FOURIER April 2012, Vol. 1, No. 1, 34 – 44

Optimasi Portofolio Resiko Menggunakan Model Markowitz MVO Dikaitkan Dengan Keterbatasan Manusia Dalam Memprediksi Masa Depan Dalam Perspektif Al-Qur`an

Noor Saif Muhammad Mussafi[1]

[1]*Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga*
Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta 55281
noor.saif@uin-suka.ac.id

Abstract

Risk portfolio on modern finance has become increasingly technical, requiring the use of sophisticated mathematical tools in both research and practice. Since companies cannot insure themselves completely against risk, as human incompetence in predicting the future precisely that written in Al-Quran surah Luqman verse 34, they have to manage it to yield an optimal portfolio. The objective here is to minimize the variance among all portfolios, or alternatively, to maximize expected return among all portfolios that has at least a certain expected return. Furthermore, this study focuses on optimizing risk portfolio so called Markowitz MVO (Mean-Variance Optimization). Some theoretical frameworks for analysis are arithmetic mean, geometric mean, variance, covariance, linear programming, and quadratic programming. Moreover, finding a minimum variance portfolio produces a convex quadratic programming, that is minimizing the objective function $\frac{1}{2}x^T Qx$*with constraints*$\mu^T x \geq R$*and*$Ax = b$*. The outcome of this research is the solution of optimal risk portofolio in some investments that could be finished smoothly using MATLAB R2007b software together with its graphic analysis.*

***Keywords**: Quadratic Programming, Optimal Risk Portofolio, Expected Return, MarkowitzMVO*

1. Pendahuluan

Manajemen resiko merupakan salah satu unsur penting dalam kegiatan ekonomi, khususnya bidang keuangan, suatukeputusan yang dibuat pada hari ini mempengaruhi peristiwa yang terjadi di masa mendatang. Allah SWT juga memberikan informasi yang cukup jelas terkait masa depan dalam Al-Quran surat Luqman ayat 34:

إِنَّ ٱللَّهَ عِندَهُۥ عِلْمُ ٱلسَّاعَةِ وَيُنَزِّلُ ٱلْغَيْثَ وَيَعْلَمُ مَا فِى ٱلْأَرْحَامِ ۖ وَمَا تَدْرِى
نَفْسٌ مَّاذَا تَكْسِبُ غَدًا ۖ وَمَا تَدْرِى نَفْسٌۢ بِأَىِّ أَرْضٍ تَمُوتُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ
خَبِيرٌۢ ٣٤

Artinya: "Sesungguhnya Allah, hanyapadasisi-NyasajalahpengetahuantentangHariKiamat; danDia-lah Yang menurunkanhujan, danmengetahuiapa yang adadalamrahim. Dan tiadaseorangpun yang dapatmengetahui (denganpasti) apa yang akandiusahakannyabesok. Dan tiadaseorangpun yang dapatmengetahui di bumimanadiaakanmati. Sesungguhnya Allah MahaMengetahuilagiMahaMengenal".

Secara garis besar ayat ini menunjukkan bahwamanusia diberikan motivasi dan kesempatanyang seluas-luasnya untuk berikhtiar meraih yang terbaik di kemudian harisekalipun mereka tidak dapat mengetahui tentang apa yang akan dialaminya termasuk diantaranya resiko yang harus dihadapinya. Namun demikian, dengan dasar ilmu manusia diperbolehkan untuk memprediksi sesuatu yang terjadi di masa mendatang.

Di samping itu, perusahaan-perusahaan selalu dihadapkan dengan resiko, maka kemampuan manajerial di bidang resiko menjadi mutlak diperlukan. Adapun manajemen resiko pada dunia perbankan berkaitan dengan manajemen proses dan pemodelan yang akan diimplementasikan dalam pengambilan kebijakan terkait resiko. Manajemen proses dan pemodelan mencakup teknik dan alat-alat manajemen yang diperlukan untuk mengukur, memonitor, dan mengontrol segala macam resiko seperti resiko kredit, resiko investasi, resiko pasar, resiko suku bunga, resiko likuiditas, dan resiko operasional [3]. Beberapacontoh perhitungan resiko portofolio bank adalah Markowitz MVO (*Mean-Variance Optimization*), *Value-at-Risk* (VaR), dan *Conditional Value-at-Risk* (CVaR). Dalam makalah ini, penulis menfokuskan pada deskripsi Markowitz MVOdalam mengoptimalkan portofolio resiko. Markowitz (1959) mengatakan bahwa proses seleksi portofolio berkaitan dengan kepercayaan investor tentang investasi di masa mendatang dengan didasarkan pada *expected return* dan *variance* namun belum menggunakan prinsip program kuadrat. Tujuan dari penulisan ini adalah memberikan alternatif solusi dalam memilih portofolio optimal (*return*terbaik) menggunakan program kuadrat kepada para investor dalam mengelola modalnya untuk berinvestasi.

2. Optimisasi

Optimisasi secara matematis berarti meminimalkan atau memaksimalkan fungsi tujuan dari beberapa variabel keputusan dengan kendala tertentu. Permasalahan optimisasi dalam penulisan ini dibatasi pada optimisasi diskrit dengan batasan tertentu (*constrained optimization*).

Misal diketahui suatu fungsi $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dan suatu himpunan $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Masalah pencarian suatu $x^* \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} &\min_x f(x) \\ &\text{s.s.} x \in S \end{aligned} \tag{1}$$

disebutmasalahoptimisasi (MO).Fungsi$f$ menyatakan fungsi tujuan dan S adalah daerah yang mungkin.Permasalahannyaadalahmenemukansolusi$x^* \in S$sedemikiansehinggamemenuhipertidaksamaanberikut

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall\, x \in S$$

Salah satubagiandasardalamMOadalah program linear (*linear programming*). Program linear (PL)merupakanmasalahmeminimalkanataumemaksimalkanfungsitujuan linear denganbatasanpersamaan linear danpertidaksamaan linear.Secarasederhana, program linear merupakanMO (1) padakasussemuafungsinya linear, yaitu

$$\begin{aligned} &\min_x\ c^T x \\ \text{s.s.}\quad &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Matriks $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ dengan vektor $b \in \mathbb{R}^m$dan $c \in \mathbb{R}^n$ diketahui. Adapun solusi yang dicari adalah vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dengan koefisien non-negatif dan memenuhi persamaan linear

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\ldots \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Tujuan akhir (2) adalah meminimalkan koefisien vektor x pada fungsi tujuan $c^T x$ yaitu perkalian skalar

$$c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

Pengembangan lebih lanjut dari program linear adalah masalah optimisasi dengan fungsi tujuan kuadrat yaitu program kuadrat (*quadratic programming*). Program kuadrat (PK) memungkinkan memiliki satu atau lebih kendala dalam bentuk persamaan ataupun pertidaksamaan. Bentuk umum dari program kuadrat adalah

$$\begin{aligned} &\min_x \tfrac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ \text{s.s.}\quad &Ax = b \\ &Cx \geq d \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Matriks$A, C \in \mathbb{R}^{mxn}$ dan tiga vektor $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^m$, dan$c \in \mathbb{R}^n$diketahui. Adapun Q merupakan matriks simetris $\left(Q_{ij} = Q_{ji}\right)$karena $x^T Q x = \frac{1}{2} x^T (Q + Q^T) x$. Tujuan akhir (3) adalah meminimalkankoefisien vektor x pada fungsi tujuan kuadrat $\frac{1}{2} x^T Q x + c^T x$.

3. Portofolio Optimal

Teori pemilihan portofolio optimal pertamakali diperkenalkan oleh Markowitz. Berikut ini adalah pemikiran Markowitz tentang deskripsi model dan hal-hal yang terkait dengan program kuadrat pada portofolio optimal.

Misalkan seorang investor memiliki sejumlah dana yang akan diinvestasikan dalam surat-surat berharga (saham, obligasi, pasar uang, dan lain sebagainya) dengan laba acak. Untuksetiapsuratberharga$i = 1 \dots n$, misalkan*expected return*μ_i dan *variance*σ_i^2diketahui. Selanjutnya untuk sebarang dua surat berharga i dan j, koefisien korelasi ρ_{ij} juga diketahui. Jika proporsi dana yang diinvestasikan pada surat berharga i direpresentasikan x_i, maka kita dapat menghitung *expected return* dan *variance* dari hasil portofolio$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sebagai berikut.

$$E[x] = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \cdots + x_n\mu_n = \mu^T x$$

dan

$$Var[x] = \sum_{i,j} \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j\,x_i x_j = x^T Q x$$

dengan, $\rho_{ij} \equiv 1, Q_{ij} = \rho_{ij}\,\sigma_i\sigma_j$, dan $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Portofolio vektor x harus memenuhi $\sum_i x_i = 1$. Portofolio *feasible*x disebut efisien jika mampu menghasilkan *expected return* maksimum diantara portofolio-portofolio lainnya dengan *variance* minimum. Koleksi portofolio optimal kemudian membentuk batas efisien (*efficient frontier*).

Masalah optimisasi portofolio Markowitz MVO dapat diformulasikan sebagai penentuan *variance* portofolio minimum pada surat berharga 1 hingga n yang menghasilkan sekurang-kurangnya sebuah nilai tujuan dari *expected return* R. Secara matematis formulasi tersebut merefleksikan masalah program kuadrat.

$$\begin{aligned} &\min_x x^T Q x \\ \text{s.s.} \quad & e^T x = 1 \\ & \mu^T x \geq R \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Fungsi tujuan berkesesuaian dengan (setengah) total varians portofolio. Konstanta $\frac{1}{2}$ tidak berpengaruh pada solusi optimal. Vektor $e$berdimensi-n dimana semua komponennya sama dengan 1. Kendala pertama pada (4) menyatakan proporsi x_1 harus berjumlah 1. Kendala kedua pada (4) merepresentasikan *expected return* yang disyaratkan tidak melebihi nilai tujuan dan kendalaketiga, x disyaratkan bilangan non-negatif, maka matriks Q disebut *positive-semidefinite* $(x^T Q x \geq 0)$ dan mengakibatkan *variance* bernilai non-negatif pada setiap portofolio[4].

4. Optimisasi Portofolio pada MATLAB

Saat ini permasalahan optimisasi tidak hanya dapat diselesaikan secara manual namun juga dapat diselesaikan menggunakan bantuan beberapa software, salah satunya adalah MATLAB. Portofolio optimal Markowitz MVO pada prinsipnya menggunakan model program kuadrat, yaitu meminimalkan fungsi kuadrat terhadap satu atau lebih fungsi kendala dalam bentuk persamaan ataupun pertidaksamaan.

Dalam *optimization toolbox* MATLAB, salah satu sintak yang dapat digunakan dalam menyelesaikan program kuadrat yaitu

$$x = \text{quadprog}(Q, c, A, b, Aeq, beq)$$

dengan $Q, A,$ dan Aeq adalah matriks sedangkan $c, b,$ dan beq merupakan vektor. Sedangkan sintak $x = \text{quadprog}(Q, c, A, b, Aeq, beq)$ berarti vektor x meminimalkan fungsi kuadrat $\frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$ terhadap dua fungsi kendala yaitu pertidaksamaan $Ax \leq b$ dan persamaan

$$Aeq. x = beq.$$

Di samping itu, *financial toolbox* pada MATLAB menyediakan fungsi frontcon untuk menganalisa *Mean-Variance* efisien, yaitu menghitung suatu portofolio investasi sedemikian sehingga meminimumkan resiko untuk beberapa prediksi return yang diketahui. Fungsi frontcon memerlukan input vector ExpRet (rataan *expected return* tiapaset) dan matriks CovMat (matriks kovarians). Dengan dua input tersebut, kita dapat membuat grafik dua dimensi berupa kurva batas efisien (*efficient frontier*) yang menghasilkan resiko (simpangan baku) sebagai koordinat x, *expected return* sebagai koordinat y, dan beban tiap aset. Sintak fungsi frontcon yang dimaksud dideskripsikan sebagai berikut [5]:

$\text{ExpRet} = [\ldots]$

$\text{CovMat} = [\ldots]$

$[\text{PRisk}, \text{ProR}, \text{PWts}] = frontcon(\text{ExpRet}, \text{CovMat}, 10)$

$frontcon(\text{ExpRet}, \text{CovMat}, 10)$

dengan PRisk merepresentasikan resiko (simpangan baku), PRoR menyatakan *expected return*, dan PWts menyatakan beban yang dialokasikan pada tiap aset. Jumlah semua beban pada portofolio selalu sama dengan 1 (lihat kendala pertama pada (4)).

5. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian sebelumnya telah dijelaskan bahwa program kuadrat merupakan permasalahan meminimalkan fungsi tujuan kuadrat terhadap kendala yang berbentuk persamaan linear dan pertidaksamaan linear. Masalah program kuadrat banyak digunakan dalam pemodelan optimisasi, salah satunya MVO yang bertujuan memilih portofolio surat-surat berharga (aset) agar diperoleh portofolio efisien yaitu *expected return* maksimum dan resiko (*variance*) minimum [1].

Kumpulan portofolio efisien tersebut akan membentuk batas efisien (*efficient frontier*) dari seluruh portofolio. Batas efisien selanjutnya dapat direpresentasikan dalam grafik dua dimensi dimana tiap koordinatnya berkesesuaian dengan *expected return* dan simpangan baku.

Misalkan Q adalah *positive definite* yaitu$x^T Qx > 0$, sehingga ada portofolio unik pada x yang memiliki *variance* minimum. Misal portofolio tersebut dinotasikan x_{min} dengan *expected return*$\mu^T x_{min}$ dengan interval R_{min} dan R_{max}. Dalam hal ini x_{min} merupakan portofolio efisien.

Mengacu pada notasi di atas, masalah Markowitz MVO adalah penentuan *variance* portofolio minimum pada surat berharga $1 \dots . n$ yang menghasilkan sekurang-kurangnya sebuah nilai tujuan dari *expected return* (misalkan b). Secara matematis formula tersebut menghasilkan masalah program kuadrat

$$\begin{aligned} &\min_x \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ &\text{s.s.} \quad \mu^T x \geq R \\ &Ax = b \\ &Cx \geq d \end{aligned} \tag{5}$$

Kendala pertama pada (5) menunjukkan bahwa *expected return* tidak boleh kurang dari nilai tujuan R. Masalah (5) dapat diselesaikan dengan mengasumsikan interval R antara R_{min} dan R_{max} sehingga diperoleh seluruh portofolio efisien yang diharapkan. Konstanta $\frac{1}{2}$ pada fungsi tujuan hanya merupakan setengah *variance* total portofolio dan tidak berpengaruh pada penentuan solusi optimal.

Tabel 1. *Return*tiapasetkurunwaktu
1960 hingga 2003

No	Tahun	Saham	Obligasi	PasarUang	No	Tahun	Saham	Obligasi	PasarUang
0	1960	20,2553	262,935	100,00	23	1982	115,308	777,332	440,68
1	1961	25,6860	268,730	102,33	24	1983	141,316	787,357	482,42
2	1962	23,4297	284,090	105,33	25	1984	150,181	907,712	522,84
3	1963	28,7463	289,162	108,89	26	1985	197,829	1200,63	566,08
4	1964	28,7463	289,162	108,89	27	1986	197,829	1200,63	566,08
5	1965	28,7463	289,162	108,89	28	1987	197,829	1200,63	566,08
6	1966	23,4297	284,090	105,33	29	1988	150,181	907,712	522,84
8	1967	28,7463	289,162	108,89	30	1989	197,829	1200,63	566,08
9	1968	28,7463	289,162	108,89	31	1990	197,829	1200,63	566,08
10	1969	28,7463	289,162	108,89	32	1991	197,829	1200,63	566,08
11	1970	23,4297	284,090	105,33	33	1992	150,181	907,712	522,84
12	1971	28,7463	289,162	108,89	34	1993	197,829	1200,63	566,08
13	1972	28,7463	289,162	108,89	35	1994	197,829	1200,63	566,08
14	1973	28,7463	289,162	108,89	36	1995	197,829	1200,63	566,08
15	1974	23,4297	284,090	105,33	37	1996	150,181	907,712	522,84
16	1975	28,7463	289,162	108,89	38	1997	197,829	1200,63	566,08

17	1976	28,7463	289,162	108,89	39	1998	197,829	1200,63	566,08
18	1977	28,7463	289,162	108,89	40	1999	197,829	1200,63	566,08
19	1978	23,4297	284,090	105,33	41	2000	150,181	907,712	522,84
20	1979	28,7463	289,162	108,89	42	2001	197,829	1200,63	566,08
21	1980	28,7463	289,162	108,89	43	2002	197,829	1200,63	566,08
22	1981	28,7463	289,162	108,89	44	2003	197,829	1200,63	566,08

Berikut diketahui suatu data portofolio saham, obligasi, dan dana tunai Amerika Serikat yang merupakan *review* keuntungan tiga aset pada periode antara 1960 dan 2003(lihat tabel 1). Dari data tersebut selanjutnya akan dicari portofolio resiko optimal masing-masing variabel yaitu saham, obligasi, dan danatunai. Data yang dimaksud adalah sebagai beikut:

1. Keuntungan saham yang diperoleh dari indeks *Standard and Poor's* 500 (saham 500 perusahaan dengan modal besar).
2. Keuntungan obligasi diperoleh dari indeks negosiasi hutang kupon obligasi Amerika Serikat.
3. Dana tunai yang dimaksud adalah dana yang diinvestasikan pada pasar uang.

Misalkan I_{it} adalah *total return* pada tabel 1 untuk aset $i = 1,2,3$ dan $t = 0, \dots, T$ dimana $t = 0$ berkesesuaian dengan 1960 dan $t = T$ dengan 2003. Setiap aset i pada data mentahI_{it}, $t = 0, \dots, T$ dapat dikonversi menjadi *rate of return*r_{it}, $t = 1, \dots, T$ menggunakan formula berikut.

$$r_{it} = \frac{I_{it} - I_{i,t-1}}{I_{i,t-1}} \quad (6)$$

Substitusi formula (6) ke masing-masing *rate of return* pada tabel 1 diperoleh tabel baru.

Tabel 2. Nilaiacak*rate of return*tiapaset

No	Tahun	Saham	Obligasi	PasarUang	No	Tahun	Saham	Obligasi	PasarUang
1	1961	26,81	2,20	2,33	25	1983	22,56	1,29	9,47
2	1962	-8,78	5,72	2,93	26	1984	6,27	15,29	8,38
3	1963	22,69	1,79	3,38	27	1985	31,17	32,27	8,27
4	1964	16,36	3,71	3,85	28	1986	18,67	22,39	6,91
5	1965	12,36	0,93	4,32	29	1987	5,25	-3,03	6,77
6	1966	-10,10	5,12	5,40	30	1988	16,61	6,84	8,76
8	1967	23,94	-2,86	4,51	31	1989	31,69	18,54	8,45
9	1968	11,00	2,25	6,02	32	1990	-3,10	7,74	7,31
10	1969	-8,47	-5,63	8,97	33	1991	30,46	19,36	4,43
11	1970	3,94	18,92	4,90	34	1992	7,62	7,34	2,92
12	1971	14,30	11,24	4,14	35	1993	10,08	13,06	2,96
13	1972	18,99	2,39	5,33	36	1994	1,32	-7,32	5,45
14	1973	-14,69	3,29	9,95	37	1995	37,58	25,94	5,60
15	1974	-26,47	4,00	8,53	38	1996	22,96	0,13	5,29
16	1975	37,23	5,52	5,20	39	1997	33,36	12,02	5,50
17	1976	23,93	15,56	4,65	40	1998	28,58	14,45	4,68
18	1977	-7,16	0,38	6,56	41	1999	21,04	-7,51	5,30
19	1978	6,57	-1,26	10,03	42	2000	-9,10	17,22	6,40
20	1979	18,61	-1,26	13,78	43	2001	-11,89	5,51	1,82

21	1980	32,50	-2,48	18,90	44	2002	-22,10	15,15	1,24
22	1981	-4,92	4,04	12,37	45	2003	28,68	0,54	0,98
23	1982	21,55	44,28	8,95					

Misalkan R_i adalah *rate of return* yang dipilih acak pada aset$i$. Dari data pada tabel 2, dapat dihitung rataan aritmatika dari*rate of return*(lihat tabel 3) untuk setiap aset dengan formula berikut:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$$

Tabel 3. Nilaiacak*rate of return*tiapaset

	Saham	Obligasi	PasarUang
$\bar{r}_i$	12,06%	7,85%	6,32%

Kemudian akan dihitung *covariance matrix* atau matriks yang unsur-unsurnya berupa *variance* dan *covariance* dari tiga variabelyaitu saham, obligasi, dan pasar uang.

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(r_{it} - \bar{r}_i) - (r_{jt} - \bar{r}_j) \qquad (7)$$

Covariance matrix berbentuk simetris dengan diagonal $\operatorname{cov}(1,1)$, $\operatorname{cov}(2,2)$, dan $\operatorname{cov}(3,3)$ berupa *variance*. Adapun komponen matriks lainnya yaitu
$\operatorname{cov}(1,2) = \operatorname{cov}(2,1), \operatorname{cov}(1,3) = \operatorname{cov}(3,1), \operatorname{cov}(2,3) = \operatorname{cov}(3,2)$ berupa *covariance*. Dengan demikian dari formula (8) diperoleh

Tabel 4. *Covariance matrix*

Covariance	Saham	Obligasi	PasarUang
Saham	0,02778	0,00387	0,00021
Obligasi	0,00387	0,01112	-0,00020
Pasar Uang	0,00021	-0,00020	0,00115

Langkah selanjutnya adalah mentransformasi *covariance matrix* yang direpresentasikan pada tabel 4 ke bentuk program kuadrat dalam konteks optimisasi portofolio. Misalkan variabel saham, obligasi, dan pasar uang berturut-turut dinotasikan dengan x_S, x_B, danx_M. Dengan mengaplikasikan masalah program kuadrat (lihat formula 5) pada *covariance matrix* tersebut, maka

$$\begin{aligned}
&\min_{x_{S,B,M}} 0{,}02778x_S^2 + 0{,}00774x_Sx_B + \\
&\qquad 0{,}00042x_Sx_M + 0{,}01112x_B^2 - \\
&\qquad 0{,}00040x_Bx_M + 0{,}00115x_M^2 \\
&\text{s.s. } 0{,}1073x_S + 0{,}0737x_B + 0{,}0627x_M \geq R \\
&x_S + x_B + x_M = 1 \\
&\qquad\qquad x_S, x_B, x_M \geq 0
\end{aligned} \qquad (8)$$

Solusi dari program kuadrat (8) yang selanjutnya disebut sebagai portofolio efisien diperoleh dengan menentukan nilai *return*investasi R pada interval $0{,}065 \leq R \leq 0{,}105$ dengan kenaikan 0,005. Untuk menemukan solusi program kuadrat tersebut dapat digunakan software MATLAB versi R2007b [5]. Perhitungan dimulai dengan memasukkan variabel Q, f, A, b, Aeq, beq. Kemudian masukkan sintak dari program kuadrat

$x = \text{quadprog}(Q, f, A, b, Aeq, beq)$.

Berikut adalah ilustrasi sintak untuk *return* investasi $R = 0{,}065$.

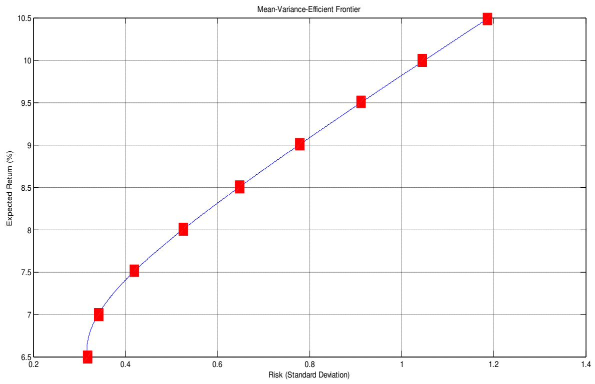
```
>> Q  = [0.05556 0.00387 0.00021;
           0.00387 0.02224 -0.00020;
        0.00021 -0.00020 0.00230];
>> c   = [0;0;0];
>> A    = [0.1073 0.0737 0.0627 ; 0 0 0 ; 0 0 0];
>> b     = [0.065;0;0];
>> Aeq = [1 1 1; 0 0 0 ; 0 0 0];
>> beq  = [1;0;0];
>> x = quadprog(Q,c,A,b,Aeq,beq)
x =
   0.0263
   0.0937
   0.8799
```

Dengan cara yang sama(analog dengan sintak di atas) untuk *return* investasi R lainnya diperoleh hasil seperti ditunjukkan pada tabel 5.

Tabel 5. Rekapitulasi solusi portofolio optimal pada tiap aset dengan $0{,}065 \leq R \leq 0{,}105$

Variance	***Return* pada investasi *R***	**Saham**	**Obligasi**	**Pasar Uang**
0,0010	0,065	0,03	0,10	0,87
0,0014	0,070	0,13	0,12	0,75
0,0026	0,075	0,24	0,14	0,62
0,0044	0,080	0,35	0,16	0,49
0,0070	0,085	0,45	0,18	0,37
0,0102	0,090	0,56	0,20	0,24
0,0142	0,095	0,67	0,22	0,11
0,0189	0,100	0,78	0,22	0
0,0246	0,105	0,93	0,07	0

Brandimarte (2006) menjelaskan bahwa rataan aritmatika pada tabel 3 dan *covariance matrix* pada tabel 4 dapat dibuat kurva batas efisien (*efficient frontier*) yang menunjukkan portofolio dengan nilai maksimum *return* R sebagai standar deviasi. (lihat gambar 1).



Gambar 1. Output fungsi frontcon

Visualisasi dari kurva tersebut dapat dibuat menggunakan software MATLAB versi R2007b. Adapun input yang diperlukan yaitu vektor ExpRet (rataan aritmatika *expected return* tiap aset) dan CovMat (*covariance matrix*). Kemudian masukkan sintak fungsi frontcon untuk memperoleh grafik dua dimensi yang diharapkan sebagai berikut.

```
>>ExpRet=[12.06 7.85 6.32];
>>CovMat=[2.778 0.387 0.021; 0.387 1.112 -0.020; 0.021 -0.020 0.115];
>>[PRisk,PRoR,PWts]=frontcon(ExpRet,CovMat,10);
>>[PWts,PRoR,PRisk]

ans =

   0.0153   0.1005   0.8842   6.5616   0.3162
   0.1156   0.1234   0.7609   7.1726   0.3628
   0.2160   0.1463   0.6377   7.7835   0.4761
   0.3163   0.1693   0.5145   8.3944   0.6205
   0.4166   0.1922   0.3912   9.0054   0.7789
   0.5169   0.2151   0.2680   9.6163   0.9443
   0.6173   0.2380   0.1447  10.2272   1.1135
   0.7176   0.2609   0.0215  10.8381   1.2851
   0.8549   0.1451        0  11.4491   1.4662
   1.0000        0   0.0000  12.0600   1.6667

>>frontcon(ExpRet,CovMat,10)
```

6. Kesimpulan

Setelah melakukan pengkajian mengenai optimisasi portofolio resiko yang dihubungkan dengan masa depan menurut Al Quran, dapat disimpulkan bahwa:

a) Model Markowitz MVO (*Mean-Variance Optimization*) dapat dijadikan sebagai alternatif penyelesaian portofolio resiko optimal.Dalampenelitianinidiperolehsolusiportofolio resiko optimal tigaasetpada*review*pasar modal Amerika Serikat periode 1960 hingga 2003.Artinyaseorang investor yang berkeinginanmeminimalkanresikodengan*expected return*

0,065 dapatmengaturproporsidanainvestasi saham, obligasi, danpasaruangberturut-turutsebesar 3%, 10%, dan 87%.

b) Permasalahan optimisasi program kuadrat dapat diselesaikan menggunakan software MATLAB versi R2007b. Visualisasi dari solusi tersebut dapat direpresentasikan dalam grafik dua dimensi menggunakan fungsi frontcon yang bertujuan untuk mengetahui lebih rinci perbandingan *expected return* dan resiko, sehingga diharapkan informasi tersebut dapat dijadikan sebagai referensi bagi para investor dalam berinvestasi.

c) Dalam perspektif AlQuran, masa depan adalah sesuatu yang tidak bisa diketahui oleh manusia, namun mereka diberikan kesempatan untuk berikhtiarmerajut masa depan gemilang, termasukdiantaranya dalam memprediksi portofolio dengan *return* terbesar dan resiko terkecil.

7. DaftarPustaka

[1] G. Cornuejols dan R. Tuetuencue, 2007,*Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press.

[2] Harry Markowitz, 1959, *Portfolio Selection*, The Journal of Finance AFA, Vol. 7, pp. 77-91.

[3] Joel Bessis, 2002, *Risk Management in Banking*, John Wiley and Sons, New York.

[4] L.A. Wolsey, 1988,*Integer Programming*, John Wiley and Sons, New York.

[5] Paolo Brandimarte, 2006,*Numerical Methods in Finance and Economics: a MATLAB-based introduction*,Edisikedua, John Wiley and Sons Inc., Hoboken, New Jersey.

[6] Wei-Peng Chen, *Portfolio Optimization Models and Mean-Variance Spanning Tests,* tersedia dihttp://www.centerforpbbefr.rutgers.edu/Jan11-2008%20papers/7-2.doc, diakses tanggal 7Agustus 2010.