:



Gambar 4. Ilustrasi Lima *Copy* Graf Bintang $(5S_n)$.

Langkah selanjutnya menentukan batas bawah nilai ketakteraturan total dari graf $5S_n$ untuk $n \geq 3$, menentukan pelabelan-k total tak teratur total dari graf $5S_n$ untuk $n = 3,4,\dots,10$ dengan menggunakan label terbesar sebesar batas bawah, menentukan rumus pelabelan titik dan sisi dari graf $5S_n$, menentukan rumus bobot titik dan sisi, membuktikan bahwa pelabelan yang dirumuskan merupakan pelabelan total tak teratur total dari graf $(5S_n)$

Setelah melakukan langkah-langkah tersebut, maka diperoleh Teorema 7. Sebagian langkah tersebut tersaji di dalam pembuktian Teorema 7.

Teorema 7

Misalkan $5S_n$ adalah lima *copy* graf bintang, dengan n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$, maka $ts(5S_n) = \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$.

Bukti:

Graf $5S_n$ memiliki $5n$ titik berderajat 1 dan 5 titik berderajat n. Bobot suatu titik berderajat 1 sedikitnya 2, dan bobot terbesar dari suatu titik berderajat 1 sedikitnya $5n + 1$. Bobot titik berderajat 1 adalah penjumlahan dari dua label, maka label terbesar dari titik berderajat 1 setidaknya $\left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$. Bobot terkecil dari suatu titik berderajat n sedikitnya $5n + 2$, dan bobot terbesar dari suatu titik berderajat n sedikitnya $5n + 6$, sehingga label terbesar dari suatu titik berderajat n sedikitnya $\left\lceil \frac{5n+6}{n+1} \right\rceil$. Dengan demikian diperoleh

$$tvs(5S_n) \geq \max\left\{ \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{5n+6}{n+1} \right\rceil \right\} = \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil \quad (1)$$

Selain itu, banyaknya sisi dari $5S_n$ adalah $5n$, sehingga berdasakan Teorema 3, diperoleh

$$tes(5S_n) \geq \left\lceil \frac{5n+2}{3} \right\rceil \quad (2)$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 6, diperoleh

$$ts(5S_n) \geq \max\left\{ \left\lceil \frac{5n+2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil \right\} = \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil \quad (3)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $ts(5S_n) \leq \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$. Hal ini akan dibuktikan dengan menunjukkan adanya pelabelan-$\left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$ total tak teratur total pada graf $5S_n$, untuk n bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$.

Berikut didefinisikan pelabelan total f pada graf $5S_n$ sebagai berikut:

a. Pelabelan titik dari graf $5S_n$ sebagai berikut:

$$f(u_i)=\begin{cases}6 & untuk\ i=1,2,3,4,5\ dan\quad n=3\\ 2 & untuk\ i=1,2,3,4,5\ dan\quad n=4\\ 1 & untuk\ i=1,2,3,4,5\ dan\quad n\geq 5\end{cases}$$

$$f(t_j)=\left\lceil \frac{j}{2}\right\rceil \text{ untuk } \quad j=1,2,3,\cdots,5n$$

b. Pelabelan sisi dari graf $5S_n$ sebagai berikut:

$f(u_it_j)=\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+1$ untuk $i=1$ dan $j=1(mod5)$, $i=2$ dan $j=2(mod5)$, $i=3$ dan $j=3(mod5)$, $i=4$ dan $j=4(mod5)$, $i=1$ dan $j=0(mod5)$, dimana $j=1,2,3,\dots,5n$

Perhatikan bahwa fungsi f adalah suatu pemetaan dari $V(5S_n)\cup E(5S_n)$ ke $\left\{1,2,\dots,\left\lceil\frac{5n+1}{2}\right\rceil\right\}$. Bobot titik dan bobot sisi pada graf $5S_n$:

i Untuk $n=3$, bobot titik t_j dengan $j=1,2,3,\dots,15$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari 2 sampai 16. Sedangkan bobot titik u_i dengan $i=1,2,3,4,5$ adalah 17,19,20,22,23. Jadi tidak ada bobot titik yang sama. Untuk bobot sisi u_it_j dengan $i=1$ dan $j=1(mod5)$, $i=2$ dan $j=2(mod5)$, $i=3$ dan $j=3(mod5)$, $i=4$ dan $j=4(mod5)$, $i=5$ dan $j=0(mod5)$ dimana $j=1,2,3,\dots,15$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari 8 sampai 22. Jadi tidak ada bobot sisi yang sama.

ii Untuk $n=4$, bobot titik t_j dengan $j=1,2,3,\dots,20$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari 2 sampai 21. Sedangkan bobot titik u_i dengan $i=1,2,3,4,5$ adalah 22,24,26,28,30. Jadi tidak ada bobot titik yang sama. Untuk bobot sisi u_it_j dengan $i=1$ dan $j=1(mod5)$, $i=2$ dan $j=2(mod5)$, $i=3$ dan $j=3(mod5)$, $i=4$ dan $j=4(mod5)$, $i=5$ dan $j=0(mod5)$ dimana $j=1,2,3,\dots,20$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari 4 sampai 23. Jadi tidak ada bobot sisi yang sama.

iii Berdasarkan rumus pelabelan f, diperoleh rumus untuk bobot setiap titik dan rumus setiap sisi pada graf $5S_n$ untuk $n\geq 5$ sebagai berikut:

1. Rumus bobot titik pada graf $5S_n$ untuk $n\geq 5$ sebagai berikut:

$$w_f(u_1)=\begin{cases}\dfrac{5n^2+3}{4} & untuk\ n\ ganjil\\[2mm] \dfrac{5n^2+4}{4} & untuk\ n\ genap\end{cases}$$

$$w_f(u_2)=\begin{cases}\dfrac{5n^2+2n+5}{4} & untuk\ n\ ganjil\\[2mm] \dfrac{5n^2+2n+4}{4} & untuk\ n\ genap\end{cases}$$

$$w_f(u_3)=\begin{cases}\dfrac{5n^2+4n+3}{4} & untuk\ n\ ganjil\\[2mm] \dfrac{5n^2+4n+4}{4} & untuk\ n\ genap\end{cases}$$

$$w_f(u_4) = \begin{cases} \dfrac{5n^2+6n+5}{4} & untuk\ n\ ganjil \\ \dfrac{5n^2+6n+4}{4} & untuk\ n\ genap \end{cases}$$

$$w_f(u_5) = \begin{cases} \dfrac{5n^2+8n+3}{4} & untuk\ n\ ganjil \\ \dfrac{5n^2+8n+4}{4} & untuk\ n\ genap \end{cases}$$

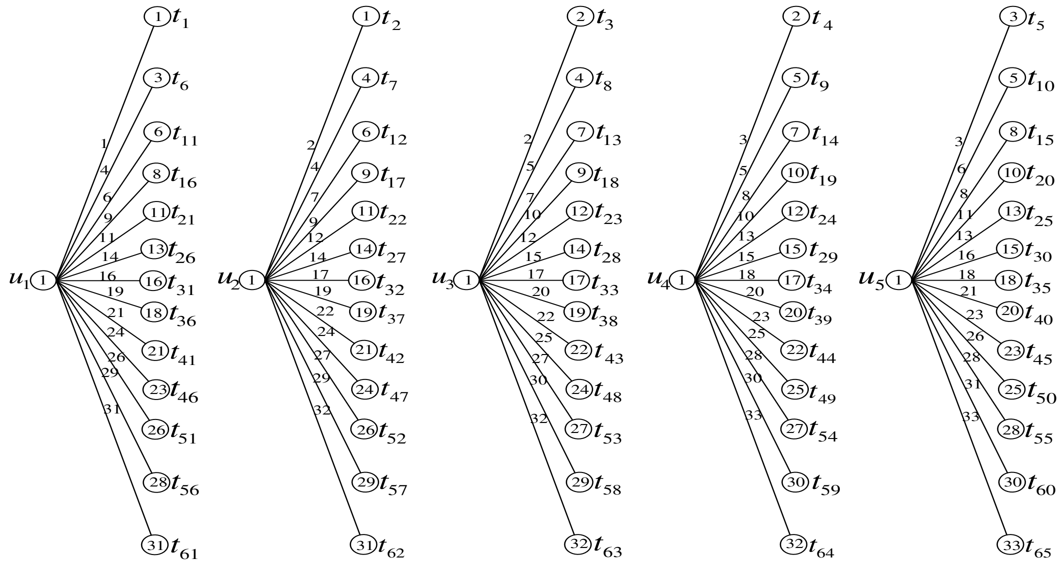
$$w_f(t_j) = j+1 \text{ untuk } j = 1,2,3,\cdots,5n$$

2. Rumus bobot sisi pada graf $5S_n$ sebagai berikut:
   $w_f(u_it_j) = j+2$ untuk $i=1$ dan $j = 1(mod 5)$, $i=2$ dan $j=2(mod5)$, $i=3$ dan $j = 3(mod5)$, $i=4$ dan $j=4(mod5)$, $i=5$ dan $j=0(mod5)$, dimana $j=1,2,3,\dots,5n$

Perhatikan bahwa untuk $n \geq 5$, bobot titik t_j yang dinotasikan dengan $w_f(t_j)$ dengan $j = 1,2,3,\dots,5n$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari $2,3,\dots 5n+1$. Sedangkan bobot titik u_i dengan $i=1,2,3,4,5$ yang dinotasikan dengan $w_f(u_1)$ adalah $\frac{5n^2+3}{4}$ untuk n ganjil dan $\frac{5n^2+4}{4}$ untuk n genap, $w_f(u_2)$ adalah $\frac{5n^2+2n+5}{4}$ untuk n ganjil dan $\frac{5n^2+2n+4}{4}$ untuk n genap, $w_f(u_3)$ adalah $\frac{5n^2+4n+3}{4}$ untuk n ganjil dan $\frac{5n^2+4n+4}{4}$ untuk n genap, $w_f(u_4)$ adalah $\frac{5n^2+6n+5}{4}$ untuk n ganjil dan $\frac{5n^2+6n+4}{4}$ untuk n genap, dan $w_f(u_5)$ adalah $\frac{5n^2+8n+3}{4}$ untuk n ganjil dan $\frac{5n^2+8n+4}{4}$ untuk n genap. Sedangkan bobot sisi u_it_j yang dinotasikan dengan $w_f(u_it_j)$ dengan $i=1$ dan $j=1(mod5)$, $i=2$ dan $j=2(mod5)$, $i=3$ dan $j=3(mod5)$, $i=4$ dan $j=4(mod5)$, $i=5$ dan $j=0(mod5)$ dimana $j=1,2,3,\dots,5n$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari $3,4,\dots,5n+2$.

Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik pada graf $5S_n$ dengan pelabelan total tersebut memiliki bobot yang berbeda dan setiap sisi pada graf $5S_n$ dengan pelabelan total tersebut juga memiliki bobot yang berbeda. Terbukti bahwa $ts(5S_n) \leq \left\lceil\frac{5n+1}{2}\right\rceil$. Berdasarkan uraian diatas diperoleh bahwa $ts(5S_n) \geq \left\lceil\frac{5n+1}{2}\right\rceil$ dan $ts(5S_n) \leq \left\lceil\frac{5n+1}{2}\right\rceil$. Jadi terbukti bahwa $ts(5S_n) = \left\lceil\frac{5n+1}{2}\right\rceil$.

Sebagai ilustrasi dari teorema diatas, diberikan contoh aplikasi pelabelan total tak teratur total pada graf $5S_n$ untuk $n=13$ dengan $ts(5S_{13}) = \left\lceil\frac{5(13)+1}{2}\right\rceil = 33$.



Gambar 5. Pelabelan-33 Total Tak Teratur Total pada Graf $5S_{13}$.

Perhatikan bahwa setiap bobot titik pada graf $5S_{13}$ berbeda dan setiap bobot sisi pada graf $5S_{13}$ berbeda. Oleh karena itu, f adalah pelabelan-33 total tak teratur total pada graf $5S_{13}$.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diatas tentang nilai ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang, diperoleh bahwa $ts(5S_n) = \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$ dengan $n \geq 3$. Hal ini telah dibuktikan dengan $ts(5S_n) \geq \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$ dan $ts(5S_n) \leq \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$. Untuk $ts(5S_n) \leq \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$ dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan-$\left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$ total tak teratur total pada graf $5S_n$.

Referensi

[1] **Ahmad**, **A.**, **Bukhary**, **S. H.**, **Hasni**, **R.**, dan **Slamin**. 2014. Total Vertex Irregularity Strength Of Ladder Related Graphs. *Science International (Lahore)*. Vol. 26, No. 3: halaman 1-5.

[2] **Anjelia**, **N.**, **Slamin**, dan **Dafik**. 2014. Nilai Ketakteraturan Total Sisi Dari Graf Segitiga Bermuda. *Jurnal Ilmu Dasar*. Vol. 5, No. 3: halaman 157-166.

[3] **Baca**, **M.**, **Jendrol J.**, **Miller**, **M.**, dan **Ryan**, **J**. 2007. On Irregular Total Labellings. *Discrete Math*. Vol. 307: halaman 1378-1388.

[4] **Chartrand G.**, **Lesniak L.**, **Zhang P.**, *Graphs and Digraphs* 5th edition, CRC Press. New York. 2011.

[5] **Chartrand**, **Gary** and **O. R. Oellermann**. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory*. McGraw-Hill Inc, New York.

[6] **Chartrand**, **Gary**. (1986). *Introductory Graph Theory*. Dover Publications Inc, New York.

[7] **Julaeha**, **Siti**, **Luspitasari**, **I.**, dan **Sukaesih**, **E**. 2017. Pelabelan Total Tak Teratur Total pada Graf Bunga (F_n). *J. Istek*. Vol. X, No. 1: halaman 6.

[8] **Marzuki**, **C. C.**, **Salman**, **A. N. M.**, dan **Miller**, **M**. 2013. On The Total Irregularity Strenght of Cycles and Paths. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. Vol.82: halaman 1-21.

[9] **Marzuki**, **C. C.**, **Riyanti**, **R**. 2016. Nilai Ketakteraturan Total dari Graf Hasil Kali Comb P_m dan C_5 dengan m Bilangan Ganjil. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. Vol. 2, No. 2: halaman 39-47.

[10] **Marzuki**, **C. C.**, **Handayani**, **S.**, **Aryani**, **F.**, dan **Abdussakir**. 2018. Nilai Ketakteraturan Total dari p-copy Graf Theta Tak Seragam. *Jurnal Seminar Nasional Teknologi Informasi*: halaman 734-740.

[11] **Munir**, **R**. 2005. *Matematika Diskrit*. Revisi kelima. Bandung, Informatika.

[12] **Nurdin**, **Salman**, **A. N. M.**, **Gaos**, **N. N.**, dan **Baskoro**. 2018. On Irregularity Strength of Diamond Network. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, Vol. 15: halaman 291-297.

[13] **Rahangmetan**, **R. D. S.**, **Tilukay**, **M. I.**, **Rumlawang**, **F. Y.**, dan **Talakua**, **M. W**. 2015. Nilai Total Tak Teratur Total dari Gabungan Terpisah Graf Roda dan Graf Buku Segitiga. *Jurnal Ilmu Matematika*, Vol. 9, No. 2: halaman 97-102.

[14] **Rajasingh**, **I.**, **S. Teresa Arockiamary**. 2015. Total Edge Irregularity Strength of Series Parallel Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematic*. Vol. 99, No. 1: halaman 11-21.

[15] **Ramdani**, **R**. 2014. Nilai Total Ketakteraturan Total Dari Dua *Copy* Graf Bintang. *J. Math. Fund. Sci*. Vol 8, No. 2: halaman 4.

[16] **Ramdani**, **R.**, **Salman**, **A. N. M.**, dan **Assiyatun**, **H**. 2015. On The Total Irregularity Strength of Regular Graph. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, Vol. 47, N0.3: halaman 281-295.

[17] **Sari**, **Yusnita**. 2020. Nilai Ketakteraturan Total Dari Empat *Copy* Graf Bintang. Skripsi. Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru.

[18] **Siddiqui**, **M. K.**, **Ahmad**, **A.**, **Nadeem**, **M. F.**, dan **Bashir**. 2013. Total Edge Irregularity Strength of the Disjoint Union of Sun Graphs: *International Journal of Matematics and Soft Computing*. Vol. 3: pp. 21-27.

[19] **Yuliana**. 2020. Nilai Ketakteraturan Total dari Tiga *Copy* Graf Bintang. Skripsi. Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru.

THIS PAGE INTENTIONALLY LEFT BLANK