JURNAL FOURIER | April 2020, Vol. 9, No. 1, 19-23 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2020.91.19-23 E-ISSN 2541-5239

Karakteristik Subsemiring *Fuzzy*

Saman Abdurrahman

Program Studi Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat, Jl. A. Yani Km 36 Banjarbaru Kalimantan Selatan 70714, Indonesia.

Korespondensi; Saman Abdurrahman, Email: saman@ulm.ac.id

Abstrak

Dalam tulisan ini, didefinisikan subsemiring fuzzy dan menyelidiki sifat yang terkait. Selain itu, diperkenalkan konsep subsemiring yang diinduksi dari level subset. Akhirnya, karakteristik subsemiring fuzzy diperoleh.

Kata Kunci: Semiring; subsemiring; subset *fuzzy*; level subset, subsemiring *fuzzy*.

Abstract

In this paper, we define the notion of fuzzy subsemiring and investigate the related properties. Moreover, we introduce the idea of a subsemiring induced from the level subset. Finally, a characterization of a fuzzy subsemiring is obtained.

Keywords: Semiring; subsemiring; *fuzzy* subset; level subset; *fuzzy* subsemiring.

Pendahuluan

Konsep subgrup *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Rosenfeld [1]. Konsep ini, merupakan perpaduan antara konsep teori grup dan himpunan *fuzzy* yang diperkenalkan oleh Zadeh [2]. Konsep subgrup *fuzzy*, merupakan konsep dasar dari aljabar *fuzzy* yang dijadikan oleh peneliti selanjutnya sebagai pondasi dalam membangun dan menyelidiki sifat dari struktur aljabar *fuzzy* lainnya, diantaranya: interior semiring *fuzzy* diperkenalkan oleh Mandal [3]; dan konsep interior subgrup fuzzy yang dikaitkan dengan homomorfisma grup diperkenalkan oleh Abdurrahman [4]; dan konsep ideal fuzzy pada gamma near-ring diperkenalkan oleh Jun at al [5].

Pada tulisan ini, akan menyelidiki sifat-sifat dasar dari subsemiring fuzzy yang dibangun oleh level subset ataupun subset dari semiring yang dikaitan dengan nilai keanggotaan elemen nol pada operasi pertama. Sifat-sifat subsemiring fuzzy yang diselidiki, diinduksi dari penelitian Abdurrahman [6] dan Jun at al [5].

Landasan Teori

Semiring merupakan salah satu perluasan dari ring. Menurut Ahsan at al [7], suatu himpunan $S(\neq \emptyset)$ dikatakan membentuk semiring, jika pada S didefinisikan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ sedemikian sehingga $(S,+)$ adalah semigrup abelian, dan $(S,\ \cdot)$ adalah semigrup (tidak harus komutatif), serta dipenuhi sifat distributif kiri dan kanan, yaitu:

$$b(a+c)=ba+bc, \text{ dan } (b+c)a=ba+ca.$$

untuk setiap $a,b,c \in S.$ Jika semigrup $(S,\ \cdot)$ memuat elemen identitas 0, maka elemen identitas ini disebut elemen nol pada semiring $(S,+,\ \cdot)$ sedemikian sehingga untuk setiap $c \in S$ berlaku:

$$c+0=0+c=c \text{ dan } c\cdot 0=0\cdot c=0.$$

Seperti pada ring terdapat subring, pada semiring juga terdapat subsemiring seperti yang didefinisikan oleh Jagatap [8]. Subset $K(\neq \emptyset)$ dari semiring S disebut subsemiring dari S, jika

$$b + c \in K \text{ dan } bc \in K$$

untuk setiap $b, c \in S$.

Definisi 2.1 [9] *Subset fuzzy ρ dari himpunan tidak kosong S adalah fungsi dari S ke interval tutup* $[0,1]$.

Definisi 2.2 [9] *Misalkan ρ adalah subset fuzzy dari S dan $a \in [0,1]$ sedemikian sehingga*

$$\rho_a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in S | \rho(x) \geq a\}.$$

Himpunan ρ_a disebut level subset dari ρ.

Definisi 2.3 [7] *Subset fuzzy ρ dari semiring S disebut subsemiring fuzzy dari S jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku*

$$\rho(a+b) \geq \rho(a) \wedge \rho(b) \text{ dan } \rho(ab) \geq \rho(a) \wedge \rho(b).$$

Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1 *Misalkan S adalah semiring yang memuat elemen 0 dan ρ adalah subsemiring fuzzy dari semiring S. Jika $\rho(0) \geq \rho(w)$ untuk setiap $w \in S$, maka himpunan*

$$S_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in S \mid \rho(z) = \rho(0)\}$$

adalah subsemiring dari S.

Bukti:

Misalkan S adalah semiring yang memuat elemen 0 dan ρ adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S, maka berdasarkan definisi S_ρ, diperoleh $S_\rho \subseteq S$ dan $\rho(0) = \rho(0)$, sehingga $0 \in S_\rho$, yaitu $S_\rho \neq \emptyset$. Selanjutnya, diambil sembarang $x, w \in S_\rho$, maka $\rho(x) = \rho(0)$ dan $\rho(w) = \rho(0)$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.3 diperoleh

$$\rho(x+w) \geq \rho(x) \wedge \rho(w) = \rho(0) \text{ dan } \rho(ab) \geq \rho(a) \wedge \rho(b) = \rho(0).$$

Oleh karena itu,

$$x + w \in S_\rho \text{ dan } xw \in S_\rho.$$

Dengan kata lain, S_ρ adalah subsemiring dari S.

Teorema 3.2 *Misalkan R adalah subset tidak kosong dari semiring S dan ρ_R subset fuzzy dari S yang didefinisikan dengan*

$$\rho_R(x) = \begin{cases} a, & x \in R \\ b, & x \in S \backslash R \end{cases}$$

untuk setiap $x \in S$ dan $a, c \in [0,1]$ dengan $a > b$, maka ρ_R adalah subsemiring fuzzy dari S jika dan hanya jika R adalah subsemiring dari S.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diambil sembarang $x, w \in R$, maka $\rho_R(x) = a$ dan $\rho_R(w) = a$. Karena ρ_R adalah subsemiring *fuzzy* dari S dan $R \subseteq S$, diperoleh

$$\rho_R(x+w) \geq \rho_R(x) \wedge \rho_R(w) = a \text{ dan } \rho_R(xw) \geq \rho_R(x) \wedge \rho_R(w) = a.$$

Oleh karena itu, $x + w \in R$ dan $xw \in R$. Dengan kata lain R adalah subsemiring dari S.

($\Leftarrow$) Misalkan R adalah subsemiring dari S dan ρ_R subset *fuzzy* dari S. Diambil sembarang $x, w \in S$, maka dapat ditinjau untuk beberapa kasus, yaitu:

1) $x, w \in S \backslash R$, maka $\rho_R(x) = b$ dan $\rho_R(w) = b$, yang mengakibatkan

$$\rho_R(x+w) \geq b = \rho_R(x) \wedge \rho_R(w) \text{ dan } \rho_R(xw) \geq b = \rho_R(x) \wedge \rho_R(w).$$

2) $x \in R$ dan $w \in S \backslash R$, maka $\rho(x) = a$ dan $\rho(w) = b$, yang mengakibatkan
$$\rho_R(x+w) \geq b = \rho_R(x) \wedge \rho_R(w) \text{ dan } \rho_R(xw) \geq b = \rho_R(x) \wedge \rho_R(w).$$
3) $x, w \in R$, maka $x + w \in R$ dan $xw \in R$, sehingga $\rho_R(x) = a$, $\rho_R(w) = a$, $\rho_R(x+w) = a$ dan $\rho_R(xw) = a$, yang mengakibatkan
$$\rho_R(x+w) = a = \rho_R(x) \wedge \rho_R(w) \text{ dan } \rho_R(xw) = a = \rho_R(x) \wedge \rho_R(w).$$

Berdasarkan hasil analisa di atas, untuk setiap $x, w \in S$ berlaku
$$\rho_R(x+w) \geq \rho(x) \wedge \rho(w) \text{ dan } \rho_R(xw) \geq \rho(x) \wedge \rho(w).$$
Dengan kata lain, ρ_R adalah subsemiring *fuzzy dari S.*

Akibat 3.3 *Misalkan $R(\neq \emptyset)$ adalah subset dari semiring R dan χ_R adalah fungsi karakteristik dari R, maka χ_R adalah subsemiring fuzzy dari S jika dan hanya jika R adalah subsemiring dari S.*

Teorema 3.4 *Subset fuzzy ρ dari semiring S adalah subsemiring fuzzy dari S jika dan hanya level subset $\rho_a(\neq \emptyset)$ adalah subsemiring dari S, untuk setiap $a \in \rho(S)$.*

Bukti:
($\Rightarrow$) Misalkan ρ adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring S. Akan dibuktikan subset tidak kosong ρ_a dari S adalah subsemiring dari S, untuk setiap $a \in \rho(S)$. Diambil sembarang $x, z \in \rho_a$, maka $\rho(x) \geq a$ dan $\rho(z) \geq a$. Karena ρ adalah subsemiring *fuzzy* dari S dan ρ_a subset dari S, maka $x, z \in S$, sehingga berdasarkan Definisi 6, diperoleh kondisi berikut ini.
$$\rho(x+z) \geq \rho(x) \wedge \rho(z) \geq a \text{ dan } \rho(xz) \geq \rho(x) \wedge \rho(z) \geq a.$$
Oleh karena itu,
$$x + z \in \rho_a \text{ dan } xz \in \rho_a.$$
Berdasarkan hasil Analisa di atas, ρ_a adalah subsemiring dari S untuk setiap $a \in \rho(S)$.
($\Leftarrow$) Misalkan ρ_a adalah subsemiring dari S, untuk setiap $a \in \rho(S)$ dan ρ *subset fuzzy* dari *S.* Akan dibuktikan ρ adalah subsemiring *fuzzy* dari *S.* Diambil sembarang $z, w \in S$, maka ada $a, c \in \rho(S)$ sedemikian sehingga $\rho(z) = a$ dan $\rho(w) = c$. Misalkan $d = a \wedge c$, maka $\rho(z) \geq d$ dan $\rho(w) \geq d$, yang mengakibatkan $z, w \in \rho_d$. Mengingat untuk setiap $a \in \rho(S)$, ρ_a adalah subsemiring dari S, maka diperoleh kondisi $z + w \in \rho_d$ dan $zw \in \rho_d$. Oleh karena itu,
$$\rho(z+w) \geq d = a \wedge c = \rho(z) \wedge \rho(w) \text{ dan } \rho(zw) \geq d = a \wedge c = \rho(z) \wedge \rho(w).$$
Dengan kata lain, ρ adalah subsemiring *fuzzy* dari *S.*

Teorema 3.5 *Misalkan R adalah subsemiring dari semiring S, maka untuk setiap $a \in (0,1)$, terdapat subsemiring fuzzy ρ dari S sedemikian sehingga $\rho_a = R$.*

Bukti:
Misalkan $\rho: S \longrightarrow [0,1]$ adalah subsemiring fuzzy dari S yang didefinisikan oleh
$$\rho(x) = \begin{cases} a, & x \in R \\ 0, & x \in S \backslash R \end{cases}$$
dengan $a \in (0,1)$. Oleh karena itu, berdasarkan fungsi keanggotaan ρ diperoleh:
$$\rho_a = \{x \in S \mid \rho(x) \geq a\} = \{x \in S \mid x \in R\} = R.$$
Selanjutnya, andaikan ada $x_0, w_0 \in S$ sedemikian sehingga dipenuhi kondisi
$$\rho(x_0 + w_0) < \rho(x_0) \wedge \rho(w_0) \text{ dan } \rho(x_0 w_0) < \rho(x_0) \wedge \rho(w_0).$$
Karena $|\rho(S)| = 2$, maka
$$\rho(x_0 + w_0) = 0 \text{ dan } \rho(x_0) \wedge \rho(w_0) = a$$
dan
$$\rho(x_0 w_0) = 0 \text{ dan } \rho(x_0) \wedge \rho(w_0) = a$$
Akibatnya,
$$x_0 + w_0 \notin R \text{ dan } x_0 w_0 \notin R \text{ tetapi } \rho(x_0) = \rho(w_0) = a, \text{ yaitu } x_0, w_0 \in R.$$

Kondisi, $x_0 + w_0 \notin R$ dan $x_0 w_0 \notin R$ tetapi $x_0, w_0 \in R$, kontradiksi dengan R adalah subsemiring dari S, sehingga pengandaian salah, seharusnya untuk setiap $x, w \in S$ berlaku:

$$\rho(x+y) \geq \rho(x) \wedge \rho(w) \text{ dan } \rho(xy) \geq \rho(x) \wedge \rho(w).$$

Dengan kata lain, ρ adalah subsemiring *fuzzy* dari S.

Teorema 3.6 *Misalkan ρ adalah subsemiring fuzzy dari semiring S, maka*

$$\rho(z) = \sup\{a \in [0,1] \mid z \in \rho_a\}$$

untuk setiap $z \in S$.

Bukti:

Misalkan $c \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{a \in [0,1] \mid z \in \rho_a\}$, maka untuk sembarang $\epsilon > 0$, $c - \epsilon < a$ untuk suatu $a \in [0,1]$ sedemikian sehingga $z \in \rho_a$ dan mengakibatkan $c - \epsilon < \rho(z)$. Karena ϵ adalah bilangan positif sembarang, maka dipenuhi kondisi $c \leq \rho(z)$. Selanjutnya, dimisalkan $\rho(z) = d$ maka

$$z \in \rho_d \text{ dan } d \in \{a \in [0,1] \mid z \in \rho_a\}.$$

Oleh karena itu,

$$\rho(z) = d \leq \sup\{a \in [0,1] \mid z \in \rho_a\} = c.$$

Berdasarkan hasil analisa di atas,

$$\rho(z) = \sup\{a \in [0,1] \mid z \in \rho_a\}.$$

Berikut disajikan konvers dari Teorema 3.6. Misalkan Ω adalah subset tidak kosong dari $[0,1]$

Teorema 3.7 *Misalkan S adalah semiring dan $\{\delta_a \mid a \in \Omega\}$ adalah koleksi subsemiring dari S sedemikian sehingga*

1) $S = \bigcup_{a \in \Omega} \delta_a$,
2) $a > c$, *untuk setiap* $a, c \in \Omega$ *jika dan hanya jika* $\delta_a \subset \delta_c$

Didefinisikan subset fuzzy ρ dari S, untuk setiap $z \in S$,

$$\rho(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{a \in \Omega \mid z \in \delta_a\}$$

maka ρ adalah subsemiring fuzzy dari S.

Bukti:

Untuk setiap $c \in [0,1]$, akan ditinjau dua kasus berikut

1) $c = \sup\{a \in \Omega \mid a < c\}$,
2) $c \neq \sup\{a \in \Omega \mid a < c\}$.

Untuk kasus (1), dipenuhi kondisi

$$\begin{aligned} z \in \rho_c &\Leftrightarrow z \in \rho_a \text{ untuk setiap } a < c \\ &\Leftrightarrow z \in \textstyle\bigcap_{a<c} \delta_a, \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\rho_c = \bigcap_{a<c} \delta_a$ adalah subsemiring dari S.

Untuk kasus (2), terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga

$$(c - \epsilon, c) \cap \Omega = \emptyset.$$

Selanjutnya, diklaim $\rho_c = \bigcup_{a \geq c} \delta_a$. Diambil sembarang $z \in \bigcup_{a \geq c} \delta_a$, maka $z \in \delta_a$ untuk suatu $a \geq c$. Oleh karena itu, $\rho(z) \geq a \geq c$, yang mengakibatkan $z \in \rho_c$, yaitu $\bigcup_{a \geq c} \delta_a \subseteq \rho_c$. Sebaliknya, untuk $z \notin \bigcup_{a \geq c} \delta_a$, maka $z \notin \delta_a$ untuk setiap $a \geq c$, yang mengakibatkan $z \notin \delta_a$ untuk setiap $a > c - \epsilon$. Akibatnya, jika $z \in \delta_a$ maka $a \leq c - \epsilon$, sehingga dipenuhi kondisi $\rho(z) \leq c - \epsilon$ dan $z \notin \rho_c$. Oleh karena itu, $\rho_c = \bigcup_{a \geq c} \delta_a$ adalah subsemiring dari S.

Berdasarkan hasil Analisa di atas, diperoleh ρ_c adalah subsemiring dari S, untuk setiap $c \in [0,1]$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 3.4, diperoleh ρ adalah subsemiring *fuzzy* dari *S.*

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh sifat penting yang menghubungkan antara subsemiring dan subsemiring *fuzzy*, yaitu subset *fuzzy* ρ dari semiring S adalah subsemiring *fuzzy* dari S jika dan hanya level subset $\rho_a(\neq \emptyset)$ adalah subsemiring dari S, untuk setiap $a \in \rho(S)$.

Referensi

[1] **A. Rosenfeld**, 1971, Fuzzy groups, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 35, no. 3, pp. 512517.
[2] **L. A. Zadeh**, 1965, Fuzzy Sets, *Inf. Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338353.
[3] **D. Mandal**, 2014, Fuzzy Ideals and Fuzzy Interior Ideals in Ordered Semirings, *Fuzzy Inf. Eng*, vol. 6, pp. 101114.
[4] **S. Abdurrahman**, 2019, Image (Pre-image) Homomorfisme Interior Subgrup Fuzzy, vol. 8, no. 1, pp. 1518.
[5] **Y. B. Jun, M. Sapanci, and M. A. zt rk**, 1998, Fuzzy ideals in gamma near-rings, *Turkish J. Math.*, vol. 22, no. 4, pp. 449459.
[6] **S. Abdurrahman**, Interior Subgrup Fuzzy, *J. Fourier*, vol. 7, no. 1, pp. 1321, 2018.
[7] **J. Ahsan, J. N. Mordeson, and M. Shabir**, 2012, *Fuzzy Semirings with Applications to Automata Theory*. Springer Berlin Heidelberg New York Dordrecht London.
[8] **R. D. Jagatap**, 2014, Right k -Weakly Regular -Semirings, *Hindawi Publ. Corp. Algebr.*, vol. 2014, pp. 1-5.
[9] **J. Mordeson and K. R. Bhutani**, 2005, Fuzzy Subsets and Fuzzy Subgroups, in *Group*, vol. 39, no. X, pp. 139.

THIS PAGE INTENTIONALLY LEFT BLANK