

MODEL PENYEBARAN PENYAKIT POLIO DENGAN PENGARUH VAKSINASI

RR Laila Ma'rifatun¹, Sugiyanto²

^{1,2} Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
Jl. Marsda Adisucipto Yogyakarta, 55281

Abstract

Polio (Poliomyelitis) is an infectious disease caused by the polio virus. This disease attacks the entire body (including the muscles and nerves) and can lead to muscle weakness that is permanent, paralysis or death. This paper will discuss on the influence of vaccination against polio disease spread in the human population that settled in the form of mathematical modeling.

Keywords: *Polio, mathematical modeling.*

1. PENDAHULUAN

Poliomyelitis (polio) adalah penyakit menular yang sangat berbahaya. Penyakit ini disebabkan oleh Virus polio yang berasal dari genus *Enterovirus* dan family *Picornaviridae*. Virus ini menular melalui kotoran (feses) atau sekret tenggorokan orang yang terinfeksi. Virus polio masuk melalui ludah sehingga menyebabkan infeksi. Hal ini dapat terjadi dengan mudah bila tangan terkontaminasi atau benda-benda yang terkontaminasi dimasukkan ke dalam mulut. Virus polio berkembang biak di tenggorokan dan usus selama 4 sampai 35 hari, kemudian akan dikeluarkan melalui tinja selama beberapa minggu kemudian [1].

Virus ini menyerang sistem saraf yang dapat menyebabkan kelumpuhan total dalam hitungan jam. *Poliomyelitis* dapat menyerang pada semua kelompok umur, namun yang paling rentan adalah kelompok umur kurang dari 3 tahun (lebih dari 50% dari semua kasus). Gejala awal adalah demam, kelelahan, sakit kepala, muntah, dan kekakuan pada leher dan nyeri pada anggota badan. Polio tidak dapat disembuhkan, tetapi dapat dicegah dengan vaksinasi. Vaksinasi adalah pemberian vaksin ke dalam tubuh untuk memberikan kekebalan aktif terhadap penyakit tersebut.

Tulisan ini, akan dianalisis model epidemi penyakit polio dengan pengaruh vaksinasi untuk mengetahui dampak dari vaksinasi bila diberikan dalam populasi *susceptible* dan *exposed*. Pada model tersebut ditemukan dua parameter ambang yaitu R_0 dan R_1 dimana R_0 adalah rasio yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang tertular polio oleh satu individu *infective* dan R_1 adalah rasio yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang

tertular polio oleh satu individu *exposed*. Jumlah dari kedua nilai ambang tersebut dilambangkan dengan R (rasio reproduksi dasar), yaitu nilai ambang tajam yang sepenuhnya menentukan dinamika stabilitas dan hasil dari penyakit. Jika $R \leq 1$, maka kesetimbangan bebas penyakit stabil dan penyakit tidak menyebar, namun jika $R > 1$, maka penyakit akan menyebar.

2. PEMBAHASAN

2.1. Formulasi Model

Model penyebaran penyakit polio diformalisasikan ke dalam model *SEIV* (*Susceptible, Exposed, Infective, Vaccinated*). Populasi model tersebut dibagi menjadi 4 kelompok, yaitu kelompok S , kelompok E , kelompok I , dan Kelompok V . $S(t)$ menyatakan jumlah/proporsi individu yang sehat tetapi rentan terserang polio pada saat t , $E(t)$ menyatakan jumlah/proporsi individu laten (gejala polio belum terlihat) pada saat t , $I(t)$ menyatakan jumlah/proporsi individu yang terinfeksi pada saat t , dan $V(t)$ menyatakan jumlah/proporsi individu yang sudah divaksinasi pada saat t . Jumlah populasi keseluruhan dari populasi *Susceptible, Exposed, Infective*, dan *Vaccinated* pada saat t dinyatakan dengan $N(t)$, sehingga dapat ditulis $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + V(t)$.

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk menyederhanakan model adalah sebagai berikut:

1. Populasi terbuka, artinya terdapat interaksi dengan lingkungan luar,
2. Tidak ada kelahiran,
3. Terjadi proses imigrasi dengan angka pertumbuhan konstan,
4. Individu yang baru saja berperan sebagai imigran memiliki kesehatan yang baik tetapi juga rawan terinfeksi polio,
5. Kematian alami dapat terjadi pada kelompok S , E , I , dan V ,
6. Kematian akibat penyakit polio hanya terjadi pada kelompok I ,
7. Penyakit tidak bisa disembuhkan tetapi bisa dicegah dengan vaksinasi,
8. Populasi *Susceptible* yang belum divaksinasi dapat tertular polio oleh populasi *Exposed* dan *Infective*. Tetapi penularan infeksi oleh populasi *Exposed* kurang dari penularan infeksi oleh populasi *Infective*,
9. Populasi *susceptible* yang memperoleh vaksin akan kebal dari penyakit polio karena vaksin polio sangat efektif dalam memproduksi kekebalan terhadap virus polio dan perlindungan dari lumpuh poliomyelitis.

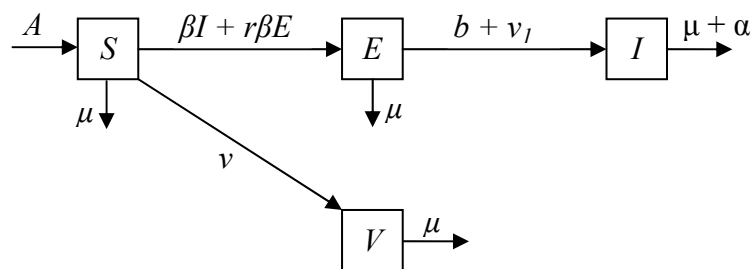
Model Penyebaran Penyakit Polio Dengan Pengaruh Vaksinasi

Parameter-parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

- A = laju imigrasi konstan populasi manusia,
- β = probabilitas per satuan waktu penularan infeksi oleh populasi *Infective*,
- $r\beta$ = probabilitas per satuan waktu penularan infeksi oleh populasi *Exposed*,
- r = pengurangan penularan infeksi oleh populasi *Exposed*,
- μ = laju kematian alami,
- α = laju kematian akibat penyakit polio,
- b = laju transisi dari keadaan laten menuju keadaan terinfeksi,
- v = proporsi jumlah individu di kelompok *Susceptible* yang pindah ke kelompok *Vaccinated* karena sudah divaksinasi,
- v_I = laju populasi *Exposed* yang divaksinasi karena gejala polio belum terlihat.

Jumlah populasi yang mati secara alami pada setiap kelompok sebanding dengan jumlah populasi pada masing-masing kelompok. Oleh karena itu, jumlah kematian alami pada kelompok S , E , I , dan V masing-masing sebesar μS , μE , μI , dan μV . Jumlah populasi yang mati akibat penyakit polio pada kelompok *Infective* sebanding dengan jumlah populasi kelompok *Infective* sehingga jumlah kematian akibat penyakit polio adalah αI . βSI adalah laju besarnya populasi yang terinfeksi oleh populasi *Infective* dimana β adalah probabilitas per satuan waktu penularan infeksi oleh populasi *Infective* (konstanta yang menunjukkan tingkat kontak sehingga terjadi penularan penyakit), individu rentan memperoleh infeksi pada perkapita βI .

Secara ringkas model $SEIV$ penyakit polio disajikan dalam diagram transfer berikut:



Gambar 1. Diagram transfer penyebaran penyakit polio dengan peran vaksinasi

Dinamika penularan polio dituliskan dalam sistem persamaan diferensial nonlinear berikut:

$$\frac{dS}{dt} = A - \beta SI - r\beta SE - (\mu + \nu)S \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI + r\beta SE - (b + \mu + \nu_1)E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = (b + \nu_1)E - (\mu + \alpha)I \quad (3)$$

$$\frac{dV}{dt} = \nu S - \mu V \quad (4)$$

2.2. Solusi Positif

Sistem (1), (2), (3), (4) menggambarkan populasi manusia. Oleh karena itu, sangat penting untuk membuktikan bahwa semua kuantitas (S , E , I dan V) positif untuk semua t . Positif berarti sistem tetap atau populasi bertahan. Dari model sistem, diperoleh,

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{S=0} = A > 0$$

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{E=0} = \beta SI \geq 0$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{I=0} = (b + \nu_1)E \geq 0$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{V=0} = \nu S > 0$$

Dengan demikian, medan vektor diarahkan pada setiap bidang yang melingkar dari $(R_0^+)^4$.

Jadi semua lintasan $(R_0^+)^4$ akan selalu positif.

2.3. Keterbatasan Solusi

Lemma 1

Semua solusi dari sistem persamaan (1), (2), (3), (4) dimulai di orthant positive $(R_0^+)^4$ baik pendekatan, masukan, atau tetap dalam subset $(R_0^+)^4$ didefinisikan oleh:

$$\Omega = \left\{ (S, E, I, V) \in R_+^4 : 0 < S + E + I + V \leq N \leq \frac{A}{\mu} \right\},$$

dimana $(R_0^+)^4$ menyatakan non negatif cone R^4 .

2.4. Titik Ekuilibrium

2.4.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Lemma 2

Sistem (1), (2), (3), dan (4) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit

$E_0(S_0, E_0, I_0, V_0)$ dimana $S_0 = \frac{A}{\mu + \nu}$, $E_0 = 0$, $I_0 = 0$, $V_0 = \frac{\nu}{\mu} S_0$ dengan $N_0 = \frac{A}{\mu}$.

2.4.2. Titik Ekuilibrium Endemi

Lemma 3

Sistem (1), (2), (3), dan (4) mempunyai titik ekuilibrium endemik $E^*(S^*, E^*, I^*, V^*)$ dimana,

$$S^* = \frac{A}{(\mu + \nu)} \frac{I}{R}, \quad E^* = \frac{A}{(b + \mu + \nu_1)} \left(I - \frac{I}{R} \right),$$

$$I^* = \frac{(b + \nu_1)}{(\mu + \alpha)} E^*, \quad V^* = \frac{\nu}{\mu} S^*$$

$$\text{dengan } R = \frac{A\beta(b + \nu_1 + r(\mu + \alpha))}{(\mu + \nu)(b + \mu + \nu_1)(\mu + \alpha)}$$

2.5. Rasio Reproduksi (R)

Parameter penting dalam mendeskripsikan perilaku sistem adalah nilai rasio reproduksi (R). Rasio reproduksi (R) adalah estimasi laju produksi yang terinfeksi, atau jumlah yang menjadi terinfeksi oleh seorang yang terinfeksi terlebih dahulu [2]. Untuk nilai $R < 1$, dimana dapat ditemukan sebagai titik kesetimbangan bebas penyakit, dan disana tidak terdapat kejadian endemik. Jika dijumpai ada yang terinfeksi, maka tetaplah tidak akan terjadi epidemi karena sistem akan kembali ke dalam sistem kesetimbangan.

Jika $R > 1$, kesetimbangan bebas penyakit ada tetapi mulai tidak stabil. Jika ada yang terinfeksi ke dalam keadaan bebas penyakit, maka akan menjadi sebuah epidemi dan sistem akan menuju keadaan endemik secara asimtotik, dan stabil untuk $R > 1$. Parameter $R = 1$ dapat diinterpretasikan sebagai fraksi kritis vaksinasi. Jumlah ini merupakan jumlah minimum vaksinasi yang dibutuhkan untuk mencegah terjadinya epidemic [2].

$$\text{Pada titik ekuilibrium endemi, } E^* = \frac{A}{(b + \mu + \nu_1)} \left(I - \frac{I}{R} \right) \text{ dan } I^* = \frac{(b + \nu_1)}{(\mu + \alpha)} E^*$$

ada jika $R > 1$. Oleh karena itu, jika $R > 1$ maka penyakit akan menyebar. Sebaliknya, jika $R \leq 1$ maka penyakit tidak menyebar.

Rasio Reproduksi R dapat ditulis sebagai berikut:

$$R = \frac{A\beta(b + v_I) + r\beta(\mu + \alpha)}{(\mu + v)(b + \mu + v_I)(\mu + \alpha)} \quad (5)$$

$$R = R_0 + R_1$$

$$= \frac{A\beta(b + v_I)}{(\mu + v)(b + \mu + v_I)(\mu + \alpha)} + \frac{r\beta\mu}{(\mu + v)(b + \mu + v_I)}$$

R_0 adalah jumlah infeksi sekunder yang dihasilkan oleh satu orang pada kelompok *Infective* selama periode infeksi. R_1 adalah jumlah infeksi sekunder yang dihasilkan oleh satu orang di kelompok *Exposed* selama periode laten. Jumlah dari kedua nilai ambang, dilambangkan dengan R .

$$(i) \text{ Interpretasi } R_0 = \beta \frac{A}{(\mu + v)} \frac{1}{(\mu + \alpha)} \frac{(b + v_I)}{(b + \mu + v_I)}$$

Kondisi utama untuk kejadian epidemi adalah bahwa fraksi *susceptible*. Orang terinfeksi, pada rata-rata yaitu,

$$\frac{1}{(\mu + \alpha)}.$$

Jumlah individu ter-*exposed* dihasilkan dengan infeksi tunggal $\beta \frac{A}{(\mu + v)} \frac{1}{(\mu + \alpha)}$. Selama waktu ini, jumlah total yang bertemu atau kontak dengan orang lain akan menjadi $\frac{A}{(\mu + v)}$. Sebagian kecil $\frac{(b + v_I)}{(b + \mu + v_I)}$ yang bertahan hidup dan menjadi terinfeksi.

$$(ii) \text{ Interpretasi } R_1 = \frac{r\beta\mu}{(\mu + v)(b + \mu + v_I)}$$

Jumlah total yang bertemu atau kontak dengan orang lain akan menjadi $r\beta \frac{A}{(\mu + v)}$.

Sebagian kecil $\frac{1}{(b + \mu + v_I)}$ yang bertahan hidup dan menjadi terinfeksi.

2.6. Analisis Kestabilan titik ekuilibrium

2.6.1. Analisis Kestabilan Titik ekuilibrium Bebas Penyakit $E_0(S_0, E_0, I_0, V_0)$

Lemma 4

Titik ekuilibrium

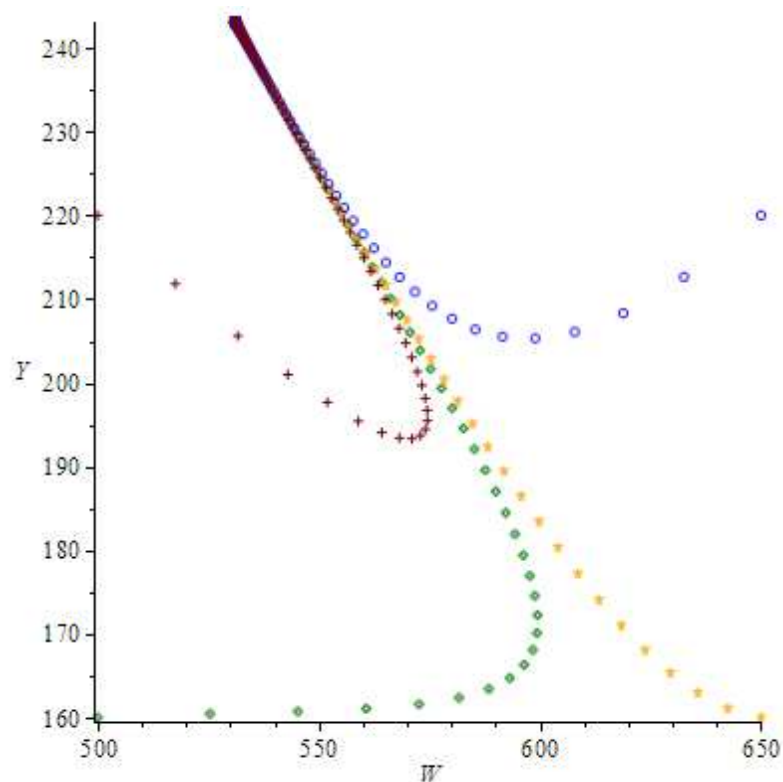
$$E_0(S_0, E_0, I_0, V_0) = \left(\frac{A}{\mu + \nu}, 0, 0, \frac{\nu}{\mu} S_0 \right)$$

stabil asimtotik lokal jika $R < 1$.

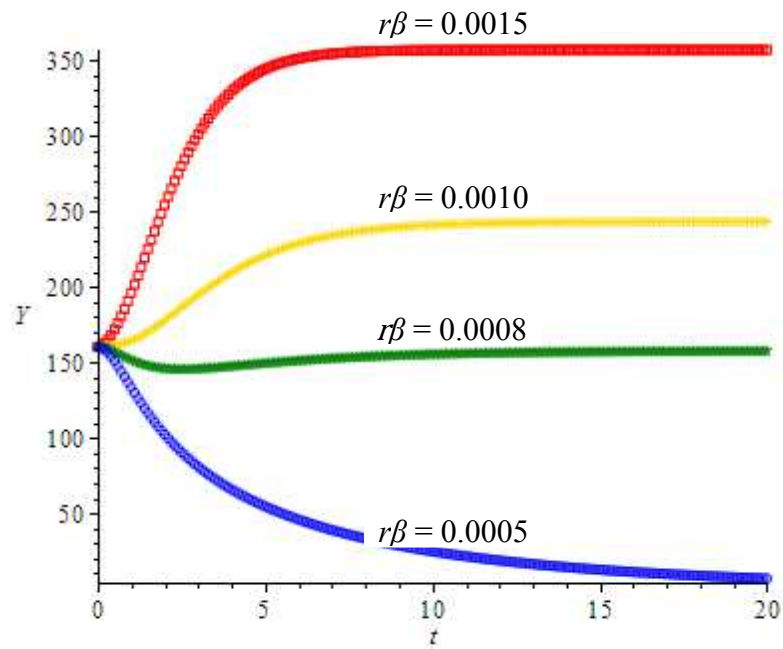
2.7. Simulasi Model

Berikut ini nilai-nilai parameter yang diperoleh dari sebuah jurnal yang berjudul “*Modeling Spread of Polio with the Role of Vaccination*”.

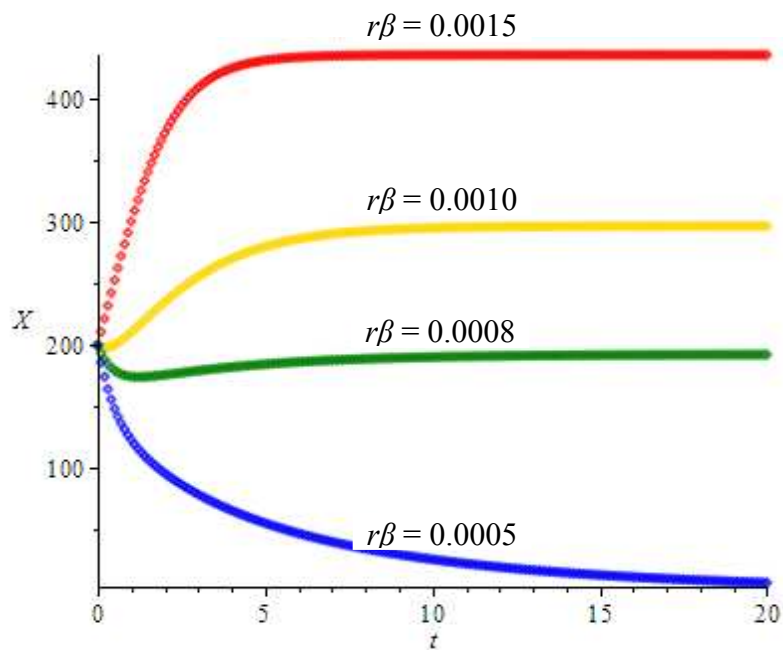
$A = 1000$; $\beta = 0,002$; $r = 0,5$; $\mu = 0,5$; $\nu = 0,6$; $v_1 = 0,001$; $b = 0,9$; $\alpha = 0,6$.



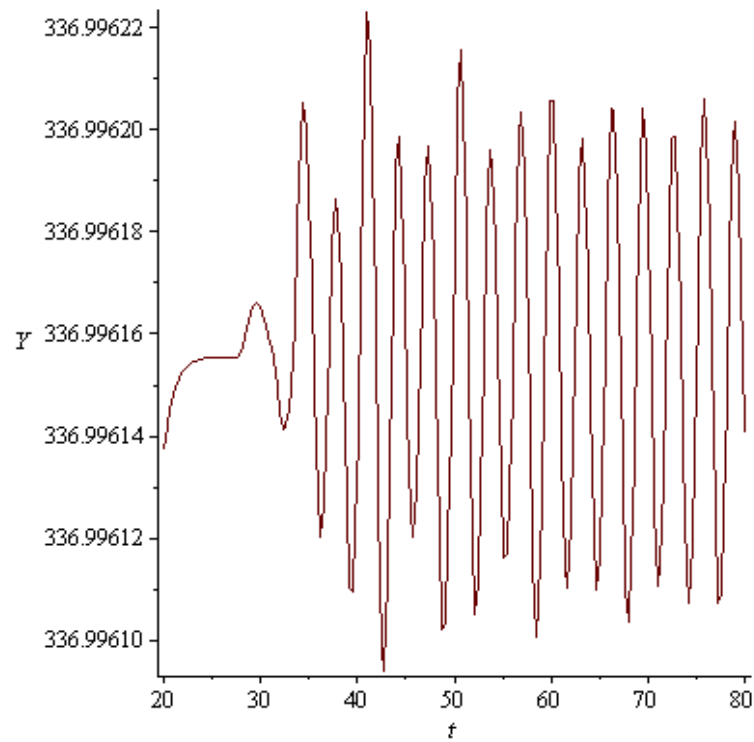
Gambar 2. Grafik/plot populasi *Susceptible* (W) dan *Infektive* (Y) untuk nilai awal yang berbeda



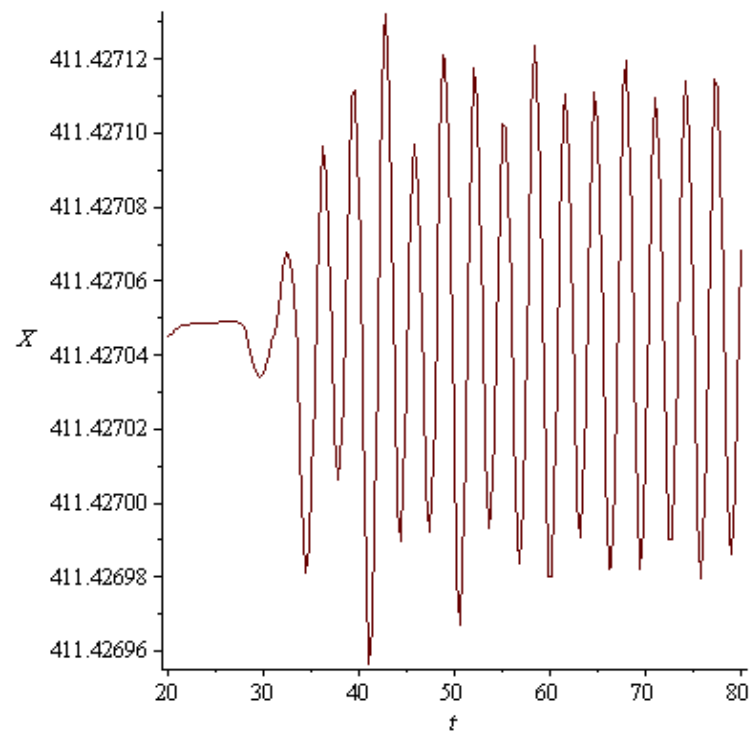
Gambar 3. Grafik/plot populasi *Infektive* (Y) terhadap waktu dengan parameter $r\beta$ yang berbeda



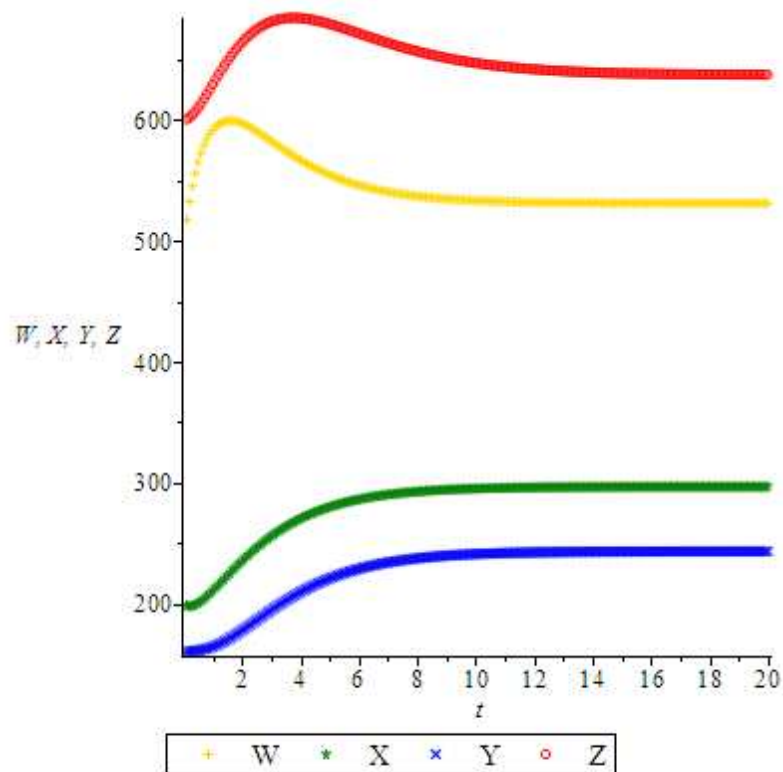
Gambar 4. Grafik/plot populasi *Exposed* (X) terhadap waktu dengan parameter $r\beta$ yang berbeda



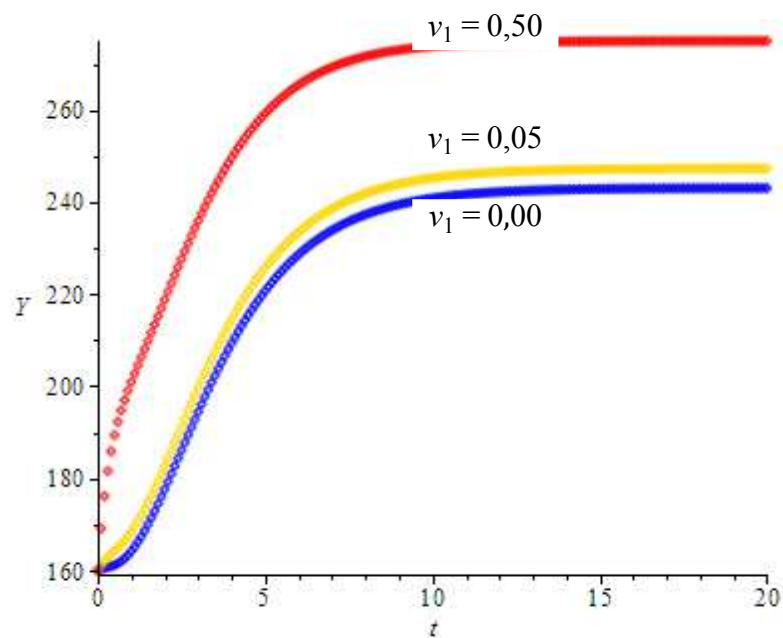
Gambar 5. Grafik/plot populasi *Invasive* dengan $r\beta = 0.002$



Gambar 6. Grafik/plot populasi *Exposed* dengan $r\beta = 0.002$



Gambar 7. Grafik/plot populasi pada semua kelompok dengan adanya imigrasi



Gambar 8. Grafik/plot populasi *Infective* (Y) dengan v_1 yang berbeda

3. KESIMPULAN

1. Model epidemi SEIV penyakit polio mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(S_0, E_0, I_0, V_0)$ dimana

$$S_0 = \frac{A}{\mu + \nu}, \quad E_0 = 0, \quad I_0 = 0, \quad V_0 = \frac{\nu}{\mu} S_0 \text{ dan titik ekuilibrium endemi } E^*(S^*, E^*, I^*, V^*)$$

$$\text{dimana } S^* = \frac{A}{(\mu + \nu)} \frac{1}{R}, \quad E^* = \frac{A}{(b + \mu + \nu_1)} \left(1 - \frac{1}{R}\right), \quad I^* = \frac{(b + \nu_1)}{(\mu + \alpha)} E^* \text{ dan}$$

$$V^* = \frac{\nu}{\mu} S^* \text{ dengan } R = \frac{A\beta(b + \nu_1 + r(\mu + \alpha))}{(\mu + \nu)(b + \mu + \nu_1)(\mu + \alpha)}.$$

2. Titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(S_0, E_0, I_0, V_0)$ stabil asimtotik lokal jika $R < 1$. Sedangkan titik ekuilibrium endemi $E^*(S^*, E^*, I^*, V^*)$ terjadi bifurkasi untuk beberapa nilai parameter.
3. Vaksinasi belum tentu membantu dalam pemberantasan polio karena jika vaksinasi diberikan pada populasi Exposed, maka dapat meningkatkan tingkat endemik keseimbangan dan penyakit menyebar lebih cepat dari kecepatan biasa. Jadi vaksinasi hanya bertujuan untuk mencegah polio, bukan untuk mengobati polio. Penularan infeksi polio akibat populasi Exposed memainkan peran penting dalam penyebaran Polio dan karenanya beberapa langkah-langkah harus diambil untuk melacak populasi Exposed karena sangat sulit untuk melacak mereka karena gejala penyakit belum terlihat.

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] <http://akp2011.blogspot.com/2011/03/poliomyelitis.html>, diakses tanggal 20 Juli 2012 pukul 15.04
- [2] Iswanto, R.J., 2012, *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*, edisi pertama, Graha Ilmu, Yogyakarta.