MỘT SỐ TÍNH CHẤT BẢO TỒN TRÊN SIÊU KHÔNG GIAN

SOME PRESERVED PROPERTIES ON A HYPERSPACE

Lương Quốc Tuyển[1], Hồ Quốc Trung[2*], Lê Văn Có[2]

[1]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng

[2]Sinh viên Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng

*Tác giả liên hệ: qt08102000@gmail.com

(Nhận bài: 26/7/2021; Chấp nhận đăng: 20/9/2021)

Tóm tắt - Good và Macías [1] đã chứng minh được sự bảo tồn của một số tính chất topo từ một không gian topo lên không gian tích đối xứng cấp n của nó. Cụ thể, nếu một không gian topo có họ bảo tồn bao đóng, thì không gian tích đối xứng cấp n của nó cũng có một họ bảo tồn bao đóng. Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu về không gian Hausdorff, họ hữu hạn trên các tập con compact và mối quan hệ giữa không gian topo X và siêu không gian gồm các tập con hữu hạn $\mathcal{F}(X)$ của nó. Nhờ đó, đã chứng được minh được các kết quả mới như sau: (1) Nếu X là một không gian Hausdorff, thì siêu không gian $\mathcal{F}(X)$ cũng là một không gian Hausdorff; (2) Nếu không gian X có họ hữu hạn trên các tập con compact, thì siêu không gian $\mathcal{F}(X)$ cũng có họ hữu hạn trên các tập con compact.

Từ khóa - Tích đối xứng; siêu không gian; không gian Hausdorff; tập compact; họ hữu hạn trên các tập con compact

Abstract - Good and Macísas [1] have proved the preservation of some topological properties from a topological space to its n-fold symmetric product space. In particular, if a topological space has a closure-preserving family, its n-fold symmetric product space also has a closure-preserving one. In this paper, the authors study on Hausdorff space, finite family on compact subsets, and the relation between a topological space X and its hyperspace of finite subsets $\mathcal{F}(X)$. The following results are proved: (1) If X is a Hausdorff space, then the hyperspace $\mathcal{F}(X)$ is also a Hausdorff one; (2) If space X has a finite family on the compact subsets, then the hyperspace $\mathcal{F}(X)$ also has a finite one on the compact subsets.

Key words - Symmetric product; hyperspace; Hausdorff space; compact set; finite family on compact subsets

1. Giới thiệu

Năm 1931, Borsulk và Ulam [2] đã giới thiệu khái niệm không gian tích đối xứng cấp n của không gian topo và đã đưa ra một số tính chất quan trọng của nó. Trong những năm gần đây, nhiều tác giả trên thế giới đã quan tâm nhiều đến bài toán về sự bảo toàn các tính chất topo lên không gian tích đối xứng cấp n của nó. Nhờ đó, các tác giả đã thu được nhiều kết quả thú vị (xem [1-7]). Cụ thể, năm 2016, Good và Macías [1] đã chứng minh được sự bảo tồn của một số tính chất topo từ một không gian topo lên không gian tích đối xứng cấp n của nó, và nếu X là một không gian topo có một họ bảo tồn bao đóng, thì không gian tích đối xứng cấp n của nó cũng có một họ bảo tồn bao đóng. Gần đây, Tuyển và Tuyên [7] đã đưa ra kết quả rằng, nếu X là một không gian topo có *cn*-mạng (tương ứng, *ck*-mạng) có tính chất σ-(*P*), thì không gian tích đối xứng cấp n của nó cũng có *cn*-mạng (tương ứng, *ck*-mạng) có tính chất σ-(*P*).

Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu về mối quan hệ giữa một số tính chất mạng trên không gian topo X và tính chất mạng trên siêu không gian $\mathcal{F}(X)$ gồm các tập con hữu hạn của nó. Nhờ đó, đã chứng minh được rằng, nếu X là không gian Hausdorff, thì siêu không gian $\mathcal{F}(X)$ cũng là không gian Hausdorff và nếu X là không gian Hausdorff có một họ hữu hạn trên tập con compact, thì siêu không gian $\mathcal{F}(X)$ cũng là không gian Hausdorff có một họ hữu hạn trên các tập con compact.

Trong bài báo này, nhóm tác giả sử dụng một số ký hiệu:

$$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, ...\},\ \mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, ...\},$$

$|A|$ là lực lượng của tập hợp A. Giả sử $\mathcal{U}$ là họ nào đó gồm các tập con của không gian topo X, ký hiệu

$$\bigcup\mathcal{U}=\bigcup\{U : U\in\mathcal{U}\}.$$

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Giả sử X là một không gian topo. Ta đặt

(1) $CL(X)=\{A\subset X:\ A$ đóng và khác rỗng$\}$;

(2) $2^X=\{A\in CL(X):\ A$ compact$\}$;

(3) $\mathcal{F}_n(X)=\{A\in 2^X:\ |A|\le n\}$;

(4) $\mathcal{F}(X)=\{A\in 2^X:\ A$ hữu hạn$\}$.

Chúng ta trang bị cấu trúc topo Vietoris trên không gian $CL(X)$ với cơ sở

$$\mathcal{B}=\left\{\langle U_1,\dots,U_s\rangle : U_1, ..., U_s \text{ là các tập mở của } X,\ s\in\mathbb{N}^*\right\},$$

trong đó

$$\langle U_1,\dots,U_s\rangle=\left\{A\in CL(X): A\subset\bigcup_{i=1}^{s}U_i, A\cap U_i\ne\varnothing, \forall i\le s\right\}$$

[1] The University of Danang - University of Science and Education (Luong Quoc Tuyen)

[2] Student Faculty of Mathematics, The University of Danang - University of Science and Education (Ho Quoc Trung, Le Van Co)

Như vậy, $\mathcal{F}_n(X)$ và $\mathcal{F}(X)$ là các không gian con của $CL(X)$ với topo cảm sinh từ topo Vietoris. Khi đó,

(1) $\mathcal{F}_n(X)$ được gọi là *không gian tích đối xứng cấp n* của X.

(2) $\mathcal{F}(X)$ được gọi là *siêu không gian gồm các tập con hữu hạn* của X.

Rõ ràng rằng $\mathcal{F}(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n(X)$ và $\mathcal{F}_n(X)\subset\mathcal{F}_{n+1}(X)$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Bây giờ, giả sử $U_1,\ldots,U_s$ là các tập mở trong X. Khi đó, ta ký hiệu

$$\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)}=\langle U_1,\ldots,U_s\rangle\cap\mathcal{F}(X).$$

Như vậy, topo trên $\mathcal{F}(X)$ có cơ sở

$$\mathcal{B}=\left\{\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)}:U_1,\ldots,U_s \text{ mở trong } X,\ s\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Định nghĩa 2.1.1 ([4]). Giả sử X là một không gian topo và $\mathcal{U}$ là họ nào đó gồm các tập con của X. Khi đó, $\mathcal{U}$ được gọi là *họ hữu hạn trên các tập con compact* của X (viết tắt là CF) nếu với mọi tập con compact $K\subset X$, ta có $\{U\cap K:U\in\mathcal{U}\}$ là họ hữu hạn.

Bổ đề 2.1.2 ([1]). *Nếu $\mathcal{A}$ là tập con compact trong $\mathcal{F}(X)$, thì $\bigcup\mathcal{A}$ là tập con compact trong X.*

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Nhóm tác giả sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo; Nghiên cứu các bài báo của các tác giả đi trước và sử dụng cách tương tự hóa, khái quát hóa để đưa ra những kết quả mới cho mình.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

Bổ đề 3.1.1. Nếu X là một không gian Hausdorff, thì $\mathcal{F}(X)$ cũng là không gian Hausdorff.

Chứng minh. Giả sử $E,F\in\mathcal{F}(X)$ sao cho $E\neq F$. Bởi vì $E\neq F$ nên không giảm tổng quát ta giả sử rằng tồn tại $x\in E\setminus F$. Bởi vì F là tập hữu hạn và X là không gian Hausdorff nên tồn tại các lân cận mở U của x và V của F trong X sao cho $U\cap V=\varnothing$.

Trường hợp 1: Nếu $E=\{x\}$, thì ta lấy $\mathcal{U}=\langle U\rangle_{\mathcal{F}(X)}$ và $\mathcal{V}=\langle V\rangle_{\mathcal{F}(X)}$. Khi đó, rõ ràng rằng $\mathcal{U}$ là lân cận mở của E và $\mathcal{V}$ là lân cận mở của F trong $\mathcal{F}(X)$ thỏa mãn $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

Trường hợp 2: Nếu $E\neq\{x\}$, thì ta đặt

$$\mathcal{U}=\langle U,X\setminus\{x\}\rangle_{\mathcal{F}(X)};\ \mathcal{V}=\langle V\rangle_{\mathcal{F}(X)}.$$

Khi đó,

- $\mathcal{U}$ là lân cận mở của E trong $\mathcal{F}(X)$.

Thật vậy, rõ ràng rằng $\mathcal{U}$ mở trong $\mathcal{F}(X)$ và

$$E\subset X=U\cup(X\setminus\{x\}).$$

Mặt khác, bởi vì

$$E\cap U=\{x\}\neq\varnothing,$$

$$E\cap(X\setminus\{x\})\neq\varnothing$$

nên $\mathcal{U}$ là lân cận mở của E trong $\mathcal{F}(X)$.

- $\mathcal{V}=\langle V\rangle_{\mathcal{F}(X)}$ là lân cận mở của F trong $\mathcal{F}(X)$.
- $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\neq\varnothing$. Khi đó, ta lấy $A\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$. Bởi vì $A\in\mathcal{V}$ nên ta suy ra $A\subset V$. Mặt khác, vì $A\in\mathcal{U}$ nên ta có $A\cap U\neq\varnothing$, kéo theo $U\cap V\neq\varnothing$. Điều này mâu thuẫn với $U\cap V=\varnothing$.

Định lí 3.1.2. Giả sử X là không gian topo Hausdorff. Khi đó, nếu $\mathcal{U}$ là một họ CF trong X, thì

$$\mathfrak{U}=\left\{\langle U_1,\ldots,U_r\rangle_{\mathcal{F}(X)}:U_i\in\mathcal{U},\ 1\le i\le r,\ r\in\mathbb{N}^*\right\}$$

là một họ CF trong $\mathcal{F}(X)$.

Chứng minh. Bởi vì X là không gian Hausdorff nên theo Bổ đề 3.1.1 ta suy ra rằng, $\mathcal{F}(X)$ cũng là một không gian Hausdorff. Bây giờ, giả sử $\mathcal{K}$ là một tập con compact trong $\mathcal{F}(X)$. Khi đó, theo Bổ đề 2.1.2 ta suy ra $K=\bigcup\mathcal{K}$ là tập con compact của X. Bởi vì $\mathcal{U}$ là họ CF trong X nên tồn tại tập Λ hữu hạn sao cho

$$\{U\cap K\neq\varnothing:U\in\mathcal{U}\}=\{K_i:i\in\Lambda\}.$$

Với mỗi $i\in\Lambda$, ta đặt

$$\mathcal{U}_i=\{U\in\mathcal{U}:U\cap K=K_i\},$$

và với mỗi $\Gamma\subset\Lambda$, ta đặt

$$\mathfrak{U}_\Gamma=\left\{\langle U_1,\ldots,U_r\rangle_{\mathcal{F}(X)}\cap\mathcal{K}:\text{với mỗi } i\le r,\text{ tồn tại } j\in\Gamma\right.$$
$$\left.\text{sao cho } U_i\in\mathcal{U}_j,\text{ và với mỗi } j\in\Gamma,\text{ tồn tại } i\le s \text{ sao cho } U_i\in\mathcal{U}_j\right\}.$$

Khi đó, ta thu được $|\mathfrak{U}_\Gamma|=1$.

Thật vậy, giả sử rằng

$$\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)}\cap\mathcal{K},\ \langle V_1,\ldots,V_r\rangle_{\mathcal{F}(X)}\cap\mathcal{K}\in\mathfrak{U}_i,$$

$$F\in\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)}\cap\mathcal{K}.$$

Khi đó, ta có

- $F\subset K$;
- Giả sử $x\in F$, khi đó bởi vì

$$F\subset\bigcup\{U_i:i\le s\}$$

nên ta suy ra, tồn tại $i\le s$ sao cho $x\in U_i$. Bởi thế, tồn tại $j\in\Gamma$ sao cho $U_i\in\mathcal{U}_j$, và tồn tại $k\le r$ sao cho $V_k\in\mathcal{U}_j$. Như vậy, ta có

$$x\in U_i\cap K=V_k\cap K,$$

kéo theo $F\subset\bigcup\{V_j:j\le r\}$.

○ Giả sử $i \le r$, khi đó tồn tại $j \in \Gamma$ sao cho $V_i \in \mathcal{U}_j$, và tồn tại $k \le s$ sao cho $U_k \in \mathcal{U}_j$. Ta có

$$V_i \cap K = U_k \cap K.$$

Bởi vì $F \in \langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)} \cap \mathcal{K}$ nên ta có

$$F \cap (V_i \cap K) \neq \varnothing,$$

kéo theo $F \cap U_k \neq \varnothing$. Như vậy, $F \in \langle V_1,\ldots,V_r\rangle_{\mathcal{F}(X)}$, do đó ta có

$$\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)} \cap \mathcal{K} \subset \langle V_1,\ldots,V_r\rangle_{\mathcal{F}(X)} \cap \mathcal{K}.$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được rằng

$$\langle V_1,\ldots,V_r\rangle_{\mathcal{F}(X)} \cap \mathcal{K} \subset \langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)} \cap \mathcal{K}.$$

Từ chứng minh trên ta thu được

$$\langle V_1,\ldots,V_r\rangle_{\mathcal{F}(X)} \cap \mathcal{K} = \langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)} \cap \mathcal{K}.$$

Cuối cùng, bởi vì Λ hữu hạn nên $\{\Gamma : \Gamma \subset \Lambda\}$ là tập hữu hạn. Do đó, với mọi $i \le s$, $s \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned}\left\{\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)} \cap \mathcal{K} : \langle U_1,\ldots,U_s\rangle_{\mathcal{F}(X)} \in \mathfrak{U}\right\} \\ = \bigcup\left\{\mathfrak{U}_\Gamma : \Gamma \subset \Lambda\right\}\end{aligned}$$

là tập hữu hạn. Như vậy, $\mathfrak{U}$ là họ CF trong $\mathcal{F}(X)$.

3.2. Đánh giá

Nhóm tác giả nghiên cứu một số tính chất topo được bảo toàn từ không gian topo X lên siêu không gian gồm các tập con hữu hạn $\mathcal{F}(X)$ của nó. Nhờ đó, đã đưa ra và chứng minh được một kết quả mới được thể hiện ở Định lí 3.1.2.

4. Kết luận

Trong những năm gần đây, một số tác giả trên thế giới quan tâm nhiều đến sự bảo toàn tính chất topo lên các siêu không gian của nó và đã thu được nhiều kết quả thú vị. Trong bài báo này, nhóm tác giả đã nghiên cứu về các tính chất của họ hữu hạn trên các tập con compact trong không gian topo và trong siêu không gian. Nhờ đó, đưa ra các kết quả mới rằng, nếu X là không gian topo Hausdorff có một họ hữu hạn trên tập con compact, thì siêu không gian $\mathcal{F}(X)$ cũng là không gian Hausdorff có một họ hữu hạn trên các tập con compact.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C. Good and S. Macías, "Symmetric products of generalized metric spaces", *Topology and its applications*, vol. 206, pp. 93–114, 2016.

[2] K. Borsuk and S. Ulam, "On symmetric products of topological spaces", Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 37, no. 12, pp. 875–882, 1931.

[3] E. Michael, "Topologies on Spaces of Subsets", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 71, no. 1, pp. 152–182, 1951.

[4] R. Engelking, *General topology*, Rev. and completed ed. Berlin: Heldermann, 1989.

[5] L.-X. Peng and Y. Sun, "A study on symmetric products of generalized metric spaces", *Topology and its applications*, vol. 231, pp. 411–429, 2017.

[6] Z. Tang, S. Lin, and F. Lin, "Symmetric products and closed finite-to-one mappings", *Topology and its Applications*, vol. 234, pp. 26–45, 2018.

[7] L. Q. Tuyen and O. V. Tuyen, "On the fold symmetric product of a space with a property network (network)", *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 61, no. 2, pp. 257-263, 2020.

[8] J. Yang and S. Lin, "The closed finite-to-one mappings and their applications", *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, vol. 34, no. 2, pp. 149–161, 2019.