УДК 303.725.35:658.5
DOI: 10.15587/1729-4061.2022.252667

Анализ политики операционной активности предприятия с резервированием продукции

В. Я. Заруба, Л. В. Потрашкова, Л. С. Гурьянова, Е. М. Сокол, И. Н. Кукса

У роботі досліджується процес оперативного планування виробництва промислової компанії за умов випадкових коливань поточного попиту. Показано, що за цих умов виникають втрати, розміри яких залежать від прийнятої політики операційної активності. Під політикою операційної активності розуміється правило прийняття рішень про поточні обсяги виробництва на основі інформації про замовлення, ймовірні обсяги майбутнього попиту та можливі втрати через відхилення завантаження потужностей від нормативного.

У роботі запропоновано оцінювати ефективність кожної політики операційної активності за допомогою показника, який відповідає граничному середньому економічному ефекту в одиницю часу на нескінченній кількості періодів. Розроблено оригінальний підхід до оцінки ефективності політики операційної активності із резервуванням продукції. Показано, що за використання цієї політики виникає ефект «залежування» продукції на ланцюжках послідовних періодів. Запропоновано вибирати початковий резерв так, щоб ймовірність завершення ланцюжка резервування на заданій кількості періодів складала величину, близьку до одиниці. Такий підхід створює можливість для визначення очікуваного економічного ефекту на ланцюжках резервування різних видів і у результаті – для отримання оцінки ефективності політики загалом.

Отримано оцінку ефективності політики з резервуванням у формі залежності показника ефективності політики від значень вартісних показників. Порівняння цієї оцінки з аналогічною оцінкою ефективності політики виконання замовлень дозволило знайти умову, за якої політика з резервуванням є більш вигідною. Умова полягає в тому, щоб величина втрат на одиницю продукції, пов'язана із зберіганням запасу продукції, не перевищувала половини суми втрат на одиницю продукції, зумовлених простоями та наднормативним завантаженням потужностей.

Ключові слова: оперативне планування, політика операційної активності, випадковий попит, ризики, резервування продукції.

1. Введение

Одной из актуальных проблем менеджмента является обеспечение баланса производственных ресурсов предприятия со спросом на его продукцию, который характеризуется нестабильностью и случайными изменениями. Задачи управления производственными ресурсами распределяются между тремя организационными уровнями: стратегическим, тактическим и оперативным. Эти уровни обеспечивают достижение целей предприятия соответственно в долгосрочной, среднесрочной и краткосрочной перспективе [1].

На стратегическом уровне разрабатываются: долгосрочный прогноз спроса на продукцию предприятия; товарная политика, предполагающая внедрение в производство новых видов продукции; программа развития производственных мощностей с учётом освоения новых технологий. В ходе тактического планирования компания разрабатывает программу по производству продукции на среднесрочный период времени, согласует с поставщиками условия поставок оборотных материальных ресурсов, устанавливает объёмы аутсорсинга и динамику штатной численности производственного персонала. Оперативное производственное планирование принято подразделять на объемно-номенклатурное и календарное. Оперативные объемно-номенклатурные планы определяют текущие объемы производства на основе заказов, полученных на продукцию предприятия, его производственных мощностей и прогнозов будущих заказов. В ходе календарного планирования объемно-номенклатурный план детализируется до сроков изготовления отдельных изделий, сборочных узлов, деталей [1, 2].

В ходе реализации производственной программы в условиях нестабильного спроса возникают потери из-за несовпадения устанавливаемых программой объемов производства продукции и случайных величин объемов поступающих заказов. Эти потери возникают или из-за отсутствия продажи части готовой продукции (затраты на хранение, «замораживание» средств), либо из-за упущенной выгоды в связи с недопроизводством продукции при наличии на нее спроса.

Потери, которые возникают при реализации производственной программы, могут быть уменьшены в ходе оперативного планирования путем изменения намеченных программой объемов производства. Однако такая корректировка объемов производства связана с другими потерями. Потери от изменения объема производства в сторону уменьшения обусловливают выплаты «непродуктивной» зарплаты персонала в условиях простоев, затраты на хранение неиспользованных оборотных материальных ресурсов и «замораживание» средств на их покупку. Потери от изменения объема производства в сторону увеличения вызывают необходимость доплаты персоналу за сверхурочные работы и покупки дополнительного количества оборотных материальных ресурсов по повышенным ценам [2].

Таким образом, в условиях случайного спроса предприятия неизбежно несут разного рода потери. При этом уменьшение одного вида потерь приводит к увеличению потерь других видов. Поэтому актуальной является задача минимизации суммарных потерь предприятия, вызванных возникающими отклонениями текущих объемов спроса от нормативной загрузки производственных мощностей.

На практике для снижения указанных потерь используются разные управленческие подходы, соответствующие разным политикам операционной активности. Каждая политика операционной активности характеризуется некоторым соотношением разных видов потерь. И поэтому выбор на множестве политик операционной активности должен базироваться на оценках их эффективности с учётом потерь, вызванных нестабильным спросом. В связи с этим исследования, посвящённые оцениванию эффективности разных политик операционной активности (в том числе политики с резервированием продукции) в условиях нестабильного спроса являются актуальными.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Проблема снижения потерь, которые возникают в ходе операционной активности в условиях нестабильного спроса, тесно связана с управлением рисками. Базовые концепции и понятийный аппарат менеджмента рисками в организациях определяет стандарт ИСО 31000:2009 «Менеджмент риска. Принципы и руководство» (ISO 31000:2009 «Risk management - Principles and guidelines») [3]. Стандарт может применяться ко всей организации и на всех уровнях, а также к особым функциям, проектам и видам деятельности.

Современным методам сбалансированного управления производственными ресурсами соответствуют стандарты ERP (Enterprise Resource Planning) информационных систем, обеспечивающих комплексную поддержку менеджмента на крупных и средних предприятиях. Проблемам внедрения и развития информационных систем, которые выполняют задачи ERP, посвящены многие десятки публикаций. В частности, в работе [4] ERP рассматривается как концепция управления, направленная на повышение эффективности бизнеса в целом. Однако одной из критических проблем является координация функциональных технологий, обеспечивающих производственный процесс. К этим технологиям относятся: представление производственных планов в контексте календарных периодов (Master Planning Scheduling); планирование требований к материалам и компонентам (Material Requirement Planning); планирование требований к мощности для обеспечения своевременного выполнения заказов (Capacity Resource Planning). Заметим, что технологии ERP-систем действительно предоставляют широкие возможности для решения расчётных задач производственного планирования производства в условиях заданных уровней спроса. Однако они не обеспечивают непосредственно управление рисками, которые возникают в условиях случайных колебаний текущего спроса.

На системном подходе к управлению операционной активностью основана концепция продаж и оперативного планирования (Sales & Operations Planning – S&OP). В [5] процесс S&OP рассматривается на трёх уровнях в зависимости от горизонта планирования. Горизонт долгосрочного планирования для типичного процесса S&OP охватывает более 18–36 месяцев. В качестве среднесрочной цели компании с точки зрения продаж и поставок действует Годовой план действий (AOP). Краткосрочные (ежемесячные) планы продаж и операций являются средством постепенного достижения целей АОП. Целью S&OP для краткосрочных периодов времени является определение общего уровня производства (производственного плана) и других видов деятельности для достижения общих целей прибыльности, производительности и конкурентного времени выполнения заказа.

Процесс S&OP ориентирован на установление темпов производства, которые позволят достичь цели поддержания, увеличения или уменьшения запасов или накопленных резервов при сохранении относительной стабильности персонала [5]. В [6] отмечается, что многих специалистов по цепочке поставок в последние годы занимает вопрос улучшения связи между спросом и предложением. Важной задачей S&OP является уменьшение потерь от несбалансированности во времени возможностей сбытовой и производственной подсистем предприятия. Однако при этом в S&OP не учитывается тот факт, что способ обеспечения баланса между возможностями указанных подсистем определяется применяемой на предприятии политикой операционной активности. S&OP не предлагает методы и модели оценивания и выбора наиболее эффективной операционной политики.

В качестве математических моделей управления рисками операционной активности часто рассматриваются экономико-математические методы оптимизации решений в условиях неполной информации. К ним относятся детерминированное приближение, стохастическое программирование, марковские модели принятия решений, имитационное моделирование и др. [7]

Большинство исследований посвящены следующим аспектам управления операционной активностью:

– определению размеров закупок оборотных материальных ресурсов и их запасов;

– определению оптимального размера партии готовой продукции или комплектующих;

– планированию операционной активности с резервированием готовой продукции.

Запасы материалов и комплектующих позволяют поддержать бесперебойную работу предприятия в ситуациях сбоя поставок, поломки оборудования и колебаний спроса. В то же время наличие запасов сопровождается расходами на их хранение. Задачи оптимизации размера закупок оборотных материальных ресурсов и их запасов сначала исследовалась в детерминированной постановке, позже – с учётом факторов неопределённости, в том числе с учётом недетерминированного спроса [7].

Задача оптимизации размера партии готовой продукции или комплектующих возникает в тех случаях, когда переход на производство очередной партии продукции требует переналадки станков. В связи с этим возникают противоречия между целями сокращения затрат на хранение продукции и уменьшением затрат на переналадку. Первая цель достигается путём уменьшения размера производимых партий продукции, а вторая, наоборот, требует увеличения размера партии.

В исследованиях, посвященных планированию операционной активности с резервированием готовой продукции, учитываются различные факторы, влияющие на эффективность резервирования. К таким факторам относятся: затраты на хранение произведенных изделий, затраты на создание запасов, ограничения на производственные мощности, потери вследствие неполного удовлетворения спроса. В работах [8, 9] для решения задачи планирования многопродуктового производства используется метод двухэтапного стохастического программирования. В [8] определяются оптимальные решения о поставках, производстве и запасах на протяжении нескольких периодов планирования, а критерием выступает минимум суммарных затрат системы с учётом затрат на хранение запасов материалов и готовой продукции. В [9] определяется оптимальное распределение количества рабочих и объёмов производства.

В работах [2, 10] проведено исследование задачи выбора текущих объёмов производства в условиях не полностью определённого спроса. При этом учтены возможные потери, связанные с отсутствием реализации части готовой продукции и с упущенной выгодой от недопроизводства продукции при наличии на неё спроса. Предполагалось, что цель организации состоит в получении максимального эффекта на заданном периоде времени. Эффект в общей форме может быть представлен значением известной функции $f(\eta, y)$, аргументами которой является случайная величина η с плотностью вероятности $p(x)$ и параметр y принимаемого решения. При этом $x \in X$, $y \in Y$, где X – множество возможных реализаций случайной величины η, Y – множество возможных значений y. В этой ситуации эффект (результат достижения цели) при любом выборе y оказывается случайной величиной. Величина $H(y) = \int\limits_{x \in X} f(x, y) p(x) \mathrm{d}x$ будет соответствовать математическому ожиданию эффекта для выбранного значения y. Решение $\hat{y}$, оптимальное по критерию максимума ожидаемого эффекта, определялось следующей формулой: $H(\hat{y}) = \max\{H(y) \mid y \in Y\}$.

Более сложная задача выбора текущих объёмов производства представляется в форме управления случайным процессом, проходящем в производственной системе предприятия. Состояния производственной системы частично случайны, а частично находятся под контролем лица, принимающего решения. На каждом периоде времени t система находится в некотором состоянии x_t, и лицо, принимающее решение, может выбрать любое действие y_t, которое ему доступно в состоянии x_t системы. На следующем периоде времени $t+1$ система случайным образом переходит в новое состояние x_{t+1}. При этом лицо, принимающее решение, получает на периоде времени $t+1$ вознаграждение $E_{t+1}=f_y(x_{t+1}, y_t)$. В задаче выбора действий (решений) y_t на повторяющихся периодах времени $t=1, 2, \ldots, T$ цель лица, принимающего решения, состоит в получении максимального суммарного вознаграждения (эффекта) E на интервале времени T, $E = \sum\limits_{t=1}^{T} E_t$.

Если для любого периода времени t, $1<t<T$ случайная величина x_{t+1} не зависит от состояний x_s и решений y_s, $s<t$, то управляемый случайный процесс соответствует марковскому процессу принятия решений. Если модель принятия решений по управлению некоторым случайным процессом соответствует марковскому процессу принятия решений, то эта модель называется

Марковская модель принятия решений использовалась в работах [11, 12] для отыскания оптимального управления динамической системой, находящейся под влиянием случайных факторов. Так, в [11] спрос описывался марковской цепью с двумя состояниями, и задача поиска оптимального размера партии была сформулирована как задача динамического программирования. В [12] описана вероятностная задача оптимального управления с непрерывным временем, в которой управлением выступают параметры интенсивности выпуска и ценовой политики. Спрос при этом моделируется пуассоновским распределением вероятности. Критерием оптимальности выступает максимум долгосрочной прибыли предприятия.

Под политикой оперативного планирования (принятия решений) в [13] понимается правило φ выбора на каждом периоде времени t решения y_t в зависимости от известного состояния x_t:y_t=φ(x_t) (t=1, 2,…, T). Обозначим как Φ множество таких политик φ, при которых значения параметра x_t (t=1, 2,…, T) состояния системы являются реализациями некоторой случайной величины и на всех периодах времени не зависят от решений y_t. В этом случае политики φ∈Φ оказываются марковскими моделями принятия решений. Для них оказывается принципиально возможным находить величины ожидаемого суммарного эффекта E, и после этого выбирать наиболее эффективную политику из множества Φ [13].

Если же политика φ такова, что решение y_t на периоде времени t оказывает влияние не только на состояние x_{t+1}, но и может оказывать влияние на последующие ситуации, то соответствующий процесс принятия решений не будет марковским. Исследование таких процессов вызывает принципиальные сложности, и оказывается результативным только в отдельных случаях.

3. Цель и задачи исследования

Цель исследования состояла в анализе и оценке эффективности политики операционной активности предприятия с резервированием готовой продукции. Полученные результаты исследования позволят повысить обоснованность управленческих решений по выбору политики операционной активности на предприятии с учётом задачи минимизации потерь в условиях случайного спроса.

Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

– проанализировать процесс операционной активности с резервированием продукции с учётом возникновения цепочек периодов активности с задержкой реализации созданных резервов в условиях случайных колебаний спроса;

– определить метод отыскания максимальной безопасной величины запаса продукции из условия его полной реализации в течение заданного количества периодов планирования;

– провести численные расчёты отыскания максимальной безопасной величины запаса продукции для случая нормального распределения случайной величины спроса;

– определить метод отыскания предельных значений интенсивностей возникновения различных цепочек периодов активности для выбранного максимального количества периодов, охватываемых резервированием;

– оценить эффективность операционной активности с резервированием готовой продукции на основе показателя предельной эффективности операционной активности.

4. Материалы и методы исследования

4. 1. Гипотеза исследования

Объектом исследования являлись процессы операционной активности предприятия с резервированием готовой продукции. Основная гипотеза исследования состояла в предположении, что политика оперативного планирования производства с резервированием готовой продукции является эффективной во многих условиях операционной активности предприятия.

Были приняты следующие допущения:

– нормативная производственная мощность предприятия совпадает с математическим ожиданием величины спроса;

– параметры закона распределения вероятности величины спроса не изменяются при использовании выбранной политики.

Исходные материалы исследования составили:

– модель оперативного планирования, использованная непосредственно или с незначительными модификациями в работах [2, 12, 8, 10, 13];

– результаты оценки эффективности политик оперативного планирования, приведенные в [13] и используемые для их сравнительного анализа с результатами настоящей работы.

4. 2. Модель оперативного планирования

В соответствии с моделью оперативного планирования процесс поступления и выполнения заказов на продукцию предприятия рассматривается на T периодах времени, имеющих одинаковую длительность. На каждом периоде времени t–1 проводится сбор заказов на продукцию предприятия и планируется объём производства на следующий период времени t. Периоды времени, для которых планируется объём производства, называются плановыми периодами.

Для каждого планового периода модель определяет множество допустимых (реализуемых) решений и зависимость операционного эффекта (прибыли) от принимаемых решений.

В модели были использованы такие обозначения: u_0 – количество изделий, производимых предприятием за плановый период времени при нормальной (нормативной) загрузке производственных мощностей; η – суммарный объём заказов, поступающих к началу каждого периода времени. Когда объём производства u_0 и интенсивность спроса η являются детерминированными постоянными величинами, и $u_0=\eta$, то производственная мощность предприятия используется равномерно с нормативной загрузкой. Если же величина спроса η является переменной случайной величиной, то ресурсы предприятия и поток заказов будут сбалансированы, если $u_0=\lambda_\eta$, где λ_η – математическое ожидание η. Однако в этой ситуации возникают потери, связанные с перегрузкой и недостаточной загрузкой производственной мощности.

Далее были введены следующие обозначения:

– x_t – объём заказов, поступивших к началу периода планирования t;

– u_t – объём производства за плановый период времени t;

– z_t – величина остатков готовой продукции на начало периода времени t;

– y_t – общее количество готовой продукции, которое будет в наличии на рассматриваемом периоде времени, $y_t=u_t+z_t$;

Зависимость операционного эффекта E_t, получаемого в конце периода t, от величины x_t поступивших заказов и планируемого количества y_t готовой продукции определяет функция $f(x_t, y_t)$:

$$E_t = f(x_t, y_t) = f_1(x_t, y_t) = dy_t - d(x_t - y_t) - q(u_t),$$

если

$$x_t \ge y_t; \tag{1}$$

$$E_t = f(x_t, y_t) = f_2(x_t, y_t) = dx_t - a(y_t - x_t) - q(u_t),$$

если

$$x_t \le y_t, \tag{2}$$

где $f_1(x_t, y_t)$, $f_2(x_t, y_t)$ – функции, определяющие эффект E_t соответственно в случаях упущенной выгоды и наличия нереализованной продукции; d – величина прибыли от продажи единицы продукции при её производстве в условиях нормативной загрузки производственной мощности; a – величина потерь, связанных с хранением запаса готовой продукции в течение одного периода планирования, в расчёте на единицу продукции; $d(x_t–y_t)$ – сумма потерь (упущенной выгоды) от недопроизводства продукции при наличии на неё спроса; $q(u_t)$ – величина потерь, обусловленных простоями или сверхнормативной загрузкой производственных мощностей, при этом $q(u_t)=b(u_0–u_t)$, если $u_0 \ge u_t$, $q(u_t)=c(u_t–u_0)$, если $u_0 \le u_t$; b – величина потерь на единицу продукции, которые вызываются простоями; c – величина потерь на единицу продукции, обусловленных сверхнормативной загрузкой производственных мощностей.

Величины x_t (t=1, 2, ..., T) объёмов заказов рассматривались как реализации на периодах времени t=1, 2, ..., T случайной величины η с известной функцией распределения вероятности $F_\eta(x)=P\{\eta \le x\}$, принимающей положительные значения на интервале $[0, x^{\max}]$ значений своего аргумента. В работе [2] описан алгоритм построения дискретной функции плотности вероятности η на основе ретроспективной информации об объёмах заказов на его продукцию.

Для определённости функции распределения вероятности случайных величин η предполагались симметричными относительно их математического ожидания:

$$\lambda_\eta = \frac{x^{\max}}{2}, \quad F_\eta(\lambda_\eta + \varepsilon) - F_\eta(\lambda_\eta) = F_\eta(\lambda_\eta) - F_\eta(\lambda_\eta - \varepsilon),$$

если

$$0 \le \varepsilon \le \lambda_\eta. \tag{3}$$

Условию симметричности удовлетворяет широкий класс законов распределения вероятности, в том числе нормальные, равномерные, «треугольные». Использование свойств симметричных законов позволяет упростить вид математических формул, их исследования и числовые расчеты в соответствии с ними.

Были введены обозначения T_m^+ и T^+, которые описывают соответственно множество и количество таких периодов планирования t, на которых $\eta_t \geq \lambda_\eta$. Аналогично T_m^- и T^- – это множество и количество операционных периодов t, на которых $\eta_t \leq \lambda_\eta$. Доли количеств периодов T^-, T^+ в общем количестве T периодов планирования составляют соответственно величины $P^- = T^-/T$, $P^+ = T^+/T$.

Если функция распределения вероятности величины η является симметричной функцией, то $P^- = P\{\eta \leq \lambda_\eta\} = P^+ = P\{\lambda_\eta \leq \eta\} = 0{,}5$. При этом величины P^-, P^+ имеют смысл вероятностей того, что для произвольного периода планирования t окажется, что либо $t \in T_m^-$, либо $t \in T_m^+$.

Задача исследования свойств процессов поступления и выполнения заказов со случайными объёмами вызвала необходимость использования также следующих двух величин:

$$\rho^- = \frac{1}{T^-} \sum_{t \in T_m^-} x_t, \quad \rho^+ = \frac{1}{T^+} \sum_{t \in T_m^+} x_t, \tag{4}$$

где ρ^- – среднее значение T^- реализаций $x_t, t \in T_m^-$ случайной величины η, ρ^+ – среднее значение T^+ реализаций $x_t, t \in T_m^+$ случайной величины η. При бесконечно большом значении количества T плановых периодов величины ρ^-, ρ^+ имеют смысл математических ожиданий случайной величины η при условии её попадания соответственно на интервалы $[0, \lambda_\eta]$, $[\lambda_\eta, x^{\max}]$. Нетрудно видеть, что $\rho^- + \rho^+ = 2\lambda_\eta$. Кроме того, в [2] показано, что с уменьшением дисперсии величины η до нуля величины $\lambda_\eta - \rho^-$, $\rho^+ - \lambda_\eta$ также уменьшаются до нуля.

4. 3. Оценка эффективности политик выполнения заказов и производства с постоянной интенсивностью

В работе [13] проведен анализ политик выполнения заказов и производства с постоянной интенсивностью в соответствии с рассмотренной моделью оперативного планирования. Приведём результаты оценки эффективности этих политик для возможности их последующего сравнения с оценками эффективности политики с резервированием готовой продукции.

В качестве показателя эффективности операционной активности предприятия на T периодах планирования использовалась величина ζ суммы эффектов E_t за периоды времени $t = 1, 2, \ldots, T$, отнесённая к максимальному ожидаемому эффекту $d\lambda_\eta T$ за эти периоды времени:

$$\zeta = \zeta(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \frac{E_t}{d\lambda_\eta}. \tag{5}$$

При бесконечно большом значении T показатель ζ трансформируется в показатель ζ* предельной эффективности операционной активности:

$$\zeta^* = \lim_{T\to\infty} \zeta(T). \tag{6}$$

В соответствии с политикой выполнения поступивших заказов объём производства u_t на текущий операционный период времени t выбирается равным объёму x_t поступивших заказов. Полагая, что остатки z_0 готовой продукции на начало планирования отсутствуют, имеем: $y_t=x_t$, $z_t=0$, $E_t=dx_t-q_t$ на каждом периоде $t=1, 2, ..., T$.

Показатель $\zeta_{ВПЗ}$ эффективности операционной активности на T периодах планирования для политики выполнения поступивших заказов можно представить в следующем виде: $\zeta_{ВПЗ}=1-S_1-S_2$, где

$$S_1 = \frac{c}{d\lambda_\eta T}\sum_{t\in T_m^+}\left(x_t-\lambda_\eta\right) = \frac{cP^+}{d\lambda_\eta T^+}\left(\sum_{t\in T_m^+} x_t - T^+\lambda_\eta\right) = \frac{cP^+}{d\lambda_\eta}\left(\rho^+-\lambda_\eta\right); \tag{7}$$

$$S_2 = \frac{b}{d\lambda_\eta T}\sum_{t\in T_m^-}\left(\lambda_\eta - x_t\right) = \frac{bP^-}{d\lambda_\eta T^-}\left(T^-\lambda_\eta - \sum_{t\in T_m^-} x_t\right) = \frac{bP^-}{d\lambda_\eta}\left(\lambda_\eta-\rho^-\right). \tag{8}$$

Таким образом, было получено:

$$\zeta_{ВПЗ} = 1 - \frac{1}{d\lambda_\eta}\left(cP^+\left(\rho^+-\lambda_\eta\right) + bP^-\left(\lambda_\eta-\rho^-\right)\right). \tag{9}$$

Поскольку функция распределения вероятности величины η предполагается симметричной, то $P^-=P^+=0,5$, $\rho^-+\rho^+=2\lambda_\eta$, $\rho^+=2\lambda_\eta$-ρ^-. Тогда

$$\zeta^*_{ВПЗ} = 1 - \frac{1}{2d\lambda_\eta}\left(c\left(\lambda_\eta-\rho^-\right) + b\left(\lambda_\eta-\rho^-\right)\right) = 1 - \frac{\lambda_\eta-\rho^-}{2d\lambda_\eta}(b+c). \tag{10}$$

Из (10) видно, что с увеличением показателей b, c удельных затрат от 0 до d показатель $\zeta^*_{ВПЗ}$ предельной эффективности уменьшается от 1 до $\frac{\rho^-}{\lambda_\eta}$.

В случае применения политики производства с постоянной интенсивностью объём производства u_t на операционный период времени t определяется по формуле: $u_t=\min\{x_t, u_0\}$. Поэтому $y_t=u_t$, $z_t=0$,

$$E_t = \begin{cases} d\lambda_\eta - d\left(x_t-\lambda_\eta\right), & \text{если} \quad \lambda_\eta \le x_t, \quad t\in T_m^+, \\ dx_t - b\left(\lambda_\eta - x_t\right), & \text{если} \quad \lambda_\eta \ge x_t, \quad t\in T_m^-. \end{cases} \tag{11}$$

Исходя из этого, показатель $\zeta^*_{\text{ппи}}$ предельной эффективности операционной активности для политики производства с постоянной интенсивностью был выражен формулой:

$$\zeta^*_{\text{ппи}} = 1 - P^+ \frac{\rho^+ - \lambda_\eta}{\lambda_\eta} - P^- \frac{b\left(\lambda_\eta - \rho^-\right)}{d\lambda_\eta}. \tag{12}$$

С учётом того, что $P^-=P^+=0{,}5$, $\rho^+ = 2\lambda_\eta - \rho^-$, было получено:

$$\zeta^*_{\text{ппи}} = 1 - \frac{\left(\lambda_\eta - \rho^-\right)}{2d\lambda_\eta}(b + d). \tag{13}$$

Поскольку $d>c$, то в случае политики производства с постоянной интенсивностью значение $\zeta_{\text{ППИ}}$ показателя эффективности ζ ниже, чем его значение $\zeta_{\text{ВПЗ}}$ при политике выполнения поступивших заказов. Это обусловливается потерями, связанными с упущенной выгодой, которые сопровождают производство с постоянной интенсивностью.

4. 4. Методы исследования

Особенности настоящего исследования определяют методы, использованные для его проведения. Общий подход к исследованию управляемых случайных процессов основан на методе оценки эффективности политики принятия решений с помощью показателя предельной эффективности ζ^*, определяемого формулой (6). Этот показатель выражает отношение математического ожидания операционного эффекта к максимально возможному эффекту на периоде планирования. Показатели эффективности на ограниченном количестве периодов, использованные в ряде цитированных работ, отражают особенности реализации спроса на этих периодах. В сравнении с ними показатель предельной эффективности обладает несомненным преимуществом, поскольку определяет оценку эффективности объективно, вне зависимости от выбранных периодов. Кроме того, оценка эффективности на основе показателя ζ^* не зависит от величины математического ожидания спроса. Поэтому показатель ζ^* позволяет оценивать качество плановых решений безотносительно к интенсивности спроса. По причине потерь, возникающих на периодах планирования из-за отклонения объёмов заказов от величины их математического ожидания λ_η, значение показателя ζ^* не превышает 1.

Поскольку случайный процесс, определяемый политикой с резервированием готовой продукции, не обладает марковским свойством, то его исследование потребовало разработки специальных методов исследования. В ходе операционной активности предприятия с резервированием продукции возникают цепочки резервирования, состоящие из последовательных периодов оперативного планирования, на которых создаётся и сохраняется резерв продукции из-за недостаточного объёма поступающих заказов. Исследование соответствующего случайного процесса активности основано на методе ограничения длительности «залёживания» резерва продукции и методе балансирования для определения ожидаемых интенсивностей возникновения цепочек.

В соответствии с методом ограничения длительности «залёживания» продукции её начальный резерв должен выбираться так, чтобы цепочка резервирования завершалась на заданном количестве периодов с вероятностью, близкой к единице. При этом, чем большее количество периодов допускается при резервировании, тем большей оказывается максимальная величина безопасного резерва. Метод ограничения длительности «залёживания» позволяет детализировать политику резервирования в зависимости от предполагаемого максимального количества периодов резервирования. Применение метода балансирования обусловлено необходимостью определения ожидаемого экономического эффекта на совокупностях цепочек резервирования отдельных видов и в результате – для оценки эффективности политики резервирования в целом.

5. Результаты исследования политики операционной активности с резервированием продукции

5. 1. Анализ процесса операционной активности с резервированием продукции

В соответствии с политикой резервирования готовой продукции на некоторых периодах планирования $t=k+1$ с ожидаемыми простоями, $\{k+1\} \in T_m^-$, объём производства устанавливается в размере u_{k+1}, который может превышать объём x_{k+1} поступивших заказов:

$$u_{k+1} = \min\left\{x_{k+1} + \delta, \lambda_\eta\right\}, \tag{14}$$

где δ – заданная политикой производства с резервированием максимальная величина резерва готовой продукции. Выбор объёмов производства в соответствии с (14) позволяет исключить возможность появления на периоде $k+1$ потерь, связанных с перегрузкой производственных мощностей.

Таким образом, к началу периода планирования $k+2$ создаётся резерв готовой продукции в размере $z_{k+1}=u_{k+1}-x_{k+1}\geq 0$. Если на периоде $k+2$ оказывается, что $x_{k+2}-z_{k+1}\geq 0$, то объём производства на этом периоде устанавливается в размере $u_{k+2}=x_{k+2}-z_{k+1}$. Если $x_{k+2}-z_{k+1}<0$, то принимается, что $u_{k+2}=0$ и процесс «обнуления» объёмов производства будет продолжаться на следующих периодах $t \in T_m^-$ до такого периода $k+r$, что

$$\sum_{t=k+1}^{k+r-1} x_t < z_{k+1} \leq \sum_{t=k+1}^{k+r} x_t. \tag{15}$$

В работе предложено трактовать последовательность $k+1, k+2, \ldots, k+r$ периодов планирования как завершённую цепочку резервирования, а последовательность $k+1, k+2, \ldots, k+p,\ p<r$ – как незавершённую цепочку. Количество r

периодов планирования, которые охватывает завершённая цепочка резервирования, предложено называть длиной цепочки. Последовательность $k+1$, $k+2$, ..., $k+r$ будет представлять завершённую цепочку резервирования 1-го типа, если $\{k+r\} \in T_m^-$, и завершённую цепочку резервирования 2-го типа, если $\{k+r\} \in T_m^+$. Для удобства изложения периоды планирования $t \in T_m^+$, не входящие в цепочки резервирования, названы цепочками 0-го типа.

Показатели операционной активности на периодах цепочки резервирования длиной r принимают следующие значения:

$$u_{k+p} = 0 \; (p = 2, 3, \ldots, r-1),$$

$$u_{k+r} = x_{k+r} - \left(z_{k+1} - \sum_{t=k+2}^{k+r-1} x_t \right); \tag{16}$$

$$z_{k+p} = z_{k+1} - \sum_{t=k+2}^{k+p} x_t \; (p = 2, 3, \ldots, r-1), \; z_{k+r} = 0; \tag{17}$$

$$a_{k+p} = a z_{k+p} \; (p = 1, 2, \ldots, r); \tag{18}$$

$$b_{k+1} = b\left(\lambda_\eta - u_{k+1}\right), \; b_{k+p} = b\lambda_\eta \; (p = 2, \ldots, r-1),$$

$$b_{k+r} = b \max\left\{\lambda_\eta - u_{k+r}, 0\right\}; \tag{19}$$

$$c_{k+p} = 0 \; (p = 1, 2, \ldots, r-1), \; c_{k+r} = c \max\left\{u_{k+r} - \lambda_\eta, 0\right\}, \tag{20}$$

где a_t, b_t, c_t – потери, связанные соответственно с хранением запаса продукции, простоями и сверхнормативной загрузкой мощностей на t-м периоде планирования.

В результате сравнения потерь на двухпериодных цепочках при политике с резервированием, с одной стороны, и на тех же двух периодах для политики выполнения заказов, с другой стороны, были получены следующие выводы. На периодах цепочек 1-го типа величины потерь от простоев для обеих политик являются одинаковыми. При использовании политики с резервированием на цепочках 2-го типа уменьшаются как потери от простоев на периодах $k+1$, так и потери от сверхнормативной загрузки мощностей на периодах $k+2$. Однако применение политики с резервированием приводит к потерям, связанных с отсутствием реализации готовой продукции в размере z_{k+1}. При этом потери в связи с резервированием готовой продукции возрастают с увеличением длин цепочек резервирования.

5. 2. Отыскание максимальной безопасной величины запаса продукции

Для оценки эффективности политики производства с резервированием выбор величины δ резерва готовой продукции должен предоставлять возможность предвидения максимальной длины цепочки резервирования. Поскольку законы распределения вероятности η предполагаются симметричными, то при любой величине $z_{k+1} \le \delta < \lambda_\eta$ вероятность того, что цепочка длиной r будет завершённой, является не меньше величины $1\text{-}(0{,}5)^r$. Теоретически могут возникать цепочки с «почти бесконечной» длиной. Но вероятность их возникновения будет чрезвычайно малой для того, чтобы учитывать её на практике. Если задать минимальную вероятность Q^*, которую следует учитывать, то определится и максимальная длина $r=r(Q^*)$ цепочки, с возникновением которой необходимо будет считаться.

Вероятность Q_p того, что в условиях наличия незавершённой цепочки резервирования на периодах $k+1, k+2, \ldots, k+p\text{-}1$, $p \ge 2$, она останется незавершённой на периоде $k+p$ определяют следующие формулы:

$$Q_p = P\left\{\sum_{t=k+2}^{k+p} \eta_t < \delta\right\} = P\left\{\chi(p-1) < \delta\right\} = F_{p-1}(\delta), \tag{21}$$

где $\chi(p\text{-}1)$ случайная величина суммы интенсивностей спроса η_t за $p\text{-}1$ периодов $k+2, k+3, \ldots, k+p$, $\chi(p-1) = \sum_{t=k+2}^{k+p} \eta_t$, $F_{p-1}(x)$ – функция распределения случайной величины $\chi(p\text{-}1)$, $F_1(x)=F_\eta(x)$.

Однако, чтобы цепочка резервирования с началом на периоде $k+1$ могла закончиться на периоде $k+p$, $p \ge 3$, она не должна завершаться на более ранних периодах. Вероятность наличия незавершённой цепочки резервирования на периодах $k+1, k+2, \ldots, k+p-1$, и её продолжения после периода $k+p$, определяет величина $U_{p-1}Q_p$, где U_{p-1} – вероятность возникновения незавершённой цепочки резервирования на периодах $k+1, k+2, \ldots, k+p-1$,

$$\begin{aligned} U_{p-1} &= P\left\{\eta_{k+1} \le \lambda_\eta\right\} * Q_2 * Q_3 * \ldots * Q_{p-1} = \\ &= 0{,}5 * F_1(\delta) * F_2(\delta) * \ldots * F_{p-2}(\delta). \end{aligned} \tag{22}$$

Цепочка резервирования, которая заканчивается на периоде $k+p$, является цепочкой 1-го типа с вероятностью

$$\begin{aligned} R_{p1} &= U_{p-1} * P\left\{\delta - \sum_{t=k+1}^{k+p-1} x_t \le \eta_{k+p} \le \lambda_\eta\right\} = \\ &= U_{p-1}\left(F_{p-1}(\lambda_\eta) - F_{p-1}(\delta)\right) = \\ &= U_{p-1}\left(0{,}5 - Q_p\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Цепочка резервирования, которая заканчивается на периоде $k+p$, является цепочкой 2-го типа с вероятностью

$$R_{p2} = U_{p-1} * P\left\{\eta_{k+p} > \lambda_{\eta}\right\} = 0{,}5U_{p-1}. \qquad (24)$$

Если предприятие рассчитывает, что длина цепочки не будет превышать r периодов, то величина δ должна удовлетворять требованию: $\delta \le \delta^*_{r-1}$, где δ^*_{r-1} – максимальная безопасная величина запаса продукции, создаваемого на периоде $k+1$ из расчёта его полной реализации на периоде $k+r$. В соответствии с формулами (22), (24) величина δ^*_{r-1} находится как решение уравнения:

$$0{,}5 * F_1(\delta) * F_2(\delta) * \ldots * F_{r-2}(\delta) * F_{r-1}(\delta) = Q^*, \qquad (25)$$

где Q^* – граничная вероятность того, что на r-м периоде цепочки резервирования запас продукции не будет полностью реализован. Очевидно, что граничная вероятность Q^* должна быть пренебрежимо малой величиной. Если величина δ^*_{r-1} установлена, то величины $Q^*_p = F_{p-1}\left(\delta^*_{r-1}\right)$ определяют вероятности того, что цепочка резервирования, составленная из p периодов, $p=2, 3, \ldots, r$, будет продолжена на $(p+1)$-й период.

Поскольку политика операционной активности с резервированием предполагает выбор максимальной длины цепочки резервирования, то для уточнения в работе предложено использовать термин «политика с r-периодным резервированием», при проведении которой могут возникать цепочки резервирования, охватывающие p периодов планирования, $p=1, 2, \ldots, r$.

В соответствии с (25) максимальная безопасная величина δ^*_1 запаса продукции для двухпериодного резервирования определяется из условия: $0{,}5F_1(\delta)=0{,}5F_{\eta}(\delta)=Q^*$. Отсюда следует, что

$$\delta^*_1 = F^-_{\eta}\left(2Q^*\right), \qquad (26)$$

где $F^-_{\eta}(\ldots)$ – функция, обратная к функции $F_{\eta}(\ldots)$. Цепочка резервирования будет цепочкой 1-го типа с вероятностью $0{,}5\left(0{,}5 - F_{\eta}\left(\delta^*_1\right)\right) = 0{,}5\left(0{,}5 - 2Q^*\right) \approx 0{,}25$ и цепочкой 2-го типа с вероятностью $0{,}5*0{,}5=0{,}25$.

Максимальная безопасная величина δ^*_2 запаса продукции для трёхпериодного резервирования определяется из условия: $0{,}5F_1(\delta) * F_2(\delta) = Q^*$. Пусть P_{ip} – вероятности возникновения на произвольном периоде t операционной активности цепочек резервирования i-го типа, $i=1, 2$, с длинами $p=2, 3$, а P_p – вероятности возникновения цепочек резервирования обоих типов с длинами $p=2, 3$. Тогда в соответствии с (22)–(24):

$$P_{12} = 0,5\left(0,5 - Q_2^*\right);\ P_{22} = 0,25;$$

$$P_2 = P_{12} + P_{22} = 0,5\left(1 - Q_2^*\right); \tag{27}$$

$$P_{13} = 0,5Q_2^*\left(0,5 - Q_3^*\right) \approx 0,25Q_2^*;\ P_{23} = 0,25Q_2^*;$$

$$P_3 = P_{13} + P_{23} = 0,5Q_2^*, \tag{28}$$

где $Q_2^* = F_\eta\left(\delta_2^*\right),\ Q_3^* = F_2\left(\delta_2^*\right),\ 0,5Q_2^*Q_3^* = Q^* \approx 0.$

Как можно видеть, P_2+P_3=0,5. Следовательно, при условии, что $t \in T_m^-$, сумма вероятностей возникновения всех цепочек 1-го и 2-го типов на этом периоде составляет единицу: 2(P_2+P_3)=1.

Политика с резервированием продукции, в отличие от других политик, предполагает использование не только информации об объёмах поступивших заказов, но и прогнозов спроса, которые находят отражение в функциях $F_p(x)$, p=1, 2,…. Информационной основой для отыскания этих функций выступает плотность вероятности величины η интенсивности спроса, которая может определяться по ретроспективной информации об объёмах поступавших заказов.

Очевидно, что задача отыскания функций $F_p(x)$, p=1, 2,… сводится к отысканию плотности вероятности случайной величины $\chi(p) = \sum_{t=1}^{p} \eta_t$ по заданной плотности вероятности величины η интенсивности спроса. Идея алгоритма расчёта плотности вероятности суммы нескольких случайных дискретных величин, заданных своими плотностями вероятности, состоит в следующем. Каждое слагаемое η_t величины $\chi(p)$ рассматривается как источник t поступления заказов с объёмами $\bar{h}_{rt}$ и вероятностями p_{rt}, r=1, 2,…, R, где R – количество значений, которые может принимать дискретная случайная величина η интенсивности спроса. Пара $s_t = \left(\bar{h}_{rt}, p_{rt}\right)$ определяет состояние t-го источника, а вектор s=(s_t, t=1, 2,…, p) – состояние всех p источников. Совокупности всех векторов s соответствует множество взаимоисключающих событий за интервал времени, охватывающий p периодов. При этом вектор состояния s однозначно определяет суммарный объём заказов за интервал времени p и его вероятность, которые соотносятся со значением $\chi(p)$ и его вероятностью.

Адекватность прогнозирования может быть повышена путём уточнения на каждом текущем периоде планирования плотности вероятности η за счёт использования не только статистических, но и экспертных оценок, учитывающих особенности формирования спроса на ближайших будущих периодах.

5. 3. Примеры численных расчётов максимальных безопасных величин запаса продукции

Для апробации предложенного подхода в работе были рассмотрены численные примеры отыскания значений δ_1^*. Было использовано предположение о том, что случайная величина η имеет нормальное распределение с заданным математическим ожиданием λ_η и дисперсией σ_η^2. Для расчётов использовались табличные значения функции $\Phi_0(t)=\Phi(t)–0{,}5$, где $\Phi(t)$ – функция нормированного и центрированного нормального распределения, $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\frac{-u^2}{2}}\mathrm{d}u$.

Соответствующие табличные данные приводятся в справочниках. С помощью этих данных значение функции $F(x)$ любого нормального распределения с математическим ожиданием λ и дисперсией σ^2 находится для $x\le\lambda$ следующим образом: $F(x)=0{,}5-\Phi_0\left(t=\frac{\lambda-x}{\sigma}\right)$.

Для отыскания значения аргумента функции $F(x)$, при котором она принимает заданное значение $Q\le0{,}5$, была использована следующая формула:

$$x=\lambda-\sigma\Phi_0^{-1}(0{,}5-Q), \qquad (29)$$

где $\Phi_0^{-1}(\ldots)$ – функция, обратная к функции $\Phi_0(t)$. Действительно, величине $t_y=\Phi_0^{-1}(0{,}5-Q)$ соответствует такая величина $y=\lambda+\sigma t_y$, что $F(y)=0{,}5+\Phi_0(t_y)=1–Q$. Из свойства симметричности функции $F(x)$ следует:

$$F(y=\lambda+z)-F(\lambda)=0{,}5-Q=F(\lambda)-F(\lambda-z), \qquad (30)$$

где $z=y–\lambda=\sigma t_y$. Поэтому $F(\lambda–z)=Q$, $x=\lambda\text{-}z=\lambda–\sigma t_y$.

С высокой точностью можно полагать, что функция $\Phi(t)$ принимает положительные значения только на интервале $[t^{min}, t^{max}]$, где t^{min}=-5, t^{max}=5. Поэтому можно считать, что произвольная функция $F(x)$ нормального распределения принимает положительные значения на интервале $[x^{min}, x^{max}]$, где $x^{min}=\lambda+\sigma t^{min}$, $x^{max}=\lambda+\sigma t^{max}$.

Для рассматриваемых функций $F_\eta(x)$, для которых x^{min}=0, является справедливым, что $\lambda_\eta=\sigma_\eta t^{max}=5\sigma_\eta$, $x^{max}=2\sigma_\eta t^{max}=10\sigma_\eta$. Из (29) следует, что $\delta_1^*=\lambda_\eta-\sigma_\eta t^*=\sigma_\eta\left(t^{max}-t^*\right)=\sigma_\eta\left(5-t^*\right)$, где $t^*=\Phi_0^{-1}(0{,}5-Q)$, а в соответствие с формулой (26) $Q=2Q^*$. Таким образом, значение δ_1^* полностью определяется величинами σ_η, Q^*. Как можно видеть, с уменьшением среднего квадратичного отклонения σ_η до 0 величина δ_1^* уменьшается до 0. С уменьшением до 0 граничной вероятности Q^* величина t^* увеличивается до t^{max}=5, а значение δ_1^* уменьшается до 0. Величина υ относительного максимального резерва продукции зависит только от граничной вероятности Q^*:

$$\upsilon = \frac{\delta_1^*}{\lambda_\eta} = 1 - \frac{t^*}{t^{\max}} = 1 - 0,2t^*. \qquad (31)$$

В табл. 1 приведены абсолютные δ_1^* и относительные υ значения максимального запаса продукции для двухпериодного резервирования в зависимости от значений граничной вероятности Q^* и среднего квадратичного отклонения σ_η.

Таблица 1
Значения запаса продукции для двухпериодной цепочки резервирования и нормальном законе распределения η

$Q=2Q^*$	t^*	σ_η	λ_η	δ_1^*	υ
0,005	2,58	1	5	2,42	0,484
0,01	2,33	1	5	2,67	0,534
0,05	1,65	1	5	3,35	0,670
0,005	2,58	2	10	4,84	0,484
0,01	2,33	2	10	5,34	0,534
0,05	1,65	2	10	6,70	0,670
0,005	2,58	5	25	12,10	0,484
0,01	2,33	5	25	13,35	0,534
0,05	1,65	5	25	16,75	0,670

Из приведенной табл. 1 следует, что создание запаса δ_1^* продукции требует дополнительной загрузки производственной мощности в размере, близком к половине её нормативной величины $u_0=\lambda_\eta$. С высокой вероятностью объёмы производства $u_{k+1} = x_{k+1} + \delta_1^*$ будут близкими к нормативной величине мощности или даже превосходить её. Поэтому при нормальном законе распределения η отсутствует необходимость в увеличении δ_1^*.

5. 4. Оценка интенсивностей возникновения цепочек периодов

Пусть N – количество периодов планирования, на которых рассматривается процесс операционной активности. Поскольку любая цепочка периодов однозначно определяется своим начальным периодом $k+1$, то в конце периода T могут быть определены множества U_{ip}^m цепочек одинакового типа i, $i=0, 1, 2,$ и одинаковой длительности p ($p=1$ для всех цепочек 0-го типа, $p=2, 3, \ldots, r$ для цепочек 1-го и 2-го типов). Эти множества однозначно определяют количества K_{ip} цепочек различных типов и различной длительности, а также интенсивности $k_{ip} = \frac{1}{T} K_{ip}$ возникновения цепочек, представляющие собой количества цепочек различных видов, приходящиеся на один период планирования.

Таким образом, в процессе операционной активности с резервированием продукции, складываются цепочки периодов определённого типа и длительности. В этом отношении процесс операционной активности может рассматриваться как процесс формирования комплекса различных цепочек. Информацию о ходе этого процесса в течение T периодов содержат множества U_{ip}^{m}. Текущее состояние процесса на конец текущего периода T будет отображать вектор, составленный из величин интенсивностей k_{ip} возникновения цепочек.

Представим себе эксперимент, в ходе которого на интервале времени с длительностью T периодов проходило генерирование величин x_t, t=1, 2,…, T, соответствующих закону распределения η, и принимались решения об объёмах производства в соответствии с политикой резервирования. Предположим, что длительность T времени эксперимента является достаточно большой, чтобы в ходе его проявились статистические характеристики случайной величины η, в частности, чтобы выполнялось условие: $T^{-}\approx T^{+}\approx 0{,}5T$. Тогда в случае проведения повторного эксперимента с такой же длительностью T окажется, что заметно изменится состав множеств U_{ip}^{m}, однако будут незначительными изменения количеств K_{ip} различных цепочек и интенсивностей k_{ip} их возникновения.

Значения интенсивностей k_{ip} при $T\to\infty$ предложено называть предельными значениями интенсивностей возникновения цепочек (i, p). Они представляют собой математические ожидания средних значений количеств цепочек на интервале времени, охватывающем T периодов планирования. Ясно, что на начальных периодах операционной активности интенсивности k_{ip} значительно изменяются. По мере увеличения T отклонения текущих значений интенсивностей от предельных уменьшаются, и при больших значениях T состояние процесса формирования цепочек стабилизируется в соответствии с предельными значениями интенсивностей.

Для оценки эффективности политики с резервированием возникает необходимость в оценке предельных интенсивностей возникновения цепочек различного вида и в статистической оценке экономического эффекта, получаемого на совокупности цепочек каждого вида. Для отыскания предельных интенсивностей в работе был использован метод балансирования, предполагающий совпадение общего количества периодов $t\in T_m^{-}$ с количеством периодов $t\in T_m^{+}$, требующихся для формирования различных цепочек.

Было рассмотрено применение этого метода для двухпериодного резервирования. Поскольку для завершающего периода t двухпериодной цепочки вероятности того, что $t\in T_m^{-}$ и того, что $t\in T_m^{+}$ одинаковы, равны 0,5, то количество K_{12} цепочек резервирования 1-го типа совпадает с количеством K_{22} цепочек резервирования 2-го типа. При этом $K_{12}+K_{22}=G$, где G – количество всех начальных периодов $t\in T_m^{-}$ в цепочках резервирования. Поэтому общее количество периодов $t\in T_m^{-}$ в цепочках резервирования составляет величину $K_{12}+G=1{,}5G$ и эта величина должна совпадать с половиной количества периодов T. Следовательно, $1{,}5G=0{,}5T$, $G=T/3$, $K_{12}=K_{22}=T/6$. Количество цепочек 0-го типа (периодов $t\in T_m^{+}$, не входящих в цепочки резервирования), определяется величиной $K_{01}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)T=\frac{T}{3}$. Тогда предельные интенсивности возникновения цепочек составляют величины: k_{01}=1/3, k_{12}=k_{22}=1/6. Если для примера принять, что интервал планирования T включает 12 периодов, то этот интервал будет содержать 2 двухпериодные цепочки 1-го типа, 2 двухпериодные цепочки 2-го типа и 4 однопериодные цепочки с периодами $t \in T_m^+$.

5. 5. Оценка эффективности операционной активности с резервированием продукции

Для решения задачи оценивания эффективности операционной активности с резервированием продукции были введены следующие обозначения: H_i – средний за T периодов планирования эффект на цепочке i-го типа, i=0, 1, 2; E_i – математическое ожидание эффекта на цепочке i-го типа, i=0, 1, 2.

Показатель $\zeta_{\text{РГП}}$ эффективности операционной активности на T периодах планирования предложено рассчитывать в форме трёх составляющих частей:

$$\zeta_{\text{РГП}} = S_0 + S_1 + S_2, \tag{32}$$

где S_0 – составляющая показателя эффективности, образованная периодами планирования $t \in T_m^+$, не входящими в цепочки резервирования; S_1 – составляющая показателя эффективности, образованная цепочками резервирования 1-го типа; S_2 – составляющая показателя эффективности, образованная цепочками резервирования 2-го типа. При этом

$$S_0 = \frac{k_{01}}{d\lambda_\eta} E_0, \quad S_1 = \frac{k_{12}}{d\lambda_\eta} E_1, \quad S_2 = \frac{k_{22}}{d\lambda_\eta} E_2. \tag{33}$$

Далее были найдены величины H_i, E_i (i=0, 1, 2). Для упрощения выкладок было принято, что выбранная предприятием величина δ резерва не превосходит $\lambda_\eta - \rho^-$: $\delta = \min\left\{\delta_1^*, \lambda_\eta - \rho^-\right\}$, где ρ^- – математическое ожидание случайной величины η при условии её попадания на интервал $[0, \lambda_\eta]$.

Средний за N периодов планирования эффект на цепочке 0-го типа определяет величина

$$H_0 = \frac{1}{K_{01}} \sum_{t \in U_{01}^m} \left(dx_t - c\left(x_t - \lambda_\eta\right)\right) = \frac{1}{K_{01}} \left((d - c) \sum_{t \in U_{01}^m} x_t + c\lambda_\eta U_0 \right) = \\ = (d - c) I + c\lambda_\eta, \tag{34}$$

где $I = \frac{1}{K_{01}} \sum_{t \in U_{01}^m} x_t$ – среднее значение U_0 реализаций $x_t \in T_m^+$ случайной величины η.

При бесконечно большом значении T величина I совпадает с математическим ожиданием ρ^+ случайной величины η при условии её попадания на интервал $[\lambda_\eta, x^{\max}]$. Тогда

$$E_0 = (d - c)\rho^+ + c\lambda_\eta,$$

$$S_0 = \frac{k_{01}}{d\lambda_\eta} E_0 = \frac{1}{3d\lambda_\eta}\left((d - c)\rho^+ + c\lambda_\eta\right). \tag{35}$$

Было принято обозначать как x^t_{k+1}, x^t_{k+2} объёмы заказов на каждой цепочке t резервирования. Поскольку эффект на цепочке t резервирования 1-го типа определяет величина

$$H_{1t} = d\left(x^t_{k+1} + x^t_{k+2}\right) - b\left(2\lambda_\eta - \left(x^t_{k+1} + x^t_{k+2}\right)\right) - a\delta, \tag{36}$$

то средний эффект на цепочке 1-го типа выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{K_{12}} \sum_{t \in U^m_{12}} H_{1t} = \frac{1}{K_{12}} \sum_{t \in U^m_{12}} \left((d + b)\left(x^t_{k+1} + x^t_{k+2}\right) - 2b\lambda_\eta - a\delta^*_1\right) = \\ &= (d + b)(I_1 + I_2) - 2b\lambda_\eta - a\delta^*_1, \end{aligned} \tag{37}$$

где I_1 – среднее значение K_{12} реализаций x^t_{k+1}, $\{k+1\} \in T^-_m$, величины η,

$$I_1 = \frac{1}{K_{12}} \sum_{k \in U^m_{12}} x^t_{k+1}; \tag{38}$$

I_2 – среднее значение K_{12} реализаций x^t_{k+2}, $\{k+2\} \in T^-_m$, величины η,

$$I_2 = \frac{1}{K_{12}} \sum_{k \in U^m_{12}} x^t_{k+2}. \tag{39}$$

При бесконечно большом значении T оказывается, что $I_1=I_2=\rho^-$. Поэтому

$$E_1 = 2(d + b)\rho^- - 2b\lambda_\eta - a\delta^*_1, \tag{40}$$

$$S_1 = \frac{k_{12}}{d\lambda_\eta} E_1 = \frac{1}{3d\lambda_\eta}\left(d\rho^- - 0{,}5a\delta^*_1 - b\left(\lambda_\eta - \rho^-\right)\right). \tag{41}$$

С учетом того, что $\rho^-+\rho^+=2\lambda_\eta$, $\rho^+=2\lambda_\eta-\rho^-$, было получено:

$$
\begin{aligned}
S_0 + S_1 &= 2(d-c)\rho^{+} + 2c\lambda_{\eta} + 2d\rho^{-} - 2b\left(\lambda_{\eta} - \rho^{-}\right) - a\delta_1^{*} = 4d\lambda_{\eta} + \\
&+ \left(-4\lambda_{\eta} - 2\rho^{-} + 2\lambda_{\eta}\right)c - 2b\left(\lambda_{\eta} - \rho^{-}\right) - a\delta_1^{*} = \\
&= 4d\lambda_{\eta} - 2\left(\lambda_{\eta} - \rho^{-}\right)c - 2b\left(\lambda_{\eta} - \rho^{-}\right) - a\delta_1^{*}.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Эффект на цепочке t резервирования 2-го типа выражается следующей величиной:

$$
H_{2t} = d\left(x_{k+1}^{t} + x_{k+2}^{t}\right) - b\left(\lambda_{\eta} - x_{k+1}^{t}\right) - c\left(x_{k+2}^{t} - \lambda_{\eta}\right) + \delta_1^{*}(b + c - a). \tag{43}
$$

Тогда

$$
H_2 = \frac{1}{K_{22}} \sum_{t \in U_{22}^{m}} H_{2t} = (d + b) I_3 + (d + c) I_4 + \delta_1^{*}(b + c - a) - (b - c)\lambda_{\eta}, \tag{44}
$$

где I_3 – среднее значение K_{22} реализаций x_{k+1}^{t}, $\{k+1\} \in T_m^{+}$, величины η,

$$
I_3 = \frac{1}{K_{22}} \sum_{k \in U_{22}^{m}} x_{k+1}^{t}; \tag{45}
$$

I_4 – среднее значение K_{22} реализаций x_{k+2}^{t}, $\{k+2\} \in T_m^{+}$, величины η,

$$
I_4 = \frac{1}{K_{22}} \sum_{k \in U_{22}^{m}} x_{k+2}^{t}. \tag{46}
$$

При бесконечно большом значении T величины I_3, I_4 совпадают с математическими ожиданиями ρ^{-}, ρ^{+} значений случайной величины η соответственно на интервалах $[0, \lambda_{\eta}]$, $[\lambda_{\eta}, x^{\max}]$. Поэтому

$$
E_2 = d\rho^{-} - b\left(\lambda_{\eta} - \rho^{-} - \delta_1^{*}\right) + d\rho^{+} - c\left(\rho^{+} - \lambda_{\eta} - \delta_1^{*}\right) - a\delta_1^{*}. \tag{47}
$$

Поскольку $\rho^{-}+\rho^{+}=2\lambda_{\eta}$, $\rho^{+}=2\lambda_{\eta}-\rho^{-}$, то

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{k_{22}}{d\lambda_{\eta}} E_2 = \frac{1}{6d\lambda_{\eta}} \begin{pmatrix} 2d\lambda_{\eta} - b\left(\lambda_{\eta} - \rho^{-}\right) - \\ -c\left(\rho^{+} - \lambda_{\eta}\right) + \delta_1^{*}(b + c - a) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{6d\lambda_{\eta}} \begin{pmatrix} 2d\lambda_{\eta} - b\left(\lambda_{\eta} - \rho^{-}\right) - \\ -c\left(\lambda_{\eta} - \rho^{-}\right) + \delta_1^{*}(b + c - a) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{48}
$$

В результате показатель $\zeta^*_{\text{РГП}}$ предельной эффективности операционной активности для политики с резервами готовой продукции был выражен следующими формулами:

$$\zeta^*_{\text{РГП}} = \frac{1}{6d\lambda_\eta}\begin{pmatrix} 6d\lambda_\eta - 3\left(\lambda_\eta - \rho^-\right)c - \\ -3b\left(\lambda_\eta - \rho^-\right) + \delta_1^*\left(b + c - 2a\right) \end{pmatrix} =$$
$$= 1 - \frac{\lambda_\eta - \rho^-}{2d\lambda_\eta}\left(b + c\right) + \frac{1}{6d\lambda_\eta}\delta_1^*\left(b + c - 2a\right). \tag{49}$$

Из сравнения значения показателя

$$\zeta^*_{\text{ВПЗ}} = 1 - \frac{\lambda_\eta - \rho^-}{2d\lambda_\eta}\left(b + c\right), \tag{50}$$

предельной эффективности для политики выполнения поступивших заказов с полученным значением $\zeta^*_{\text{РГП}}$ этого показателя для политики с резервированием продукции были сделаны следующие выводы. Значения составляющих частей, соответствующих прибыли от реализации продукции, являются одинаковыми, равными 1. Величины потерь, вызываемых простоями и сверхнормативной загрузкой производственных мощностей, при политике с резервированием готовой продукции оказываются меньше, чем при политике выполнения поступивших заказов, на величину

$$e^+ = \frac{\delta_1^*}{6d\lambda_\eta}\left(b + c\right). \tag{51}$$

Однако при использовании политики с резервированием дополнительно возникают потери из-за отсутствия реализации части готовой продукции. Политика с резервированием окажется более выгодной для предприятия, если $a<0,5(b+c)$. При выполнении этого условия величина e^+ снижения потерь увеличивается пропорционально величине δ_1^* максимального допустимого резерва готовой продукции, $\delta_1^* = F_\eta^-\left(Q^*\right)$. В свою очередь, величина δ_1^* увеличивается с увеличением дисперсии закона распределения F_η величины η объёма заказов и увеличением вероятности Q^* возникновения цепочек с длинами, большими двух периодов.

Эффективность политики с резервированием готовой продукции может быть повышена за счёт прогнозирования объёма заказов на периодах $k+2$ цепочек резервирования. Это требует отыскания перед началом каждого периода $k+2$ функции распределения $F^*(\eta_{k+2})$, отражающей особенности формирования спроса на этом периоде.

6. Обсуждение результатов исследования политики операционной активности с резервированием продукции

Политика операционной активности предприятия с созданием резервов готовой продукции рассматривается как модель принятия решений в управляемом случайном процессе. Эффективность политики оценивается по предельному среднему экономическому эффекту за единицу времени на бесконечном количестве периодов.

Представление операционной активности в форме управляемого случайного процесса отличается от подхода к операционной активности, основанного на методе стохастического программирования. Этот метод направлен на отыскание оптимальных значений интенсивности производства на одном или нескольких смежных периодах планирования. В то же время, используемая концепция позволяет оценивать эффективность политики принятия решений в целом, вне зависимости от конкретной ситуации на рассматриваемых периодах. При этом выбор решений на основе определённой политики является на практике более удобным.

Политика с резервированием продукции отличается от политики выполнения поступивших заказов и политики производства с постоянной интенсивностью. При её применении значение эффекта E_t на периоде планирования t зависит не только от случайного объёма заказов на этом периоде, но и от резервов продукции, созданных на предыдущих периодах времени. Поэтому случайный процесс E_t, $t=1, 2, \ldots, T$, соответствующий политике с резервированием, не удовлетворяет марковскому свойству. По этой причине возникает необходимость рассмотрения цепочек резервирования, поиска интенсивности их появления и представления немарковского процесса E_t, $t=1, 2, \ldots, T$, в виде суммы марковских процессов эффектов на цепочках резервирования отдельных типов.

Показано, что в ходе операционной активности предприятия с резервированием продукции могут возникать цепочки резервирования, состоящие из последовательных периодов оперативного планирования, на которых создаётся и сохраняется резерв продукции из-за недостаточного объёма поступающих заказов. В результате анализа процесса операционной активности с резервированием продукции получены формулы (21)–(24), выражающие вероятности возникновения различных цепочек резервирования в соответствии с законом распределения вероятности спроса.

Предложенный метод выбора величины начального запаса продукции на цепочке резервирования состоит в том, чтобы граничная вероятность продолжения этой цепочки составляла заданную величину, близкую к нулю. Это условие отражает формула (25). Она в неявном виде определяет максимальную величину запаса продукции, при которой длительность цепочки резервирования гарантированно не превышает заданного количества периодов. В случае двухпериодного резервирования такая максимальная безопасная величина запаса находится по формуле (26) как значение функции, обратной к исходной функции распределения вероятности спроса. Для отыскания максимальной безопасной величины запаса в случае более двух периодов резервирования требуется информация о законах распределения вероятности суммы нескольких случайных величин спроса. Поэтому приведена общая схема алгоритма расчёта плотности вероятности суммы нескольких случайных величин, заданных своими плотностями вероятности.

Для двухпериодного резервирования в случае нормального распределения вероятности спроса проведены численные расчёты максимальной безопасной величины запаса продукции. Рассматривались функции нормального распределения с плотностями вероятности, принимающими «практически» ненулевые значения только на интервале $[0,\ 2\lambda_\eta]$, где λ_η – математическое ожидание величины спроса. Показано, что в этом случае среднее квадратичное отклонение σ_η связано с λ_η прямо пропорциональной зависимостью.

Для удобства анализа результатов введена величина относительного максимального запаса продукции, представляющая собой отношение максимального (абсолютного) запаса продукции к математическому ожиданию величины спроса, которая по определению совпадает с нормативной мощностью предприятия. В табл. 1 приведены абсолютные δ_1^* и относительные υ значения максимального запаса продукции в зависимости от значений граничной вероятности Q^* и среднего квадратичного отклонения σ_η. Из табл. 1 видно, что величина υ возрастает с увеличением σ_η и при значениях от 1 до 5 величина υ принимает значения, близкие к 0,5. Таким образом показано, что для создания безопасного запаса δ_1^* продукции может быть использовано до половины её нормативной производственной мощности, а это позволит обеспечить предприятию приемлемую равномерность производства.

Для оценки эффективности политики с резервированием возникает необходимость в отыскании ожидаемых интенсивностей возникновения цепочек различного вида. Для решения этой задачи предложен метод балансирования, предполагающий совпадение общего количества периодов с количеством периодов, требующихся для формирования цепочек с различной вероятностью их возникновения. В подразделе 5. 4 приведены формулы, определяющие интенсивности возникновения цепочек различного вида в случае двухпериодного резервирования.

Получена оценка эффективности политики с двухпериодным резервированием, которое имеет место в случае нормального закона распределения величины спроса. Выражение этой оценки в зависимости от значений стоимостных показателей в модели оперативного планирования описывает формула (49). Её сравнение с формулой (50), определяющей оценку эффективности политики выполнения поступивших заказов, позволяет утверждать, что политика с резервированием является более выгодной, если $a<0{,}5(b+c)$, где a, b, c – величины потерь на единицу продукции, обусловленные соответственно хранением запаса готовой продукции, простоями и сверхнормативной загрузкой производственных мощностей. Приведенное условие достаточно чётко определяет область возможного применения политики с резервированием.

Направление дальнейших исследований должно быть ориентировано на оценку эффективности операционной активности с резервированием для законов распределения величины спроса, отличающихся от нормального.

7. Выводы

1. Политика с резервированием готовой продукции даёт возможность удовлетворять повышенный спрос за счет создания запасов готовой продукции, производимых в периоды пониженного спроса. В ходе операционной активности предприятия могут возникать цепочки резервирования, состоящие из последовательных периодов оперативного планирования, на которых создаётся и сохраняется резерв продукции из-за недостаточного объёма поступающих заказов. Получены формулы, позволяющие находить вероятности возникновения цепочек резервирования, соответствующие законам распределения вероятности спроса.

2. Чтобы ограничить негативный эффект «залёживания» готовой продукции, предложено ограничивать количество периодов, охватываемых цепочками резервирования. Поэтому предлагаемый метод выбора начального запаса на цепочке резервирования состоит в том, чтобы граничная вероятность продолжения этой цепочки составляла заданную величину, близкую к нулю. Получены формулы, позволяющие находить максимальный безопасный размер запаса продукции из условия его полной реализации в течение заданного количества периодов планирования.

3. Показано, что в случае, когда закон распределения величины спроса является нормальным, уже двухпериодному резервированию соответствуют достаточно большие значения безопасного резерва, обеспечивающие приемлемую равномерность производства.

4. Для отыскания ожидаемых интенсивностей возникновения цепочек различного вида предложен метод балансирования. Он основан на предположении о совпадении общего количества периодов с количеством периодов, требующихся для формирования цепочек с различной вероятностью их возникновения. Получены формулы, определяющие интенсивности возникновения цепочек различного вида в случае двухпериодного резервирования.

5. Проведена оценка эффективности операционной активности с резервированием готовой продукции. Получена формула, выражающая значение показателя предельной эффективности в зависимости от значений стоимостных показателей в модели оперативного планирования. Проведен сравнительный анализ эффективности политики с резервированием с политиками выполнения поступивших заказов и производства с постоянной интенсивностью. Определено соотношение значений стоимостных показателей, при выполнении которого политика с резервированием имеет более высокую эффективность, чем другие рассмотренные варианты политик операционной активности.

Литература

1. Потрашкова, Л. В. (2013). Оптимізаційне моделювання виробничого потенціалу підприємства в розрізі оперативного, тактичного та стратегічного рівнів. Моделі управління в ринковій економіці, 16, 115–126.

2. Заруба, В. Я., Парфентенко, І. А. (2018). Моделі погоджування виробничих ресурсів підприємства з поточним попитом на продукцію. Информационная экономика: этапы развития, методы управления, модели. Братислава-Харьков, 469–481. URL: http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/36761

3. ISO 31000:2018. Risk management – Guidelines. URL: https://www.iso.org/standard/65694.html

4. Menon, S. A., Muchnick, M., Butler, C., Pizur, T. (2019). Critical Challenges in Enterprise Resource Planning (ERP) Implementation. International Journal of Business and Management, 14 (7), 54. doi: https://doi.org/10.5539/ijbm.v14n7p54

5. Kumar, R., Srivastava, S. K. (2014). A Framework for Improving "Sales and Operations Planning." Metamorphosis: A Journal of Management Research, 13 (1), 16–25. doi: https://doi.org/10.1177/0972622520140104

6. Alexander, D. (2013). S&OP and strategy: Building the bridge and making the process stick. Journal of Business Forecasting, 32, 16–19. URL: https://1stdirectory.co.uk/_assets/files_comp/b801628e-9b64-4794-a22d-ae872981d1da.pdf

7. Mula, J., Poler, R., García-Sabater, J. P., Lario, F. C. (2006). Models for production planning under uncertainty: A review. International Journal of Production Economics, 103 (1), 271–285. doi: https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2005.09.001

8. Mirzapour Al-e-hashem, S. M. J., Baboli, A., Sazvar, Z. (2013). A stochastic aggregate production planning model in a green supply chain: Considering flexible lead times, nonlinear purchase and shortage cost functions. European Journal of Operational Research, 230 (1), 26–41. doi: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.03.033

9. Fujita, Y., Izui, K., Nishiwaki, S., Zhang, Z., Yin, Y. (2022). Production planning method for seru production systems under demand uncertainty. Computers & Industrial Engineering, 163, 107856. doi: https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107856

10. Заруба, В. Я. (2017). Оптимизация планов производства по оценкам вероятности будущих заказов. Маркетинг і менеджмент інновацій, 2, 222–232. doi: https://doi.org/10.21272/mmi.2017.2-21

11. Mubiru, P. (2010). A Markov decision model for optimising economic production lot size under stochastic demand. ORiON, 26 (1). doi: https://doi.org/10.5784/26-1-85

12. Shi, X., Shen, H., Wu, T., Cheng, T. C. E. (2014). Production planning and pricing policy in a make-to-stock system with uncertain demand subject to machine breakdowns. European Journal of Operational Research, 238 (1), 122–129. doi: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.03.017

13. Zaruba, V., Parfentenko, I. (2020). Risk Management Models in Operative Planning at an Industrial Enterprise. 2020 IEEE International Conference on Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T). doi: https://doi.org/10.1109/picst51311.2020.9467954