УДК 532.5.032
DOI: 10.15587/1729-4061.2021.225209

Анализ влияния линейной и угловой скорости частицы на уравнения движения жидкости

В. А. Бударин

Аналізується рівняння руху в напругах (Нав'є), а також два його окремих випадки для нестисливої в'язкої течії. Одне з них – рівняння Стокса (Нав'є-Стокса), а друге отримано при меншій кількості обмежень. Виконано порівняння додатків для опису в'язкого тертя в обох рівняннях. Показано, що рівняння Лапласа від лінійної швидкості можна представити як функцію двох змінних – лінійної і кутової швидкості обертання частинок. Для опису прискорення частинки в усіх рівняннях руху використовувалася повна похідна від швидкості в формі Громека-Лемба, яка залежить від тих же змінних.

Врахування спільного впливу лінійної та кутової швидкості дозволяє вирішити проблему аналітичного опису турбулентної течії в межах осредненної моделі. Даний метод аналізу використовує положення загальної фізики, де розглядається поступальний і обертальний рух тіла. Третій вид механічного руху – коливальний (пульсації) в роботі не розглядається.

Знайдена властивість розпаду рівнянь руху і побудована блок-схема з рівнянь та умов. Показано, що всі рівняння для в'язкої рідини мають свого аналога в більш простій моделі нев'язкої рідини. Це полегшує знаходження рішень для в'язкої течії

За допомогою рівнянь Стокса і Нав'є вирішені дві одновимірні задачі, в яких знайдено розподіл швидкості по нормалі до поверхні при течії на горизонтальній пластинці та в круглій трубі. Обидва методи дають однаковий результат. Рішення для розподілу швидкості по нормалі до поверхні в ламінарному підшару знайти не вдалося. Актуальним завданням математичної частини є вирішення проблеми замикання розглянутих рівнянь.

Виконано порівняння теоретичних та емпіричних рівнянь, що дало змогу обґрунтувати припущення: стоксовськую рідиною є розріджений газ. Аналіз рівняння Нав'є показав, що воно призначене для знаходження розподілу напружень при турбулентній течії.

Ключові слова: усереднена модель турбулентності, в'язке тертя, рівняння Стокса, рівняння Нав'є.

1. Введение

В основе классического метода построения математических моделей в механике жидкости лежит уравнение движения в напряжениях (Навье), которое является частным случаем закона сохранения количества движения [1–3]. Уравнение Навье имеет два частных случая для вязкой жидкости: уравнение Стокса (Навье-Стокса), а второе получено при меньшем количестве ограничений в работе [4]. Оба уравнения учитывают влияние массовых сил, сил давления, трения и инерции, однако имеют разные выражения для двух слагаемых – ускорений от сил трения и давления.

Характерной особенностью уравнения Стокса является отсутствие влияния вращения частиц, в то время как во втором уравнении это влияние присутствует [4]. Оба уравнения являются частными случаями одного уравнения (Навье), используют реологическое уравнение Ньютона и должны иметь одинаковую функциональную зависимость для одинаковых слагаемых.

Отмеченное противоречие требует выяснения причин такого несоответствия, что может улучшить математическую модель течения, которая широко используется в инженерной практике.

Точные решения уравнения Стокса согласуются с экспериментами только при малых числах Рейнольдса. Известно решение Стокса для движения шара в ньютоновской жидкости, которое согласуется с экспериментальными данными в опытах с неньютоновской жидкостью (глицерином или касторовым маслом) [1, 2]. Эти противоречия между теорией и экспериментом не имеют удовлетворительного объяснения.

Аналогичные математические модели построены и используются в теории упругости и теплопроводности [5, 6]. Они позволяют рассчитать физические поля с высоким качеством и с минимальным использованием эксперимента. Компьютерные программы, используемые в механике жидкости, (Flowvision, Phoenics и др.) дают хорошие результаты только в узком диапазоне изменения влияющих факторов и их решения часто являются неустойчивыми (приближенными). Этот недостаток требует проведения экспериментальной проверки численных расчетов, увеличивает стоимость и сроки разработок [2, 3]. Считается, что одной из причин этих проблем являются сами расчетные уравнения (Стокса, Рейнольдса и др.).

Одним из путей разрешения имеющихся проблем является учет дополнительного влияющего фактора – угловой скорости вращения частиц. Данное свойство должно играть ключевую роль в описании процесса течения, но в современных моделях оно не используется [1–3].

Таким образом, актуальным является поиск новых форм уравнения Стокса и их точных решений, выполняемых по классической схеме в соответствии с положениями общей физики.

2. Анализ литературных данных и постановка задачи

В рамках осредненной модели турбулентность возникает при появлении вращения частиц и наличия пульсаций скорости, в противном случае имеет место ламинарный режим. Данная физическая модель известна более 100 лет, однако в классических уравнениях движения (Стокса, Рейнольдса для осредненного турбулентного течения, уравнениях пограничного слоя и др.) не учитывается, что противоречит определению турбулентности и его ключевым признакам [1–3].

Уравнение Стокса выводится двумя способами: с применением общих теорем математики и с использованием уравнения движения в напряжениях (Навье).

Наибольшее количество работ посвящено анализу первого варианта вывода с целью получения точных и численных решений различных задач. Данный способ анализа используется в работе [7]. В основе получения численных решений лежит уравнение Стокса для несжимаемой жидкости. Показано, что существует большой класс решений для областей различной геометрии. Процесс решения сопровождается использованием допущений без ясного физического смысла, сравнение с экспериментом отсутствует. Эта и другие аналогичные задачи относятся к чистой математике и не дают возможности использовать полученные решения на практике.

Анализ второго способа вывода позволил получить два точных решения для течения в трубе и на горизонтальной пластинке в форме общих интегралов. Для этого использовался частный случай уравнения (1). Эти решения не удалось применить к практическим задачам т.к. их связь с режимами течения неизвестна [2, 3].

В большинстве применений используют следующую форму уравнения Стокса:

$$G - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu \cdot \nabla^2 u = \frac{du}{dt}, \tag{1}$$

Из (1) следует, что основным фактором, учитывающим динамику течения, является линейная скорость, которая влияет на слагаемые от силы вязкого трения и инерции. Это плохо согласуется с положением общей механики, где рассматривается три вида движения: поступательное, вращательное и колебательное.

В работе [4] анализируется другой частный случай уравнения Навье, в котором учитывается влияние угловой скорости вращения частиц.

Это уравнение имеет вид:

$$G - \frac{1}{\rho}\mathrm{div}p + 2\nu \cdot f(u, \omega) = \frac{du}{dt}. \tag{2}$$

Оба уравнения выведены при различных ограничениях, которые представлены в табл. 1.

В уравнении (1) ограничения относятся к касательным и нормальным напряжениям (τ, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}), а в уравнении (2) – только к касательным. Таким образом, нормальные напряжения (давление) в уравнении (2) могут меняться произвольно, а в уравнении Стокса – только по установленным правилам, т. е. ограничения являются более жесткими. Соотношения для нормальных напряжений (p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}) составляют содержание гипотезы линейности, которая в настоящее время не доказана [1, 2].

Различные уравнения движения должны относиться к разным группам жидкостей с разными названиями, однако в настоящее время нет рекомендаций по корректной терминологии, учитывающей различие в математических ограничениях.

Таблица 1
Ограничения для вывода уравнений (1) и (2).

N	Ограничения для уравнения Навье	Уравнение движения	Название жидкости
1	$\tau = \mu \cdot \mathrm{grad} u;$ $p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};$ $p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};$ $p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$	(1)	Стоксовская (Ньютоновская)
2	$\tau = \mu \cdot \mathrm{grad} u$	(2)	Ньютоновская

Большое значение для анализа течений имеет уравнение для полной производной от скорости в форме Громека-Лэмба. Эта форма записи эквивалентна стандартной формуле, но позволяет установить влияние линейной и угловой скорости на полное ускорение частицы (*du/dt*).

В векторной форме данное уравнение имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + grad\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2 \cdot \left[\vec{\omega} \times \vec{u}\right]. \tag{3}$$

В проекциях на оси координат:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2 \cdot \left(u_z \omega_y - u_y \omega_z\right),$$

$$\frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2 \cdot \left(u_x \omega_z - u_z \omega_x\right),$$

$$\frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2 \cdot \left(u_y \omega_x - u_x \omega_y\right).$$

Конвективная часть полного ускорения в (3) следует также из формулы векторного анализа $\left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = \mathrm{grad}\left(u^2 / 2\right) + rot\, \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Уравнению (3) должны удовлетворять полные производные во всех уравнениях движения независимо от учета (неучета) вязкости, однако они используются только в уравнении Эйлера для идеальной жидкости.

Полное ускорение в уравнениях Навье, (1) и (2) также должно удовлетворять выражению для полной производной в форме (3). Из формальной записи уравнения (1) следует, что оператор Лапласа от скорости зависит только от одного аргумента (u), а полное ускорение от двух аргументов (u и ω). Таким образом, с точки зрения физики $\nabla^2 u$ характеризует ламинарный режим течения, а полное ускорение – турбулентный. Отсутствие согласованного влияния u и ω на оба слагаемых затрудняет возможность получения общего решения уравнения Стокса.

В работе [8] анализируются проблемы уравнения Стокса и приводятся примеры заблуждений (противоречий) в теоретической гидродинамике. Отмечается, что одной из общих проблем является описание вихревых течений, возникающих под влиянием сил вязкости и инерции, а также предлагается модель обтекания тонкой горизонтальной пластинки. Данная модель дает частичное описание течения и использует упрощения, которые не позволяют учесть влияние всех существующих режимов.

Проблемы с решением уравнения (1) привели к разработке новых моделей и уравнений, которые имеют ограниченную область использования. Одна из таких моделей (уравнение Биркгофа-Ротта) используется для анализа вращения лопастей ветрогенератора [9]. Характерным свойством такого процесса является вращение частиц потока, которое учитывается косвенным способом. Разработанная модель дает удовлетворительный результат, но является сложной для инженерного использования и характеризуется многочисленными ограничениями.

Для сложных процессов уравнение движения используют в составе системы уравнений совместно с уравнениями теплообмена и электромагнетизма. В работе [10] разработана модель численного решения задачи конвекции в сосуде для хранения криогенных жидкостей. Учет влияния вращения частиц выполняется косвенным способом, т. к. этот фактор отсутствует в уравнении (1). Реализация данной модели требует разработки отдельной компьютерной программы, что затрудняет ее использование.

В работе [11] моделируется система уравнений, в которой присутствует частный случай уравнения Стокса без вязкости и уравнения электромагнетизма. Такое упрощение позволяет получить приближенную картину распределения потоков массы и заряда только для двумерной модели течения в ускорителе. Результаты расчета требуют дополнительного уточнения параметров процесса с помощью эксперимента.

Недостатки анализируемых работ вызваны отсутствием корректной модели движения жидкости и сложностью решения нелинейного уравнения (1). Это привело к появлению упрощенных теоретических или полуэмпирических моделей, которые позволяют решить только частные задачи в узком диапазоне влияющих факторов.

Уравнение Стокса находится вблизи закона сохранения количества движения, является общим и претендует на статус основного в механике жидкости [12]. В настоящей работе рассматриваются некоторые противоречия этого уравнения, а также способы их устранения. Это позволит уточнить границы его применимости с точки зрения математики и физики.

3. Цель и задачи исследования

Целью исследования является получение уравнений движения с учетом согласованного влияния линейной и угловой скорости на слагаемые, учитывающие трение и инерцию. Это позволит построить более полные и точные математические модели, что расширит спектр решаемых задач и улучшит их качество.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– выполнить анализ оператора Лапласа от скорости, установить его зависимость от ω и найти новую форму уравнения Стокса и его частные случаи;

– решить и проанализировать две частные задачи.

4. Анализ уравнений движения

4. 1. Оператор Лапласа и уравнение Стокса. Частные случаи

Приведем уравнение Стокса к виду более удобному для последующего анализа и объединим слагаемые, учитывающие вязкость. Выполним необходимые преобразования для координаты x.

– из ограничения для нормального напряжения (табл. 1):

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} = -p_x \text{ или } p = p_x + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

где нормальное напряжение p_{xx}=–p_x по правилу знаков.

Тогда, слагаемое от давления примет вид:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p_x + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x} - 2\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}; \tag{4}$$

– преобразуем оператор Лапласа и выделим слагаемые, учитывающие влияние линейной и угловой скорости.

Тогда

$$\nabla^2 u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}.$$

Выразим второе и третье слагаемые через первую производную, добавим в скобках ноль и представив его в виде двух одинаковых слагаемых с разными знаками.

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (rot\ u)_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial \omega_z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial (rot\ u)_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial \omega_y}{\partial z}.$$

Из данных уравнений следует, что существует функция ψ (u, ω), которая зависит от двух аргументов и имеет составляющую на ось x в виде:

$$\psi_x(u,\omega)=\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+2\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial y}\right).$$

С учетом последнего уравнения и (4) получим:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\cdot\nabla^2 u_x=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+\nu\left[-\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+2\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial y}\right)\right].$$

Выражение в квадратных скобках является функцией двух аргументов – $\varphi_x(u,\omega)$. Выполняя аналогичные преобразования для осей y и z получим:

$$\varphi_x(u,\omega)=-\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}-2(rot\ \omega)_x,$$

$$\varphi_y(u,\omega)=\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\partial z}-2(rot\ \omega)_y, \qquad (5)$$

$$\varphi_z(u,\omega)=\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-2(rot\ \omega)_z,$$

где

$$(rot\ \omega)_x=\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z};$$

$$(rot\ \omega)_y=\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x};$$

$$(rot\ \omega)_z=\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}.$$

С учетом (5) и полной производной в форме (3) уравнение Стокса можно записать:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+\nu\cdot\left[-\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}-2\left(rot\ \omega\right)_x\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u_x}{\partial t}+2\left(u_z\omega_y-u_y\omega_z\right),$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial y}+\nu\cdot\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\partial z}-2\left(rot\ \omega\right)_y\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u_y}{\partial t}+2\left(u_x\omega_z-u_z\omega_x\right), \qquad (6)$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}+\nu\cdot\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-2\left(rot\ \omega\right)_z\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u_z}{\partial t}+2\left(u_y\omega_x-u_x\omega_y\right).$$

В этой форме записи слагаемые, учитывающие вязкое трение и инерцию имеют одинаковые влияющие факторы – (u, ω). В краткой форме систему (6) можно записать:

$$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p+\nu\cdot\varphi(u,\omega)-\mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+2\left[\vec{\omega}\times\vec{u}\right]. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что уравнение Стокса описывает турбулентный режим течения в рамках осредненной модели.

Вывод данного уравнения выполнен без использования дополнительных ограничений. Это означает, что (7) является другой формой записи уравнения Стокса.

При исключении вязкости (v=0) получаем общее уравнение для невязкого течения:

$$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p-\mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+2\left[\vec{\omega}\times\vec{u}\right]. \qquad (8)$$

При исключении касательных напряжений из уравнения Навье также получим (8).

Рассмотрим частные случаи уравнения Стокса в форме (6):

1. Для ламинарного режима течения угловая скорость $\omega\left(x,y,z\right)=0$ и уравнение примет вид:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+\nu\cdot\left(-\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u_x}{\partial t},$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u_y}{\partial t}, \qquad (9)$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u_z}{\partial t}.$$

В краткой форме система (9) имеет вид:

$$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p+\nu\cdot\varphi\left(u\right)-\mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (10)$$

2. При $u\left(x,y,z\right)=0$ из (6) получим систему уравнений для стоячего вихря

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}-2\nu\cdot\left(rot\ \omega\right)_x=\frac{\partial\left(\omega_x r_{yz}\right)}{\partial t},$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y}-2\nu\cdot\left(rot\ \omega\right)_y=\frac{\partial\left(\omega_y r_{xz}\right)}{\partial t},$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}-2\nu\cdot\left(rot\ \omega\right)_z=\frac{\partial\left(\omega_z r_{xy}\right)}{\partial t}.$$

Или в краткой форме

$$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p-2\nu\cdot\left(rot\ \omega\right)=\frac{\partial\left(\omega r\right)}{\partial t}. \qquad (11)$$

При ν=0 из (10) и (11) получаем уравнения движения для невязкой модели течения:

$$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p-\mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (12)$$

$$G - \frac{1}{\rho}\mathrm{div}p = \frac{\partial(\omega r)}{\partial t}. \qquad (13)$$

Уравнения (12) и (13) характеризуют линейное течение без инерционных вихрей и невязкий стоячий вихрь, соответственно.

4. 2. Частные задачи

Выбраны следующие частные задачи: установившееся турбулентное течение на горизонтальной пластинке и в горизонтальной круглой трубе. Цель решения обеих задач – нахождение распределения скорости по нормали к поверхности.

Поиск решений выполняется двумя способами. В первом способе используется уравнение Стокса, а во втором – уравнение Навье. При этом оба дифференциальных уравнения упрощаются и интегрируются.

С помощью первого способа находится распределение скорости путем интегрирования одномерного уравнения движения второго порядка. С помощью второго способа находится распределение касательного напряжения, а затем распределение скорости с использованием закона Ньютона для вязкого трения. Оба способа дополняют друг друга и должны давать одинаковый результат. При этом предполагается, что жидкость несжимаемая и теплофизические свойства постоянны.

Рассмотрим течение на горизонтальной пластинке при турбулентном пограничном слое (рис. 1).

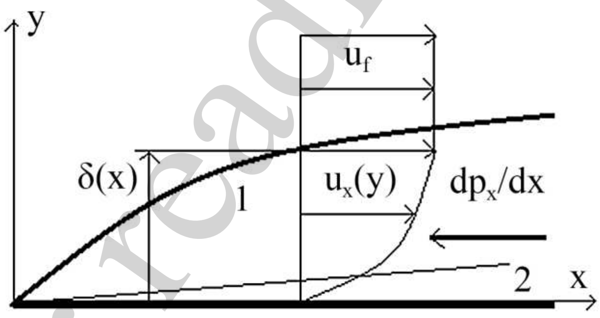

Рис. 1. Расчетная схема течения на пластинке: 1–турбулентный пограничный слой; 2 – ламинарный подслой

Воспользуемся уравнением Стокса в форме (1), которое для данного случая имеет вид:

$$\frac{d^2u_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}.$$

После двукратного интегрирования получим:

$$u_x(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + c_1 y + c_2. \qquad (14)$$

Применим уравнение Навье для нахождения распределения касательного напряжения. Для координаты x получим (p_{xx}=—p_x):

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) = \frac{du_x}{dt}.$$

После упрощения в соответствии с ранее принятыми допущениями:

$$\frac{dp_x}{dx} = \frac{d\tau_{yx}}{dy}.\cdot$$

После интегрирования при dp_x/dx=const найдем:

$$\tau_{yx} = \frac{dp_x}{dx} y + c_1.$$

Распределение скорости по нормали к поверхности пластинки найдем по уравнению:

$$\mu\frac{du_x}{dy} = \frac{dp_x}{dx} y + c_1.$$

После интегрирования [(1/μ)·(dp_x/dx)=const] получим уравнение (14).

На рис. 2 показана схема нахождения общих интегралов для распределения касательного напряжения и скорости при течении на пластинке.

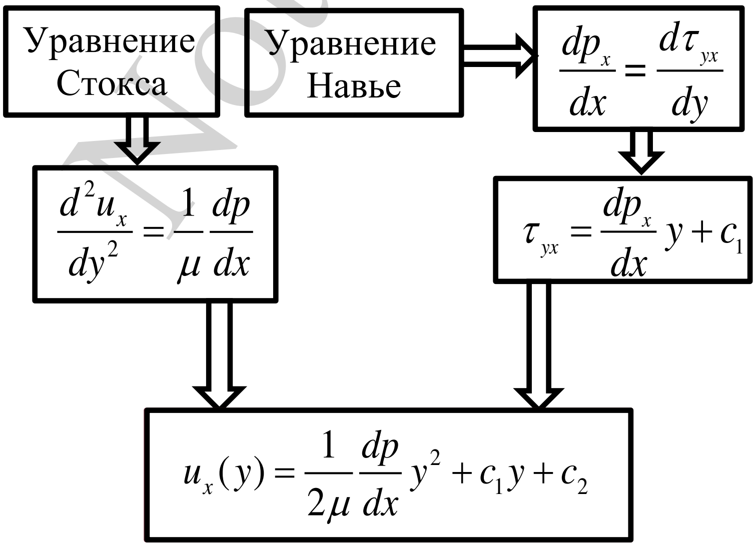

Рис. 2. Схема нахождения интегралов при турбулентном течении на пластинке.

Для нахождения распределения скорости в ламинарном подслое необходимо воспользоваться уравнением (9). Однако там нет слагаемого d^2u_x/dy^2. Это означает, что для этой части течения найти распределение скорости невозможно.

Найдем частное решение уравнения (14) для следующих граничных условий: при $y=\delta(x)$, $\tau_x(y)=0$, а $u_x(y=\delta)=u_f$.

Тогда получим:

$$u_x(y)=\frac{1}{2\mu}\frac{dp_x}{dx}\left[y^2+\delta(x)^2-2y\cdot\delta(x)\right]+u_f. \tag{15}$$

На рис. 3 показано сравнение распределения скорости по уравнению (15) и известному степенному распределению */ux1(y)/* $u_x(y)=u_f[y/\delta(x)]^{1/7}$ [1].

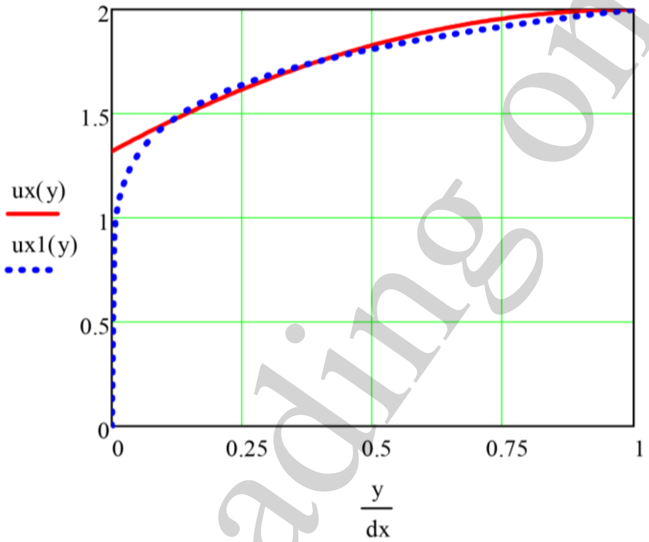

Рис. 3. Сравнение теоретического решения (15) с полуэмпирическим уравнением: $(1/2\mu)dp_x/dx=-1700$ $(\text{м}\cdot\text{с})^{-1}$

Как следует из рис. 3, распределение скорости (15) согласуется с экспериментом только в центральной части. Это можно объяснить изменением режима течения вблизи стенки с турбулентного на ламинарное, для которого нет аналитического решения уравнения Стокса. Отклонение от эмпирического уравнения возникает при $y/\delta(x)<0{,}1$.

Рассмотрим течение в прямой круглой трубе и найдем общие интегралы для распределения касательного напряжения и скорости вдоль радиуса трубы (рис. 4).

Воспользуемся уравнением Стокса в форме (1) в (r, z) координатах. Так как течение установившееся и одномерное, уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2u_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_z}{dr}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}.$$

После двойного интегрирования получим $\left[(1/\mu)(dp/dz)=\text{const}\right]$:

$$u_z\left(r\right)=\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2+c_1\ln r+c_2. \tag{16}$$

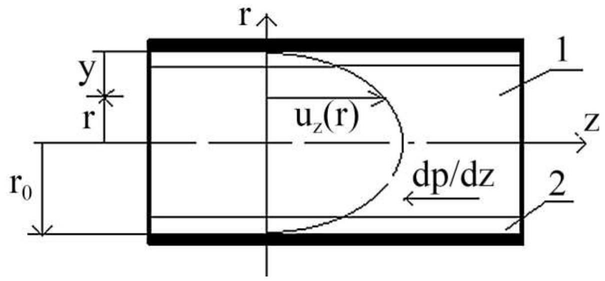

Рис. 4. Расчетная схема течения в трубе: 1 – турбулентное ядро; 2 – ламинарный подслой)

Решим эту же задачу с помощью уравнения Навье.

Из уравнения в напряжениях [1–3]:

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{\tau_{zr}}{r}\right)=\frac{du_z}{dt}, \tag{17}$$

где p_z – давление вдоль оси z, которое по правилу знаков противоположно нормальному напряжению p_{zz}.

Упростим уравнение (17), полагая, что массовые силы и вращение потока вокруг оси трубы отсутствует.

Тогда получим:

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r}+\frac{\tau_{zr}}{r}=\frac{\partial p_z}{\partial z}. \tag{18}$$

При постоянном диаметре трубы (dp_z/dz=const) решение уравнения (18) имеет вид:

$$\tau_{zr}=\frac{c_1}{r}+\frac{{dp_z}/{dz}\cdot r}{2}.$$

Воспользуемся уравнением Ньютона $\tau_{zr}=\mu\cdot\frac{du_z}{dr}$:

$$\mu\frac{du_z}{dr}=\frac{1}{2}\frac{dp_z}{dz}r+\frac{c_1}{r}.$$

После интегрирования получим уравнение (16).

На рис. 5 показана схема нахождения интеграла (16) двумя способами.

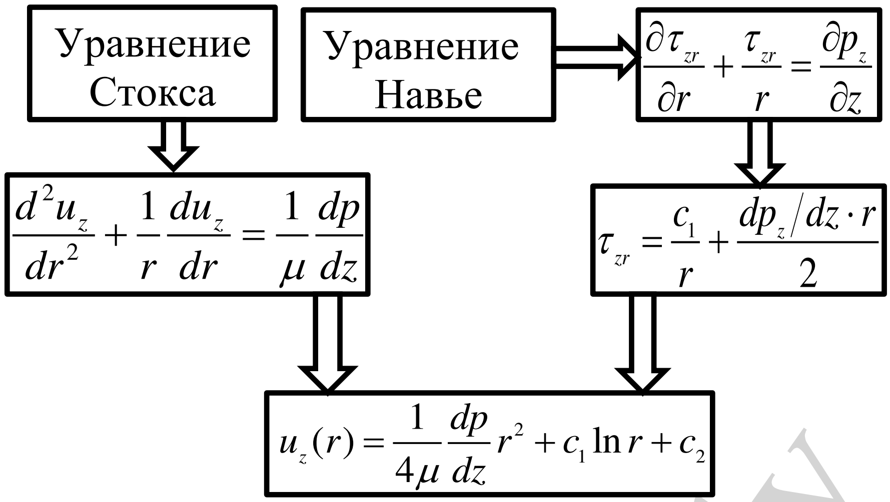

Рис. 5. Схема нахождения общих интегралов для турбулентного течения в трубе

Найдем частное решение уравнения (16) при следующих граничных условиях: при $y=r_0$, $\tau=0$ и $u_z(y=r_0)=u_{\max}$.

Тогда получим:

$$u_z\left(y\right) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp_z}{dz}\left(y^2 - r_0^{\,2} + 2r_0^{\,2}\ln\frac{r_0}{y}\right) + u_{\max}. \tag{19}$$

Из (19) следует, что скорость на стенке $u_z(y=0)$ не может равняться нулю. Это означает, что данное уравнение не может использоваться для пристенного ламинарного слоя.

На рис. 6 показано сравнение распределения скорости по уравнению (19) с со степенным законом для круглой трубы $u_z(y)=u_{\max}[y/r_0]^{0,16}$ [1].

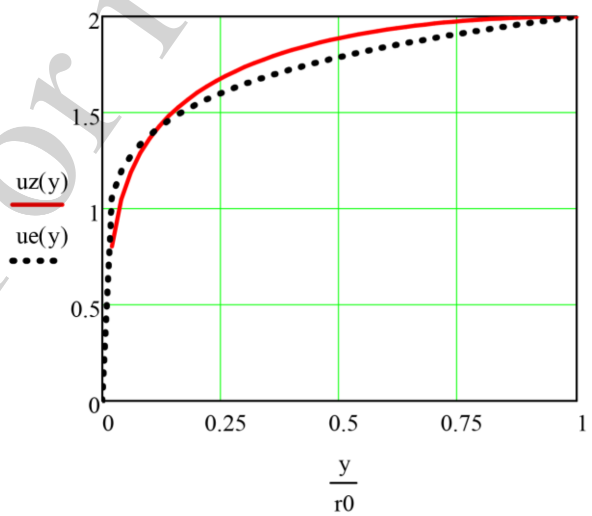

Рис. 6. Сравнение теоретического распределения скорости в трубе (красная линия) со степенным полуэмпирическим уравнением (точки): $u_{\max}$=2 м/с, константа $(1/4\mu)\cdot dp_z/dz=-70$ $(\text{м}\cdot\text{с})^{-1}$

Из рис. 6 следует, что теоретическое распределение дает завышенное значение скорости (на величину порядка 10 %) при $y/r_0>0,12$. При $y/r_0 < 0,12$ теоретическое распределение стремится к конечной величине скорости на стенке, что не соответствует гипотезе прилипания [1, 2].

Таким образом, сравнительный анализ двух теоретических решений с полуэмпирическими уравнениями дает качественно одинаковый результат, несмотря на отличающиеся интегралы. В центральной части потока имеет место удовлетворительное соответствие с экспериментом, а вблизи стенки – существенное отклонение.

Теоретические кривые попадают в область эмпирических уравнений только при малых значениях констант, которые не характерны для течений при нормальных условиях (отличие в 10–100 раз). Достичь расчетных значений констант $[(1/2\mu)\cdot(dp_x/dx)=\mathrm{const}$ и $(1/4\mu)\cdot(dp_z/dz)=\mathrm{const}]$ можно при комбинации теплофизических свойств, которые присутствуют у разреженного газа (малая плотность и относительно большая вязкость). При низком давлении существует молекулярно-вязкостный режим (число Кнудсена Kn ~0,1) при котором не выполняется гипотеза прилипания и распределение скоростей вблизи стенки согласуется с рис. 3 и рис. 6 [13, 14].

Таким образом, актуальным направлением экспериментального исследования является проверка предположения, что стоксовской жидкостью является разреженный газ.

5. Обсуждение результатов математического описания

При выводе уравнения Стокса используется закон Ньютона для вязкого трения в форме $\tau=\mu\cdot grad\ u$. Такая форма записи не имеет признака применимости к турбулентному режиму течения. Для разрешения этого противоречия выполним преобразование уравнения Ньютона применительно к одномерному обтеканию плоской пластинки (рис. 3).

Тогда

$$\tau = \mu \cdot \left(\frac{du_x}{dy} - \frac{du_y}{dx} + \frac{du_y}{dx} \right) = \mu \cdot \left(\frac{du_y}{dx} - 2\omega_z \right), \tag{20}$$

где

$$\left(rot\ u \right)_z = \frac{du_y}{dx} - \frac{du_x}{dy} = 2\omega_z .$$

Присутствие в (20) линейной и угловой скорости указывает, что закон трения Ньютона справедлив для двух режимов течения – ламинарного и турбулентного. Такой же вывод следует из анализа трехмерного варианта закона Ньютона [4].

Проведенный анализ показал, что существуют три частных случая уравнения Стокса, два из которых получены в результате применения ограничений для модели вязкой жидкости ($\omega=0$ и $u=0$).

При использовании условия $\nu=0$ получаем общее уравнение для невязкой жидкости (8). Такое же уравнение следует из уравнения Навье при исключении касательных напряжений (τ_{ij}) и использовании полной производной от скорости в форме (3).

В табл. 2 приведены уравнения движения для вязких течений при различных режимах, а также их аналоги в модели невязкой жидкости.

Таблица 2

Уравнения движения для вязких и невязких течений

Equation	$u(x,y,z)\neq 0$ $\omega(x,y,z)\neq 0$	$u(x,y,z)\neq 0$ $\omega(x,y,z)=0$	$u(x,y,z)=0$ $\omega(x,y,z)\neq 0$
(1)	$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p+\nu\cdot\varphi(u,\omega)=\frac{du}{dt}$	$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p+\nu\cdot\varphi(u)-\mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$	$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p+\nu\cdot\varphi(\omega)=\frac{\partial(\omega r)}{\partial t}$
Navier ($\tau_{ij}=0$)	$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p=\frac{du}{dt}$	$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p-\mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$	$G-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}p=\frac{\partial(\omega r)}{\partial t}$

На рис. 7 приведена блок-схема распада уравнений Навье и Стокса по условиям табл. 2. В этой схеме нет уравнения Эйлера для идеальной жидкости, так как оно требует дополнительного допущения для гидростатического закона распределения давления ($p_x=p_y=p_z=p$).

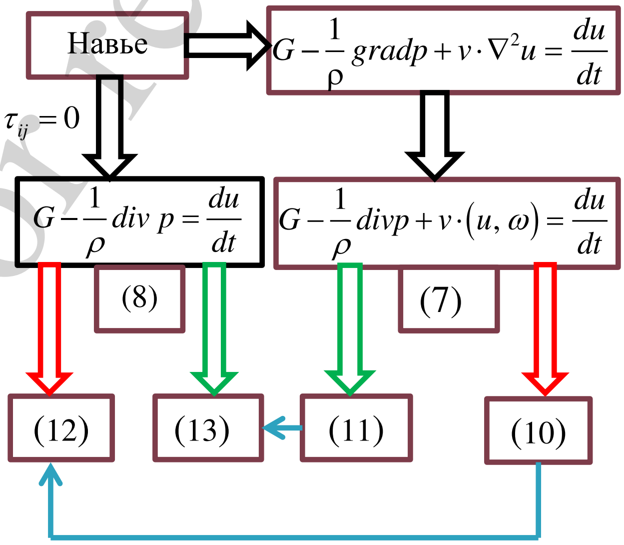

Рис. 7. Блок-схема распада уравнений для вязкой и невязкой жидкости. Условия: красные стрелки – $\omega=0$, зеленые – $u=0$, синие – $\nu=0$.

Уравнения в табл. 2 имеют шесть неизвестных (p_x, p_y, p_z, u_x, u_y, u_z) и являются незамкнутыми. Этот свойство ограничивает возможности использования рассмотренных уравнений т. к. позволяет решать только одномерные задачи. Таким образом, актуальным направлением математического исследования является изучение путей решения проблемы замыкания.

6. Выводы

1. Использование уравнения Громека-Лэмба для нахождения полного ускорения *du/dt*, а также преобразование оператора Лапласа позволило найти влияние линейной и угловой скорости частиц на уравнение Стокса. Применение условий для безвихревого течения (ω=0), для стоячего вихря (u=0) и для модели невязкой жидкости (v=0) позволило составить схему распада уравнения Стокса и сравнить ее с частными случаями уравнения Навье.

Учет влияния угловой скорости частиц позволяет более полно описать течение ньютоновской (стоксовской) жидкости, а также найти новые методы решения уравнений движения.

2. Сравнение частных решений уравнения Стокса для горизонтальной пластинки и трубы с полуэмпирическими уравнениями позволило обосновать предположение, что стоксовской жидкостью является разреженный газ. Экспериментальное подтверждение этого предположения может привести к практическим применениям в области вакуумной техники.

Литература

1. Лойцянский, Л. Г. (2003). Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 842.
2. Genick, B.-M. (2013). Basics of Fluid Mechanics. Chicago, 604. URL: https://www.academia.edu/10908681/Fluid_Mechanics_Genick_Bar_Meir
3. Ferziger, J. H. (1998). Numerical methods for engineering applications. Wiley, 400. URL: https://www.wiley.com/en-us/Numerical+Methods+for+Engineering+Applications%2C+2nd+Edition-p-9780471116219
4. Budarin, V. (2016). Analytical description of the flow of the newtonian liquid in a round tube and on a horizontal plate. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6 (7 (84)), 43–49. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.85468
5. Hashemi, J. (2006). Foundations of Materials Science and Engineering. McGraw-Hill.
6. Terry, T. (2005). Thermal Conductivity: Theory, Properties, and Applications. Springer.
7. Khedr, W. S. (2017) Classical Fundamental Unique Solution for the Incompressible Navier-Stokes Equation in RN. Journal of Applied Mathematics and Physics, 5, 939–952. doi: https://doi.org/10.4236/jamp.2017.54083
8. Ivanchin, A. (2018). Delusions in Theoretical Hydrodynamics. World Journal of Mechanics, 08 (09), 387–415. doi: https://doi.org/10.4236/wjm.2018.89029

9. Mamaghani, N. A., Jenkins, P. E. (2020). Computational Fluid Dynamics Analysis of Multi-Bladed Horizontal Axis Wind Turbine Rotor. World Journal of Mechanics, 10 (09), 121–138. doi: https://doi.org/10.4236/wjm.2020.109009

10. Anan'ev, A. V., Mironov, V. V., Moiseeva, D. A., Cherkasov, S. G. (2015). Anisotropic effect of natural convection on the temperature field in an enclosure in the presence of stable temperature stratification. Fluid Dynamics, 50 (5), 681–690. doi: https://doi.org/10.1134/s0015462815050105

11. Козлов, А. Н. (2009). Двухжидкостная магнитогидродинамическая модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем. Прикладная механика и техническая физика, 50 (3), 44–55.

12. Constantin, P. (2001) Some Open Problems and Research Directions in the Mathematical Study of Fluid Dynamics. Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond. Springer, 353–360. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-56478-9_15

13. Lockerby, D. A., Reese, J. M., Gallis, M. A. (2005). Capturing the Knudsen Layer in Continuum-Fluid Models of Nonequilibrium Gas Flows. AIAA Journal, 43 (6), 1391–1393. doi: https://doi.org/10.2514/1.13530

14. Pitakarnnop, J., Geoffroy, S. (2008). Slip flow in triangular and trapezoidal microchannels. International Journal of Heat and Technology, International Information and Engineering Technology Association, 26 (1), 167–174.