

*П.М. Гащук, д.т.н., професор*

*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*

*ORCID: 0000-0002-2345-4879*

## ОДНОЗНАЧНІСТЬ-НЕОДНОЗНАЧНІСТЬ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ АВТОМОБІЛЬНИХ СИСТЕМ ЗА УМОВ КРИТЕРІЙНОЇ НЕВИЗНАЧЕСНОСТІ

Розглядається загальна методологія параметричної оптимізації систем одночасно за двома довільними критеріями. Запропоновано так званий принцип розширення оптимізаційної задачі, який створює засади для пошуку гарантовано однозначних її розв'язків, не вдаючись до штучних формальних засобів «згорання» двох критеріїв в один. Виявляється, дуже поширений мультиплікативний критерій так званого справедливого компромісу насправді виражає середнє геометричне основних критеріїв. Його легко звести до адитивного. І отже достеменно не відомо, чому йому слід надавати перевагу перед, скажімо, середнім арифметичним (після відповідного погодження розмірностей)первинних критеріїв. В критерії справедливого компромісу більше суб'єктивного й надуманого, ніж об'єктивного і правдивого.

Удосконалювання — це перманентний процес: він має початок, але не має кінця. А оскільки «нові» досконалості виникають час від часу і з кожної з них певний час обов'язково користають, то, зрозуміло, процес удосконалювання — це покроковий процес, нескінченне крокування до недосяжного ідеалу. І саме цю обставину слід обов'язково брати до уваги.

Описані в роботі алгоритми пошуку оптимального формалізовано відтворюють на примітивній модельній площині реальний процес покрокового удосконалення всього рукотворного — від прийнятного до кращого... Не існує прикладів, коли б щось було створено відразу беззастережно оптимально (а ідеально — взагалі не пізнаване, а отже й не втілюване). На кожному кроці один з алгоритмів регламентує мінімізувати значення якогось одного критерію, не зачіпаючи, не змінюючи іншого. А тому поза аттрактором жодних конфліктів не виникає. І тільки в межах аттрактора, за який на модельній площині править відтінков лінії (що є одновимірним аттрактором), злагода зникає. Інший алгоритм поєднує в собі низку кроків, в кожному з яких змінюється тільки один параметр і зиск при цьому мають як прихильники якоїсь одної досконалості, так і прихильники якоїсь іншої досконалості. Тож не виникає конфліктів, аж допоки алгоритм, знову ж таки, не надібує аттрактор, який цього разу є областю на модельній площині, тобто двовимірним аттрактором.

В межах аттрактора всі розв'язки оптимізаційної задачі доречно, доцільно вважати цілком рівноцінними. Проте насправді нездоланий суб'єктивізм не дозволяє пристати на цю думку (без участі якогось диктатора, скажімо).

**Ключові слова:** автомобільна система, параметрична оптимізація, критерійна невизначеність, аттрактор, однозначність-неоднозначність

*P.M. Hashchuk*

## CERTAINTY-UNCERTAINTY OF PARAMETRIC OPTIMIZATION OF MOTOR-CAR SYSTEMS IN CASE OF CRITERIAL UNCERTAINTY

**Annotation.** The general methodology of parametric optimization of systems is considered for two arbitrary criteria simultaneously. The so-called principle of expanding an optimization problem is proposed, which creates the basis for finding guaranteed unambiguous solutions, without resorting to artificial formal means of «collapse» of the two criteria into one. It turns out that a very common multiplicative criterion for so-called fair trade-off actually expresses the average geometric basic criteria. It is easy to reduce (lead down) it to additive. Therefore, it is certainly not known, why he should give preference to the arithmetic mean (after the appropriate coordinate) of the dimensions of the primary criteria. There are more subjective and far-fetched than objective and truthful in the criterion of a fair compromise.

Perfection is a permanent process — it has a beginning but has no end. In that the new" perfections arise from time to time and each of them definitely use a certain time, then, of course, the process of perfection is a step-by-step process, an endless step to an unattainable ideal. This particular circumstance should be taken into account.

Described algorithms for optimal search formally reproduce on a primitive model plane the real process of step-by-step improvement of all man-made - from acceptable to better... There are no examples when something was created

immediately unconditionally optimally (and the ideal — at all not recognizable and therefore not embodied). At each step, one of the algorithms regulates minimizing the value of a single criterion, without affecting it, without changing the other. That is why there are no conflicts outside the attractor. Only within the attractor, for which the line (which is a one-dimensional attractor) rules on the model plane, the consistency disappears. Another algorithm combines a series of steps in each of which only one parameter varies, and the gain at the same time has both supporters of one perfection, and supporters of some other perfection. Consequently, there are no conflicts, until the algorithm does not attract the attractor, which this time is an area on a model plane, that is a two-dimensional attractor.

Within the attractor, all solutions to the optimization problem is appropriate without a doubt, even advisable to consider completely equivalent. However, in fact, insurmountable subjectivism does not allow us to adhere to this idea (let's say, without the participation of any dictator).

**Keywords:** motor-car system, parametric optimization, criterion uncertainty, attractor, unambiguousness-ambiguity

**Вступ. Формулювання проблеми.** Формальна оцінка рівня досконалості штучно створеної системи, машини (приміром, автомобіля) практично завжди є щонайменше двокритерійною. Справді, про оптимізацію заходить мова саме тоді, коли щось чомусь протиставляється. Нема протиріччя — нема потреби шукати компроміс, нема оптимізаційної проблеми пошуку чітких ознак досконалості. Під оптимізаційним критерієм слід розуміти наділений сенсом вимірник разом із формалізованими правилами оперування ним. Покладання функцій критерію на якийсь штучно означений вимірник зумовлено найчастіше потребами будь-що однозначного оцінювати багатогранну у своєму прояві досконалість автомобільної системи чи автомобіля загалом. Але в такому разі завжди спостерігається маніпулятивність.

**Мета роботи** — саме нівелювати маніпулятивність в процесі параметричної оптимізації автомобільної системи (чи машини), керуючись суто змістовими, а не формальними критеріями і засобами.

До завдань, які належить вирішити перш за все, доречно віднести такі:

– критично окреслити найзагальніші аспекти методології параметричної (чи іншого змісту) оптимізації автомобільної системи одночасно за двома довільного змісту критеріями;

– розробити так званий принцип розширення оптимізаційної задачі, який би створював засади для пошуку гарантовано однозначних чи менш невизначених її розв'язків, не вдаючись до штучних формальних засобів «згортання» двох (чи більше) критеріїв в один.

**Основні аспекти невизначеності.** Модель/методологія/технологія оптимізації може спиратись як на прості одновимірні й безумовні, так і на складні багатовимірні й умовні методи із застосуванням прямих чи градієнтних алгоритмів пошуку оптимуму, яким властиві прийнятна збіжність, або ж покрокових процедур пошуку глобального оптимуму, які можуть містити в собі навіть елементи випадковості чи нечіткості [1—5]. Для оптимізації розподілу й споживання

енергії від двигуна внутрішнього згорання, генератора, електробатарей, сонця на борту гібридного сонячного транспортного засобу (Hybrid Solar Vehicle — HSV) з послідовною структурою використовують, зокрема, так званий генетичний алгоритм [6, 7]. Окремо можна вирізнити структурну (топологічну) оптимізацію [8, 9] чи оптимізацію без використання математичного апарату диференціалів (похідних) [10].

Багатоцільова постановка оптимізаційної задачі, особливо у поєднанні з багатовимірністю часто потребує залучення експериментальних засобів пошуку досконалості. Багато з найуживаніших алгоритмів уже занурені в каліброване програмне середовище, що позбавляє дослідника потреби займатися рутинними діями. А часто оптимізацію проводять засобами того чи іншого пакету програмного забезпечення, в якому зашта певна концепція оптимальності, яка не підлягає коректуванню з боку дослідника.

Часом під оптимізацією розуміють технічний аналіз, без глибокої математичної формалізації проблеми, результатом якого є системне поєднання кращих властивостей об'єкта. Оптимізація засобами суто технічного аналізу проведена, приміром, в роботі [11] стосовно електродвигуна з зовнішнім ротором і постійними магнітами для безпосереднього (прямого) приводу автомобіля (електромобіля) середньої швидкохідності. Технічну (конструкторську) оптимізацію з залученням експерименту й математичної аналітики було застосовано для мінімізації коефіцієнта аеродинамічного опору автомобіля чи аеродинамічності крила [12, 13]. Більше технічного, ніж математичного, можна знайти також в оптимізаційній задачі стосовно електричної машини з постійними магнітами, розглянутій в роботі [14].

Тож не існує загально визнаної технології пошуку ознак досконалості систем/машин. Кожна оптимізаційна задача/проблема є зазвичай настільки особливою, що відразу невідомо який метод її розв'язування виявився б найефективнішим. Це породжує своєрідну невизначеність: чи задачу/проблему має формулювати той, хто володіє якимись ефективними засобами

оптимізації; чи той, хто винайшов актуальну задачу/проблему повинен запізнатися зі всіма існуючими методами оптимізації, аби вибрати найефективніший; чи хтось один має займатись пошуком і формулюванням задачі/проблеми, а хтось інший — її розв'язуванням.

Але значно глибшою є невизначеність у розумінні змісту поганого/пересічного і хорошого/досконалого. Можна казати, що вимірників/критеріїв оптимальності/досконалості існує чи не безліч. Багато дослідників вважають за обов'язок винайти свій критерій досконалості, аби довести свою значущість в науці чи закарбуватись в історії науки. Але насправді, хоча сутнісна досконалість, вичерпно не пізнавання, та це не означає, що вона має мати суто суб'єктивні орієнтири.

Існують оптимізаційні проблеми цілком різного змісту. Приміром, оптимізацію автомобільного приводу проводять зазвичай у чотирьох напрямках: 1) пошук оптимальної системної структури (топології); 2) знаходження оптимальних співвідношень між номінальними параметрами складових частин (оптимальне суміщення частин); 3) синтез оптимальних характеристик окремих складових структури; 4) синтез оптимальних законів, стратегій, алгоритмів керування. Але далеко не завжди керуються у цих задачах одними і тими самими критеріями оптимальності. Оптимізують, скажімо, системну структуру (топологію) і параметри суміщення частин приводу, керуючись вимогами мінімізації витрат пального. А от щодо складніших задач вдаються до використання простіших за змістом критеріїв. Через це, хоча синтез оптимальних законів керування сприймають як не надто складну задачу, та насправді очікуваного успіху в процесі її розв'язування часто не досягають, бо оптимальність має бути системно збалансована в глобальному сенсі — стосовно всієї машини.

Зазвичай розрізняють закони перемикання передач (ступенів, сходинок) в трансмісії автомобіля, оптимальні чи з огляду на паливну економічність, чи з огляду на динамічність/продуктивність, чи з огляду на комфортність/безпеку руху автомобіля тощо. І всі ці різновиди законів вважають особливими, незвідними один до одного. Але виявляється, що правильного трактування змісту оптимальності впливає один-єдиний оптимальний закон перемикання передач, в рамках якого не виникають протиріччя, принаймні, між вимогами енергоощадності та вимогами динамічності (чи продуктивності) транспортного засобу [15, 16].

Гібридний привід з елементами перемикання ступенів (керування структурою) складніший за звичайний послідовний чи паралельний, складнішим, звісно, є й керування ним [17, 18]. Але більша структурно-системна складність приводу розкриває ширші можливості для реалізації таких

законів керування потоками енергії, що забезпечують значнішу економію палива й високу комфортабельність автомобіля. В [19] розглядають, зокрема, метод оптимального калібрування (визначення характерних номіналів, номінальних розмірів) протон-обмінної мембрани (proton exchange membrane — PEM) паливного елемента і літій-йонної батареї в системі типу «plug-in». І хоча технологія оптимізації таких гібридів ускладнюється, та суттєво зростає рівень їх експлуатаційної ефективності.

Типові методологічні труднощі, які виникають у процесі оптимізації властивостей гібридних автомобілів, об'єктивно висвітлені, зокрема, в роботах [20—22]. Зауважмо, особливої ваги в наш час набула проблема проектування й удосконалення автомобілів саме з електричним та гібридним приводом. Саме тому приклади оптимізаційних технологій з цієї царини зустрічаються тут неодноразово.

Важливу роль відіграє й спосіб вимірювання досконалості. Для оптимізації паливної економічності, скажімо, гібридного автомобіля у разі реалізації заданих їздових циклів використовують часто алгоритми динамічного [18, 20] чи випуклого програмування [23, 24]. Для оптимізації програмування в транспортному циклі використовують також принцип максимуму Понтрягіна [25]. Аби заміряти ефективність сонячних автомобілів намагаються синтезувати оптимальні програми перегонів такі, щоб гонка завершилась у найкоротший час, можливий з огляду на доступний запас енергії (ексергії) [26]. В [26] розглядаються, зокрема, два евристичні методи оптимізації й оцінюється їх збіжність. Але результати оптимізації суттєво залежатимуть від того, який їздовий цикл має відтворювати автомобіль. Сам транспортний цикл, відтворення якого є завданням для автомобіля, править за обмеження, дотримання якого є умовою оптимізаційної проблеми [27].

Різні алгоритми, звісно, по-різному ефективні у різних оптимізаційних задачах. Ефективність алгоритму принципово залежить і від того, якими критеріями оптимальності оперують. В [23], приміром, оптимізаційні орієнтири вибудовують засобами аналізу впливу стратегії керування потоками енергії та номінального розміру акумуляторної батареї на енергетичну ефективність гібридного транспортного засобу в конкретних умовах експлуатації. Але енергетичну ефективність транспортного засобу можна оцінювати принципово по-різному. Енергетична (ексергетична) ефективність — дуже складне поняття.

Зокрема, енергетичну ефективність будь-якої машини, на перший погляд, доречно оцінювати коефіцієнтом корисної дії, який сприймається як змістовно адекватний вимірник досконалості. Та насправді можна навести наукові аргументи, що спростовують статус коефіцієнта корисної дії машини як об'єктивного вимірника чи критерію. В [28] це зроблено на прикладі звичного автомобіля.

Набагато легше оперувати примітивними формальними критеріями оптимальності, до яких простіше підібрати раціональний алгоритм оперування. Приміром, в рамках так званої практичної оптимізації в [29] запропоновано проблему удосконалення конструкцій портової перевантажувальної техніки трактувати як «мінімаксу» задачу, що полягає у визначенні максимальних (амплітудних) значень навантажень за різних варіацій робочих режимів з подальшим добором серед них режиму з мінімальною амплітудою. Задачу розглянуто на прикладі механізму з рухомим циліндром портового підіймача, що має доволі широке застосування на автоматичних кранах і оптимізується з різними підходами і за різними критеріями [30, 31]. Звісно, такий «мінімакний» критерій за змістом дуже бідний. Йому можна протиставити багато інших, зокрема орієнтованих на реалізацію енергоощадних технологій (з урахуванням, звісно, технологічних обмежень [32]). Простими, але принципово змістовнішими, є критерії оцінювання, приміром, динамічності розгону автомобіля [33].

Важливою інформацією про енергоефективність теплової машини-двигуна є та, що об'єктивно характеризує якість теплоперетворення [34, 35]. Визначальну роль відіграє, звісно, ефективність процесу теплотворення в робочому просторі двигуна [36, 37]. Та на ефективності теплового двигуна не можуть не позначатися теплообмінні процеси [38]. Але якщо теплотворення було б добре максимізувати, то тепловіддачу слід налаштувати відповідно до потреб захисту вузлів і деталей двигуна від надмірних температурних впливів — цього разу не може йтися ні про максимізацію, ні про мінімізацію тепловіддачі. Тому за критерій оптимальності має правити ступінь тепловикористання, а ще краще — механічна робота, реалізовувала унаслідок теплоперетворення.

Доречно зауважити, що подальший розвиток класичних підходів до моделювання робочих процесів у двигуні, спираючись суто чи здебільшого на аналітико-алгоритмічні описи, є практично неможливим. Тож доводиться залучити в модель також і реальний робочий простір двигуна, системно приєднуючи його до віртуального, втіленого в програмно-алгоритмічному середовищі, і тим самим впроваджуючи частину реальності в модель цієї ж реальності [39, 40]. А в такому разі оптимізаційний алгоритм набуває особливих рис і помітно ускладнюється.

Викладене дозволяє вирізнити ще один різновид невизначеності, що суттєво ускладнює оптимізаційну активність, — це відсутність об'єктивних можливостей однозначно розуміти й тлумачити досконалість. Поглиблюють такого типу невизначеність спроби вимірювати досконалість багатьма критеріями і тлумачити оптимізаційну задачу як багатоцільову.

За змістовні критерії оптимальності/досконалості гібридного автомобіля часто правлять енергетична ефективність, екологічність, продуктивність, вартість [41]. За цими чи подібного змісту критеріями оптимізації зазвичай піддають структуру(топологію) приводу, його параметри (зокрема номінальні розмірні), закони керування — порізно чи сукупно [41, 42].

Оптимізація одночасно структури, параметрів, законів керування може здійснюватись як за допомогою алгоритмів глобальної, так і алгоритмів поступової частинної оптимізації. Один із доволі зручних підходів до оптимізації машини регламентує необхідність ідентифікації пріоритетів режимів роботи окремих її систем, а далі — здійснювати пошук таких параметрів машини, її характеристик, законів керування, які б забезпечували переважне використання режимів з вищим пріоритетом. Коли йдеться про двигун внутрішнього згоряння, приміром, то вимірником пріоритету режимів його роботи слугує питома витрата пального на множині різних значень потужності двигуна [43]. Аналіз ступеня відповідності реально втілюваних режимів роботи двигуна внутрішнього згоряння і електродвигуна в гібридному автомобілі чи електродвигуна в суто електричному автомобілі так званим пріоритетним режимам дає доволі цінну інформацію про рівень досконалості й особливості прояву властивостей системи керування потоками енергії на об'їзду транспортного засобу [44, 45].

Мапи ефективності режимів роботи двигунів використовують надзвичайно широко [20, 46, 47, 22, 48], хоча насправді вони об'єктивно точно пріоритети режимів не завжди відображають. Але орієнтування на ці мапи — це значною мірою спроба штучно знівельовати невизначеність у трактуванні досконалості машини.

З приводу, цілком не пов'язаного з проблемою оптимізації, в роботі [49] наведено опис дуже повчальної історії. Так звана Група статистичних досліджень (Мангеттен, США) під час Другої світової війни працювала над засобами підвищення ефективності бойових дій проти ворога. Довелося, зокрема, розробляти рекомендації щодо бронювання літаків. Аби ворог легко не збивав американські літаки, їх було б добре вкрити бронєю. Та літак унаслідок бронювання набуває надмірної ваги, втрачає швидкість, стає гірше керованим і потенційно уразливішим, помітно зменшуються його енергоощадність і радіус дії тощо. Тож, як зазвичай буває, тут добре супроводжується поганим.

Відтак виникає розуміння того, що існує якийсь оптимальний рівень бронювання. Його не можна звести до призначення якоїсь оптимальної товщини бронювання усього літака. Напевне слід надійно захистити лише якусь частину літака,

навіть, можливо, взагалі не переймаючись захистом інших його частин.

Військові надали вченим свою доволі конкретну інформацію, з якої випливало, що американські літаки з боїв над Європою повертаються з кульовими ушкодженнями, які далеко не рівномірно вкривають корпус: на квадратний фут припадало 1,11 кульових пробоїн — зона двигуна, 1,73 — фюзеляж, 1,55 — паливна система, 1,80 — решта літака. Військовим здавалось, що клопоти можна залагодити, зосередивши броню в місцях, де зустрічається найбільше ушкоджень. Отож вченим, на думку військових, залишається з'ясувати, скільки власне потрібно цієї броні.

Та вчені вирішили цілком інакше: місця, де є багато кульових ушкоджень, бронювати взагалі не треба; бронювати слід тільки місця, де пробоїн немає або мало — це двигун. Пояснення просте: «смертельні» для літака ушкодження «не долетіли» до базового аеродрому.

Звісно, звернути увагу є сенс, перш за все, на те, що організація панцерного захисту змушує зважати на наслідки, що пов'язані з масою літака, витратою ним пального, його маневреністю і динамічністю тощо. І все це разом визначає уразливість літака, що й доведеться брати до уваги, визначаючи потужність панцерного захисту. Отже критерій оптимальності тут зовсім не прозорий, його важко формалізувати.

У разі оперування багатьма рівноправними критеріями розв'язок оптимізаційної задачі не може бути однозначним — впливає множина розв'язків, оптимальних в сенсі Парето. Приміром, запропоновано проектувати систему енергозабезпечення електричних автомобілів на підставі оптимальних розв'язків Парето, на основі яких проектувальник має ухвалювати остаточне багатопільове рішення, керуючись контрольними системними вимогами чи/та апаратними обмеженнями [50]. Іншими словами, рекомендують позбуватись невизначеності суб'єктивними засобами.

У дуже складних задачах ухвалення рішень в умовах невизначеності інколи пропонують покладатись на технологію експертних оцінок. Ще якось можна миритись з тим, що на експертні оцінки покладаються у повсякденній практиці ухвалення важливих рішень у дуже складних ситуаціях невизначеності. Але помітним є й те, що технологія експертних висновків проникає в науку, де за істину не прийнято голосувати, як на виборах. В [51] на простих прикладах показано сумнівні перспективи застосування технології експертного оцінювання в царині наук.

Чи не найважливішим висновком зі щойно викладеного має бути твердження, що удосконалення машини, у принципі, завжди легко бачити багатопільовим, а от сам процес оптимізації (пошук

ознак досконалості) насправді формально не повинен спиратись на багато критеріїв, аби не втопити істину в надмірній невизначеності. Природним є обліковування й зіставляння зиску/користі (очікуваного від прогнозованої, ідентифікованої досконалості) та затрачених зусиль/ресурсів (потрібних на використання досконалості у разі її втілення). Приміром, цілком природним є оперувати одночасно продуктивністю і енергоощадністю автомобіля. Критерії оптимальності не потрібно суб'єктивними засобами винаходити, досконалисть і її вимірники слід об'єктивно пізнавати, як усе в науці. Штучне згортання двох критеріїв в один ніби й усуває критерійну невизначеність та насправді спотворює уявлення про досконалисть. Висловлене зауваження — ще м'яка форма сумнівів.

Такий підхід до вимірювання/оцінювання досконалості накладає певний відбиток на вибір алгоритмів оптимізації. Але вагомим у цьому виборі все ж є не швидкість знаходження оптимуму (не збіжність алгоритму як така) а наочність процесу пошуку оптимуму і чіткість у розкритті суті оптимальності. Очевидно, що в ідеалі машина повинна б удосконалюватись глобально у всіх напрямках одночасно. Насправді ж рух до досконалості розосереджений в часі і просторі. Приміром, різні системи автомобіля удосконалюються різними дослідниками різних спеціальностей одночасно чи у різний час. Але синергізму ніхто не зможе гарантувати. Радше, навпаки, розв'язки різних оптимізаційних задач напевне виявляться несумісними. Отже виникає новий рівень невизначеності, посилюваний переліченими вище різновидами невизначеностей.

**Поняття компромісу.** Припустімо, що оптимальність деякого параметра  $P$  машини у разі незмінних інших її параметрів оцінюють за допомогою двох критеріїв —  $K_1 > 0$  і  $K_2 > 0$  (рис. 1), значення яких доречно мінімізувати. В сенсі критерію  $K_1$  оптимальним є значення  $P_{K_1}$  параметра  $P$ , а в сенсі критерію  $K_2$  — значення  $P_{K_2} \neq P_{K_1}$ . Отож нема можливості здійснити якийсь однозначний вибір. Залишається обґрунтувати певний (бажано справедливий, паритетний (лат. *paritas* — рівність)) компроміс. Вважають часто, що справедливий компроміс виражає інтегральний критерій  $K' = kK_1K_2$  — мультиплікативний згорток основних, первісних критеріїв  $K_1$  і  $K_2$ . Цей критерій рівноцінний критерієві  $K'' = \sqrt{K_1K_2}$ , тобто він пропорційний середньому геометричному величин  $K_1$  і  $K_2$ . У сенсі цього критерію оптимальним є значення параметра  $P = P_g^*$ , що належить множині  $\Delta: P_{K_2} \leq P \leq P_{K_1}$ . Мультиплікативний

критерій можна звести до рівноцінного адитивного: приміром  $K'' = \sqrt{K_1 K_2}$  можна замінити на  $\ln K'' = (\ln K_1 + \ln K_2) / 2$  — середнє арифметичне величин  $\ln K_1$  і  $\ln K_2$ . Відтак, чому за критерій не може правити середнє арифметичне  $K''' = (K_1 + K_2) / 2$ , яке визнає за оптимальне значення параметра  $P = P_a^* \in \Delta$ ? Відтак, чому за оптимальне значення параметра не може правити чи середнє арифметичне  $P'_a = (P_{K_1} + P_{K_2}) / 2$ , чи середнє геометричне  $P'_g = \sqrt{P_{K_1} P_{K_2}}$ , чи якийсь інше середнє безпосередньо величин  $P_{K_1}$  і  $P_{K_2}$ ?

$K_1, K_2, kK_1 K_2, (K_1 K_2)^{1/2}, (K_1 + K_2)/2$

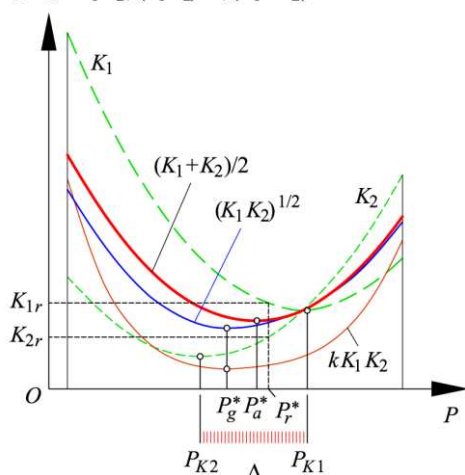


Рисунок 1 — Невизначеність оптимального

Якщо критерії мають цілком однакову вагу, то спадає на думку ідентифікатором оптимального значення параметра вважати точку  $(K_{1r}, K_{2r})$  залежності  $F(K_1, K_2) = 0$ , розташовану якнайближче до початку  $O$  системи координат  $K_1 O K_2$ , рис. 2: залежність  $F(K_1, K_2) = 0$  впливає унаслідок елімінації  $P$  зі співвідношень  $K_1 = K_1(P)$  і  $K_2 = K_2(P)$ ;  $(K_{1r}, K_{2r})$  — це точка взаємодотикання кола з центром в  $O$  і графіка  $F(K_1, K_2) = 0$ ; їй відповідає умовно оптимальне значення параметра  $P = P_r^*$ , див. рис. 1; якщо коло здеформувати до дотичного еліпса, то це означатиме, що паритет спотворено.

На рис. 3 наведено приклад, коли інтегральний критерій не фіксує однозначно якийсь оптимальне значення параметра  $P$ . А навпаки, у разі  $K_1 = \alpha P$  та  $K_2 = \beta / P$  ( $\alpha, \beta$  — сталі) новий критерій  $K' = K_1 K_2$  стверджує, що всі допустимі значення  $P_{K_1} \leq P \leq P_{K_2}$  є цілком рівноцінними. Але з цим в жодному разі не погодяться ті, хто керується чи критерієм  $K_1$ , чи критерієм  $K_2$ .

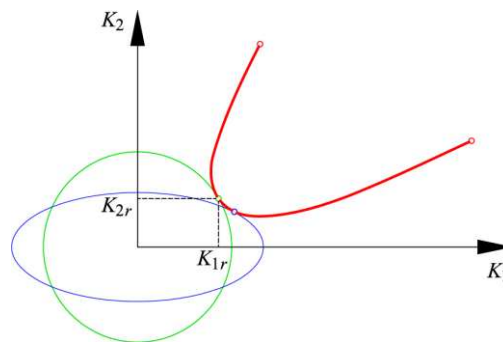


Рисунок 2 — Умовний компроміс

$K_1, K_2, K_1 K_2$

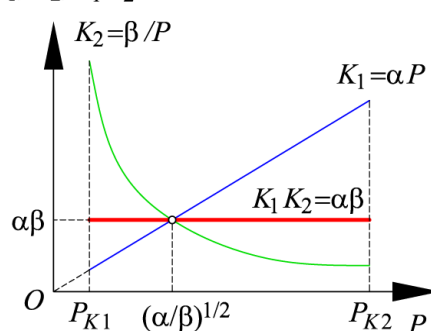


Рисунок 3 — Нерозпізнана оптимальність

Точка, яка мала б відповідати оптимальному значенню параметра (відобразити його), — це своєрідний, в очевидному сенсі — статичний, аттрактор, який за участі й спонукання дослідника/конструктора/виробника тягне-штовхає штучно створювану систему в параметрично оптимальний стан у деякому прийнятному, досяжному параметричному просторі, на відміну від динамічного аттрактора, до якого динамічна система самочинно прямує хай навіть нескінченно довго (асимптотично). Окіл аттрактора — це, за термінологією теорії динамічних систем, басейн, обмежений так званими сепаратрисами. Отож окіл  $\Delta$  (див. рис. 1) — це атрактивний басейн, а сепаратриси — це межі цього басейну  $P_{K_1}$  і  $P_{K_2}$ , що своєю чергою є аттракторами в сенсі критеріїв  $K_1$  і  $K_2$ . Але допоки компромісний оптимум не знайдено, сам цей басейн загалом залишається лише аттрактором. То чи варто шукати конкретний компромісний аттрактор-оптимум? Може всі елементи (значення параметра  $P$ ) з околу  $\Delta$  є рівноцінними?

На думку спадає відома логічна задача про трьох мудреців, яку згадаймо тут у викладі, поданому в роботі [52].

Три мудреці постановили будь-що з'ясувати, хто з них наймудріший. Аж нагодився перехожий — також мудрець. Він витяг із суми три білих і два чорних капелюхи, посадовив мудреців у коло об-

личчям до облич, зав'язав їм очі і кожному на голову одяг по капелюху, а два зайвих сховав назад у суму. Задача б не визріла, якщо б не було показано скільки яких капелюхів у перехожого. Визнання наймудрішого мав отримати той з мудреців, хто першим визначив би, який на ньому капелюх.

Мудреці швидко порозв'язували собі очі, але далі довго довелося їм думати-вагатись. Аж нарешті один з них вигукнув: «На моїй голові білий капелюх».

Мудрець міркував так: «Я бачу перед собою два білі капелюхи. Якщо на мені чорний капелюх, то будь-хто з моїх суперників повинен розуміти ситуацію так: «Переді мною чорний і білий капелюхи. Якщо на мені чорний капелюх, то суперник у білому капелюсі зобов'язаний углядіти очевидну відповідь». Але вони обоє мовчать. Тож на мені — білий капелюх».

Мудрець думав необхідно й достатньо довго! Мабуть тому, аби дати змогу належно подумати двом іншим; тільки достатньо тривала мовчанка суперників дала йому підстави зробити правильний висновок. Але якщо б він забарився з відповіддю? А якщо б один з мудреців взагалі не міг розв'язати задачу через низький інтелект, і його мовчання нічого корисного не означало? А якщо хтось з мудреців навіть не збирався давати відповідь, аби, приміром, дошкулити розумнику-перехожому? А якщо хтось з мудреців вдався б до примітивного вгадування, а не до логіки? А якщо б один з мудреців принципово не розв'язав собі очі, не визнаючи ніяких суддів над собою?..

Мудріший серед мудрих міркував за себе і своїх суперників. Це чиста рефлексія. Думання про думки породжує ситуаційно цінну думку... Але був ще четвертий учасник протистояння — перехожий. Відразу спадає на думку, а чи перехожий справді суддя? Якщо б він надав неоднакові шанси суперникам, то радше вислідом тесту буде переконаність, що перехожий — не мудрець. Виглядає так, що ймовірність того, що хтось з мудреців побачить два чорні капелюхи, є нульовою. Щоби бути абсолютно справедливим, перехожий мав би одягнути на всіх білі капелюхи. Проте якщо мудреці зрозуміють це заздалегідь, то задача стане тривіальною і тест на мудрість буде невтішним для самого перехожого: йому — не місце серед мудреців.

Взагалі кажучи, мудрецам не личить сперечатись, хто наймудріший. Мудрецам нема сенсу бути й суддями серед «мудрих». Але припустімо, що всі четверо причетних до окресленої «проблеми» розуміють тривіальність абсолютної справедливості. Тоді вони всі зроблять ставку на варіанти, в яких фігурує один чорний капелюх. Але в такому разі йдеться вже про ймовірнісне сприйняття задачі: з ймовірністю  $2/3$  на голові мудреця мусить бути білий капелюх.

Припустімо, що перехожий-суддя заборонив мудрецам-піддослідним розв'язувати очі. Тоді, не ризикуючи стати несправедливим, він міг би використати будь-який з семи можливих варіантів одягання капелюхів. Ймовірність, того, що на голові мудреця виявиться білий капелюх тепер становить  $4/7$ .

Вдамося тепер до чистої евристики, яка не вимагає особливих мудрувань. Побачивши у судді три білих і два чорних капелюхи, легко збагнути, не переймаючись тонкощами, що ймовірність того, що на голові мудреця виявиться білий капелюх становить  $3/5 > 1/2$ .

Може не варто претендувати кожного разу, з великими затратами часу й інтелектуальних зусиль, на абсолютно точний результат? В житті доводиться розв'язувати багато корисних задач, і краще їх розв'язати якнайбільше, керуючись простим принципом: домагаючись евристично найімовірнішого результату в кожній конкретній задачі, можна й промахнутись, але за підсумками багатьох ситуацій можна досягнути в загальному значних успіхів. Зрештою, й оточенню подобається, коли хтось програє хоча б від випадку до випадку, і зовсім не подобається, коли виграє завжди (хто зважає, що це не дуже часто!).

**Поняття атрактора.** З використанням комп'ютерів стало можливим розв'язувати надскладні нелінійні диференціальні рівняння, які здатні краще описати реальність, ніж лінійні. І з'ясувалось, що поряд зі звичайними атракторами (станами, до яких чітко прямує система) існують такі дивні атрактори, траєкторії прямування до яких ніколи себе не повторюють — вони нерегулярні, цілком заплутані. Приміром, американський метеоролог Е. Лоренц виявив, що розв'язок задачі про теплову конвекцію — це траєкторія з двох зчеплених «клубків». Кожна точка, що відображає стан системи, де б вона не перебувала в початкову мить, створює низку погано контрольованих переходів з одного клубка в інший, бо не можливо визначати поточні координати з абсолютною точністю. Отож хаос виникає навіть там, де якоїсь випадковості принципово ніби немає. Це є, мабуть, детермінований хаос, чи хаотична детермінованість. І взагалі, точність обчислення, визначення, означення найчастіше не може бути цілковитою, абсолютною. Тож оптимізаційна задача не може мати абсолютно точного розв'язку. Тому й нема сенсу шукати саме цілковито точний оптимум.

Хай величини  $K_1$ ,  $K_2$  є однозначними неперервно диференційовними функціями від параметрів  $P$ ,  $p$ , кожна з яких набуває мінімального значення (і локально, і глобально) тільки в одній точці (кожна у своїй). Лінії рівня  $K_1(P, p) = \text{const}$  та  $K_2(P, p) = \text{const}$  цих функцій (ізокванти, ізолінії) можна відобразити гладкими замкнутими

кривими (рис. 4: штрихові криві хай відображають ізолінії  $K_1 = \text{idem}$ , а штрихпунктирні — ізолінії  $K_2 = \text{idem}$ ; точки  $O_1, O_2$  відповідають мінімумам величин  $K_1, K_2$  відповідно). Ізолінії  $K_1(P, p) = \text{idem}$  та  $K_2(P, p) = \text{const}$  взаємодотикаються в точках, належних лініям  $k-k'$  і  $l-l'$ . Крива  $k-k'$  проходить через точки мінімуму  $O_1$  і  $O_2$ . До того ж, відтинком  $O_1O_2$  лінії  $k-k'$  об'єднує всі точки так званого «зовнішнього» взаємодотикання (коли точки  $O_1$  і  $O_2$  перебувають по різні боки від спільної дотичної прямої до кривих  $K_1(P, p) = \text{idem}$  та  $K_2(P, p) = \text{idem}$ ). Всі інші точки ліній  $k-k'$  і  $l-l'$  — це точки внутрішнього взаємодотикання ізоліній ( $O_1$  і  $O_2$  перебувають по один бік від спільної дотичної до кривих  $K_1(P, p) = \text{idem}$  та  $K_2(P, p) = \text{idem}$ ; щоправда,  $O'$  є одночасно і точкою взаємодотику, і точкою взаємоперетину ізоліній).

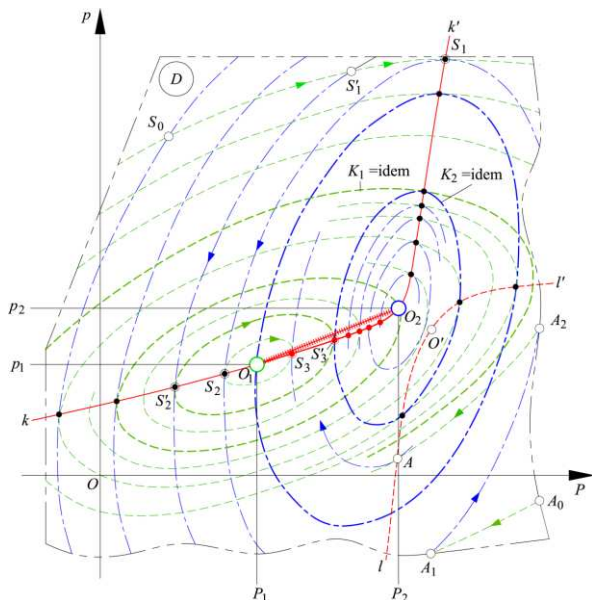


Рисунок 4 — Двокритерійне оцінювання двопараметричних ситуацій

Легко бачити, що відтинком  $O_1O_2$  лінії  $k-k'$  (див. рис. 4) — це своєрідний аттрактор (Парето-аттрактор): будь якій точці  $(P, p)$ , що належить множині допустимих  $D$  і розташована поза аттрактором, можна поставити у відповідність «кращу» (з меншим значенням  $K_1$  чи/та  $K_2$ ) точку відтинка  $O_1O_2$  лінії  $k-k'$ , ніяк не конфліктуєчи ні з вимогами критерію  $K_1$ , ні з вимогами критерію  $K_2$ . Конфлікти можуть виникати тільки між розв'язками, відображуваними саме точками відтинка  $O_1O_2$ . Приміром, стан  $S_0$  системи можна змінити на стан  $S_1$ , мінімізуючи  $K_1$  за незмінного  $K_2$ ; далі, доречно мінімізувати  $K_2$  за незмінного  $K_1$ , потрапляючи в

точку  $S_2$ ; наступна мінімізація  $K_1$  за незмінного  $K_2$  веде у точку  $S_3 \in O_1O_2$ , з якої далі безконфліктно рухатись множиною допустимих розв'язків вже неможливо. Подібний перехід можна здійснити, навіть перебуваючи на границі області допустимих значень параметрів  $P, p$ , приміром, — в точці  $A_0$ : не змінюючи значення  $K_2$  але зменшуючи  $K_1$ , початкову точку  $A_0$  можна сумістити з точкою  $A_1$ ; далі, не змінюючи  $K_1$  але зменшуючи  $K_2$ , потрапляємо в точку  $A_2$ , згодом, повторюючи перший крок, — в точку  $A$  лінії  $l-l'$ . А виявляється, кожному точку лінії  $l-l'$  завжди з зиском можна перевести в точку лінії  $k-k'$ , а потім — в точку її відтинка  $O_1O_2$ . Звісно, описаний процес не веде до однозначності: приміром перехід  $S_0S_1S_2S_3$  нічим не гірший за зроблений раніше перехід  $S_0S_1S_2S_3$ . Отже й серед станів  $S_3, S_3'$  нема гіршого-кращого. І взагалі, точці  $S_0$  можна беззастережно поставити у відповідність будь-яку точку відрізка  $O_1O_2$ .

Описаний алгоритм мінімізації критеріїв  $K_1$  і  $K_2$  можна вважати найкоротшим, здійснюваним за найменшу кількість кроків, якщо поставити собі за мету вдаватись до наступного кроку тільки тоді, коли цілком вичерпались можливості зменшити чи  $K_1$ , чи  $K_2$  на попередньому кроці. Але навіть така жорстка умова не дозволяє однозначно довільній точці  $(P, p)$  з множини  $D$  допустимих поставити у відповідність яку-небудь одну точку з множини оптимальних (належних криволінійному відтинку  $O_1O_2$ ).

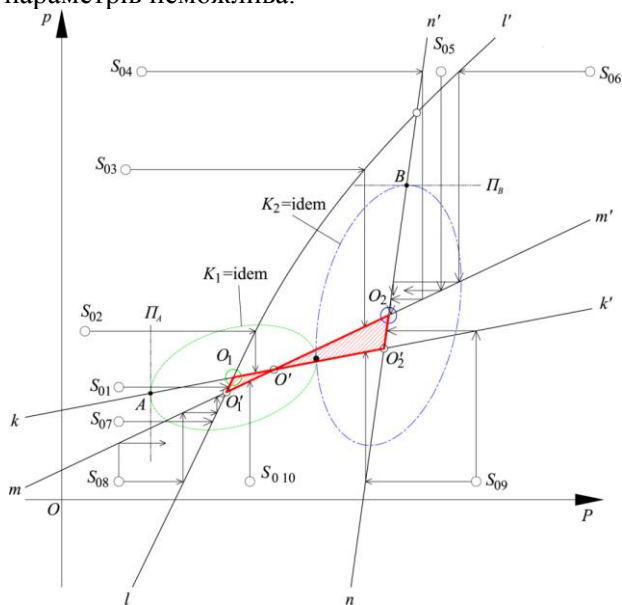
#### Покрокове удосконалення системи.

Наслідком оптимізації є «нова» досконалість (усвідомлений, визнаний вищий її рівень). А вдосконалювання — це перманентний процес: він має початок, але не має кінця. А оскільки «нові» досконалість виникають постійно і з кожної з них певний час користають, то, зрозуміло, процес удосконалювання — це покроковий процес, нескінченне прямування до недосяжного ідеалу в рамках певним чином окресленої якості. І саме цю обставину обов'язково слід брати до уваги перш за все.

Звісно, перелаштовуючи ситуацію на краще, простіше змінювати не обидва параметри одночасно, залишаючи незмінним значення якогось одного критерію, а лише один із параметрів, залишаючи інший незмінним — але знову так, аби не виникало протиставлення критеріїв. Отож побудуємо (рис. 5) лінії  $k-k', l-l', m-m', n-n'$ , що є множинами точок дотикання горизонтальних  $p = \text{idem}$  (змінюється  $P$ ) і вертикальних  $P = \text{idem}$  (змінюється  $p$ ) прямих до ізоліній



$K_1(p, P) = \text{idem}$  і  $K_2(p, P) = \text{idem}$ . Приміром, належна лінії  $k-k'$  точка  $A$  — це точка дотику вертикальної прямої  $\Pi_A$  (ізокванти  $P = \text{idem}$ ) до ізокванти  $K_1 = \text{idem}$ , а належна лінії  $n-n'$  точка  $B$  — це точка дотику горизонтальної прямої  $\Pi_B$  (ізокванти  $p = \text{idem}$ ) до ізокванти  $K_2 = \text{idem}$ ... Початковій ситуації, відображуваній, приміром, точкою  $S_{01}$ , можна, змінюючи тільки  $P$ , протиставити ситуацію, відображувану точкою відтинка  $O_1O'_1$ . Ця нова ситуація вигідніша як з позиції  $K_1$ , так і з позиції  $K_2$ . А от подальша почергова зміна чи  $P$ , чи  $p$  наразиться на спротив чи з погляду  $K_1$ , чи з погляду  $K_2$ . Натомість ситуації  $S_{02}$  і  $S_{03}$ , змінюючи спочатку  $P$ , а потім  $p$ , можна, не зустрічаючи жодного вмотивованого спротиву, перевести на ламану лінію  $O_1O'O_2$ . Ситуації ж  $S_{04}$ ,  $S_{05}$ ,  $S_{06}$  тягнуться до ситуації  $O_2$ , як  $S_{07}$ ,  $S_{08}$  — до  $O'_1$  (унаслідок нескінченної кількості почергових змін параметрів). Залежно від того, який параметр змінювати на першому кроці —  $P$  чи  $p$ , — ситуацію  $S_{09}$  можна перевести у множину чи  $O'_1O'O'_2$ , чи  $O_2O'_2$ . Подальша безконфліктна зміна параметрів неможлива.



**Рисунок 5** — Найпростіший алгоритм покрокової зміни ситуацій на краще

Звернімо увагу на те, що якщо початкову ситуацію відображає яка-небудь точка між лініями  $k-k'$ ,  $m-m'$ , то на першому кроці без конфліктів можна змінювати лише параметр  $P$ . А якщо початкову ситуацію відображає точка між лініями  $l-l'$ ,  $n-n'$  (на рис. 5 за приклади правлять ситуації  $S_{05}$ ,  $S_{010}$ ), то першим кроком му- сить бути зміна обов'язково параметра  $p$ . Тож,

якщо початкову ситуацію відображає точка заштрихованої множини, то змінити цю ситуацію на краще без конфлікту не вдасться. Очевидно, що цього разу за атрактор править вся область  $O_1O'O'_1 \cup O_2O'O'_2$  (разом з границею).

Отож з погляду стороннього (розумного) спостерігача всі ситуації, відображені на рис. 4 криволінійним відтинком  $O_1O_2$ , є рівноцінними й однаково оптимальними. Натомість, якщо хтось з безпосередньо причетних до аналізованих ситуацій твердо стоїть на позиціях  $K_1$ , а хтось — твердо на позиціях  $K_2$ , то можна казати, що між ними нездоланий конфлікт.

Спадає на думку залучити додатковий критерій оптимальності, аби дійти однозначно оптимальної ситуації. Але якщо цей додатковий критерій вагомий і об'єктивний, то чому ж ним зігнорували на початку процесу оптимізації? Цікаво, якщо від початку оперувати одночасно трьома критеріями, то виникнуть ще менш чіткі ситуації. Тоді, що — треба залучити ще один критерій? Скоріш за все, конфлікт не подолати за допомогою додаткових критеріїв.

**Віртуальне розширення оптимізаційної задачі.** Тоді, мабуть, далі ситуацію слід залишити напризволяще — хай кожен залишиться при своїх? Отож хай точки  $O_1(P_1, p_1)$  і  $O_2(P_2, p_2)$  (див. рис. 4) відображають різні параметри певної машини. Не поступаючись один одному, хай прихильники досконалості машини в сенсі  $K_1$  захоплять частку  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 1$ ) ринку (частку стороннього не надто компетентного визнання), а прихильники досконалості в сенсі  $K_2$  — частку  $1-\phi$  цього ринку. В такому разі виглядатиме так, ніби на ринку з'явилась одна-єдина машина з фіктивними параметрами

$$P = \phi P_1 + (1 - \phi) P_2, \quad p = \phi p_1 + (1 - \phi) p_2.$$

Вона відобразатиметься певною точкою відтинку прямої  $O_1O_2$  (різні точки якого відповідають різним значенням параметра  $\phi$ ). Саме визнання ринку й буде тим інтегральним критерієм досконалості, зміст якого формально описувати не обов'язково. Відтинок прямої  $O_1O_2$

$$(P_2 - P_1)p - (p_2 - p_1)P = (p_1P_2 - p_2P_1), \quad P_1 \leq P \leq P_2$$

від криволінійного однойменного відтинка  $O_1O_2$  зазвичай відрізняється мало.

Множення різноманіття — це зазвичай прояв нездоланності конфліктів інтересів. Зрозуміло, різноманіття завжди є витратнішим. Вільне ринкування майже завжди загрожує перевиробництвом та й іншими погано прогнозованими збитками. Аби атрактор «спрацював» по-



стеми координат  $xPy$ , осі якої обернено зорієнтовані відносно осей основної системи координат  $K_1OK_2$ . Якщо в першому квадранті нової системи координат  $xPy$ , включаючи також її осі, знайдеться хоча б ще одна точка кривої  $F(K_1, K_2) = 0$ , то задалегідь виділена точка  $P$  не може відповідати оптимальному значенню параметра автомобіля (в будь-якій іншій точці кривої  $K_1OK_2$  з першого квадранта значення однієї в величин  $K_1, K_2$  обов'язково є меншим, а значення іншої не перевищує значення цих величин у точці  $P$ ). У наведеному на рис. 7а прикладі цілий відтинок  $PP_1P^*P_x$  лінії  $F(K_1, K_2) = 0$  перебуває в першому квадранті системи координат  $xPy$ , а отже  $P$  — тривіальна точка; їй доречно протиставити точку  $P_x$ .

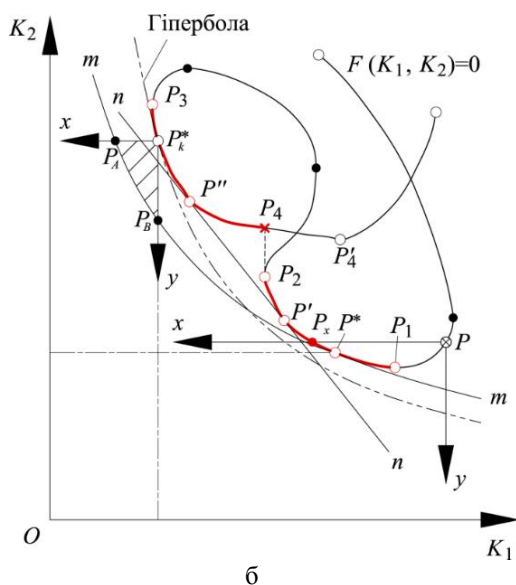
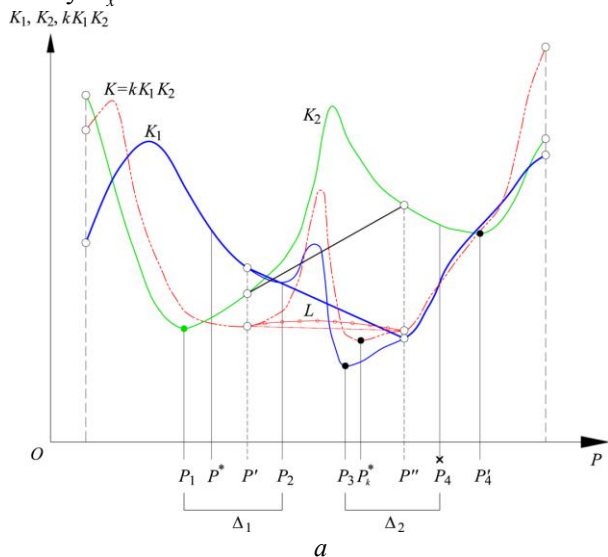


Рисунок 7 — Вишукування нетривіальних розв'язків-ситуацій

Зберігаючи задане орієнтування осей системи координат  $xPy$  і пересуваючи її початок  $P$  вздовж кривої  $F(K_1, K_2) = 0$  засобами такого самого аналізу дійдемо висновку, що тільки точками криволінійних відтинків  $[P_1, P_2]$  і  $[P_3, P_4]$  (за винятком точки  $P_4$ ) не можна знехтувати. Вони (ці точки) відповідають на рис. 7а множині  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ . Тут реальний оптимум, досяжний у разі оптимізації всіх можливих параметрів системи, відображено точкою  $Opt$ .

Але невизначеність все-одно залишається (як і зазвичай). Аби її позбутись, вдаються до ще одного критерію, наділеного якимось новим змістом. Але, як не крути, цей акт можна вважати свідомим спотворенням первісної концепції оптимальності. А ще вдаються до формалізованого «згортання» первісних критеріїв в один інтегральний, сподіваючись уникнути таким робом звинувачення у зневаженні первісної концепції. Найпоширенішим є підхід до згортання критеріїв, що спирається на так званий принцип «справедливого компромісу». За критерій оптимальності в такому разі править, як уже зазначалось, величина  $K = kK_1K_2$ , де  $k$  — стала. Критерій-згортка  $K$  справді сприяє усуненню невизначеності. Приміром, у випадку, що ілюструє рис. 7а, оптимальним є одне-єдине значення параметра  $P_k^*$  (див. також рис. 7б). Проте на визначеність-невизначеність розв'язків оптимізаційної задачі можна подивитись ще й під іншим кутом зору [1].

Коли оперують параметром  $P$ , слід розуміти, всі інші параметри залишаються незмінними. Приміром, якомусь параметрові  $p$  задалегідь було надано конкретного, незмінного значення  $p_0$ . А що, коли  $p$  (звісно, подумки) змінювати разом з  $P$ ? В такому разі замість конкретного співвідношення  $F_0(K_1, K_2, p_0) = F(K_1, K_2) = 0$  доведеться оперувати цілою низкою, множиною співвідношень  $F(K_1, K_2, p) = 0$ , надаючи  $p$  якихось «потрібних» значень. Тож можна побудувати їх обвідну  $m-m$ , див. рис. 7а. Якщо ця обвідна є опуклою (її надграфік — опукла фігура), то вона ідентифікує пари значень  $(P, p)$  параметрів  $P, p$ , які мають в сенсі критеріїв  $K_1, K_2$  хоч якісь переваги перед іншими подібними парами. А оскільки за мету ставилось оптимізувати лише параметр  $P$ , то залишається звернути особливу увагу на точку  $P^*$  дотикування ліній  $F(K_1, K_2) = 0$  і  $m-m$ : саме вона має відповідати оптимальному значенню параметра  $P$  у разі  $p = p_0$ .

Тож невизначеність у разі оптимізації параметра  $P$  вдалось усунути, аналізуючи прояв де-

якого іншого параметра. Тому принцип, на засадах якого усунуто невизначеність, є підстави назвати принципом розширення оптимізаційної задачі. Як свідчить приклад, наведений на рис. 7а, значення  $P^*$  та  $P_k^*$  можуть суттєво відрізнятись один від одного. А це означає, що принцип розширення та принцип справедливого компромісу загалом не сумісні. При цьому варто наголосити, що з'ясування принципу розширення ніде не супроводжувалось яким-небудь порушенням концепції оптимальності.

**Формалізаційні аспекти.** Умови оптимальності в параметричній задачі ідентифікуються із застосуванням принципу розширення в аналітичній формі, якщо основна залежність  $F_0(K_1, K_2, p) = 0$  та рівняння обвідної задовольняють певним умовам гладкості та опуклості. Наприклад, за співвідношень

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial p^2} \neq 0, \quad \frac{\partial F_0}{\partial K_1} \frac{\partial^2 F_0}{\partial K_2 \partial p} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial p \partial K_1} \frac{\partial F_0}{\partial K_2} \neq 0$$

обвідну  $m$ - $m$  можна описати аналітично парою рівнянь

$$F_0(K_1, K_2, p) = 0, \quad \frac{\partial F_0}{\partial p}(K_1, K_2, p) = 0 \quad (1)$$

або одним рівнянням  $F(K_1, K_2) = 0$ , вилучаючи з наведеної пари рівнянь змінну  $P$ . Завдяки цьому запис необхідних, а часто й достатніх умов оптимальності стає аналітично замкнутим.

У загальнішому випадку, коли порушуються умови гладкості (диференційовності) аналітичних залежностей, що фігурують в оптимізаційній задачі, або порушується умова опуклості вниз обвідної, формулювання умов оптимальності ускладнюється. Проте принцип розширення задачі параметричної оптимізації і тут залишається доволі ефективним.

У разі оптимальності на засадах справедливого компромісу можна писати

$$\frac{dK_2}{dK_1} = -\frac{K_2}{K_1}.$$

Отже точку  $P_k^*$  можна тлумачити як точку дотику кривої  $F_0(K_1, K_2, p_0) = 0$  та гіперболи  $K_1 K_2 = \text{const}$ , яка задовольняє щойно наведеному диференціальному рівнянню. Таким чином точка  $P_k^*$  відображала б істинний оптимум в тому разі, якщо б гіпербола була обвідною сім'ї кривих  $F_0(K_1, K_2, p) = 0$  (див. рис 7б).

На підставі другого з рівнянь (1) умову оптимальності параметра  $P$  можна подати у вигляді

$$\frac{\partial K_1}{\partial p} \frac{\partial K_2}{\partial P} - \frac{\partial K_2}{\partial p} \frac{\partial K_1}{\partial P} = 0. \quad (2)$$

У разі ж справедливого компромісу умова оптимальності має вигляд

$$K_1 \frac{\partial K_2}{\partial P} + K_2 \frac{\partial K_1}{\partial P} = 0. \quad (3)$$

Зауважмо, рівняння (2) є симетричним відносно величин  $p$  і  $P$ . Тобто його можна тлумачити також як умову оптимальності параметра  $p$  за фіксованого  $P$ .

Хай  $P$  задовольняє умову оптимальності (3). Дозвольмо собі на засадах справедливого компромісу ще додатково покращити властивості машини, оптимізуючи параметр  $p$ . Отож повинно задовольнятися співвідношення

$$K_1 \frac{\partial K_2}{\partial p} + K_2 \frac{\partial K_1}{\partial p} = 0. \quad (4)$$

Усуньмо з рівнянь (3) і (4), приміром, змінну  $K_1$ , тож дійдемо співвідношення

$$K_2 \left( \frac{\partial K_1}{\partial P} \frac{\partial K_2}{\partial p} - \frac{\partial K_1}{\partial p} \frac{\partial K_2}{\partial P} \right) = 0, \quad (5)$$

що у разі  $K_2 \neq 0$  збігається з (2). Але ж умова (2) була записана для  $p = p_0$ , тоді як умова (5) має справджуватись за додаткової умови (3) (чи (4)). Отож наголосімо: в обох випадках  $P$  є оптимальним, якщо задовольняється необхідна умова оптимальності (2), але в першому випадку  $p = p_0$ , а в другому  $p$  задовольняє рівняння (3) чи (4).

Зрештою, умова (2) справджуватиметься й у разі

$$\frac{\partial K_1}{\partial p} = \frac{\partial K_2}{\partial P} = 0 \quad \text{чи} \quad \frac{\partial K_1}{\partial P} = \frac{\partial K_2}{\partial p} = 0. \quad (6)$$

тобто умову (2) можна задовольнити також, оптимізуючи  $p$  за критерієм  $K_1$ , а  $P$  — за критерієм  $K_2$ , або навпаки,  $p$  — за  $K_2$ , а  $P$  — за  $K_1$ .

Як впливає з рис. 7б, точці  $P_k^*$  можна протиставити будь-яку іншу точку заштрихованого трикутника  $P_A P_k^* P_B$ , якій відповідають привабливіші значення  $K_1$  та  $K_2$ . Це означає, що існує можливість покращити властивості машини за рахунок відповідної зміни параметрів  $P$  та  $p$  разом з якимись іншими параметрами. У разі неперервної залежності  $K_1$  та  $K_2$  від  $P$  та  $p$  слід сподіватись, що покращення властивостей машини можна досягнути й за фіксованого  $P = P^*$  варіюванням значень  $p$ . Найістотнішими покращеннями властивостей було б тоді, коли параметрам  $P$ ,  $p$  відповідала б будь-яка точка криволінійного відтинка  $P_A P_B$ . Що ж стосується

точки  $P^*$ , то альтернативи їй віднайти нема можливості. Це стосується й значень  $P$  та  $p$ , що задовольняють умови (6).

Зауважмо, до лінії  $F(K_1, K_2) = 0$  здолу можна припасувати дотичну пряму, рис. 7б. Точки  $P'$  і  $P''$  можна «змішати» подумки в одну третю «умовну» точку  $P$  відповідно до формули

$$P = \phi P' + (1 - \phi)P'', \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad (7)$$

про яку вже згадувалось. Всі умовні точки ніби заповнять відтинки прямої  $P'P''$ . Отож множину нетривіальних точок об'єднуюватиме опуклий графік  $P_1P'P''P_3$ , рис. 8. Натомість з множини нетривіальних довелось вилучити точки, належні відтинкам ліній  $P'P_2$  і  $P''P_4$ . І виглядає так, ніби частини графіків  $K_1 = K_1(P)$ ,  $K_2 = K_2(P)$ ,  $K = K(P)$  в області  $[P', P'']$  стали прямолінійними (див. рис. 7а). Та цього разу  $K \neq kK_1K_2$ . Але якщо б точки (7) були реальними, то залежність  $K = kK_1K_2$  виявилася б увігнутою (див. ділянку  $L$  на рис. 7а), не визнаючи їх цікавими в сенсі справедливого компромісу.

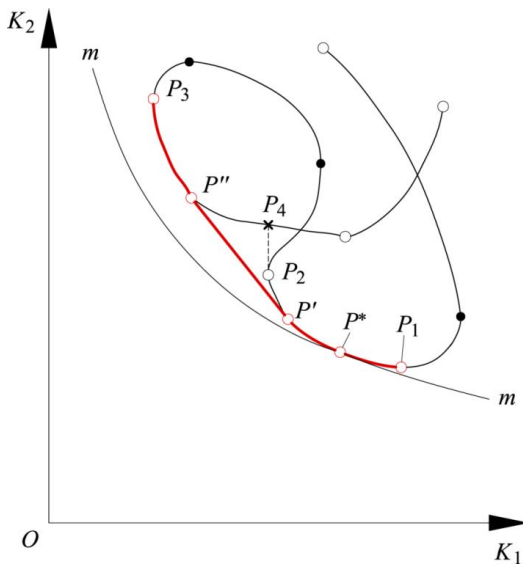


Рисунок 8 — Штучне розширення-звуження множини нетривіальних розв'язків-ситуацій

Обвідна, взагалі кажучи, може своїм особливим перебігом, рис. 9, аж ніяк не сприяти встановленню однозначності в процесі розв'язування оптимізаційної задачі. Візьмімо для прикладу неоднозначні й немонотонно спадні обвідні  $m-t$  та  $m'-m'$ , перша з яких своїм «язиком» дотикається лінії  $F(K_1, K_2) = 0$  в точці  $R'$ , а друга — в точці  $S'$  (рис. 9а). Але ні  $R'$ , ні  $S'$  не належать відтинкам  $[P_1, P_2]$  і  $[P_3, P_4]$  (див. рис. 7б)! Звісно, точці  $R'$  можна однозначно протиставити точку  $R$  ( $K_1$  залишається незмінним, а  $K_2$  спадає), а точці  $S'$  — точку  $S$  ( $K_2$  залишається незмінним,

а  $K_1$  спадає). Але насправді цю дію не можливо беззастережно вмотивувати, якимось поєднати з майбутньою оптимізацією відповідного параметра  $p$ . Понад те, особливості обвідних у вигляді «язиків» об'єднують в собі цілком тривіальні розв'язки: приміром точці  $A$  на обвідній  $m-t$  можна безконфліктно протиставити кращі точки на тій самій  $m-t$ . Усуваючи ці тривіальні точки, обвідні доведеться перетворити на розривні криві, рис. 9б. Але при цьому вони перестануть бути інцидентними з кривою  $F(K_1, K_2) = 0$ . Більш того, вводячи особливі розв'язки штибу (7), первісні обвідні доведеться заступити обвідними  $m_1m_2-t$ ,  $m'_1m'_2-m'$  з умовними прямолінійними ділянками  $m_1m_2$ ,  $m'_1m'_2$ .

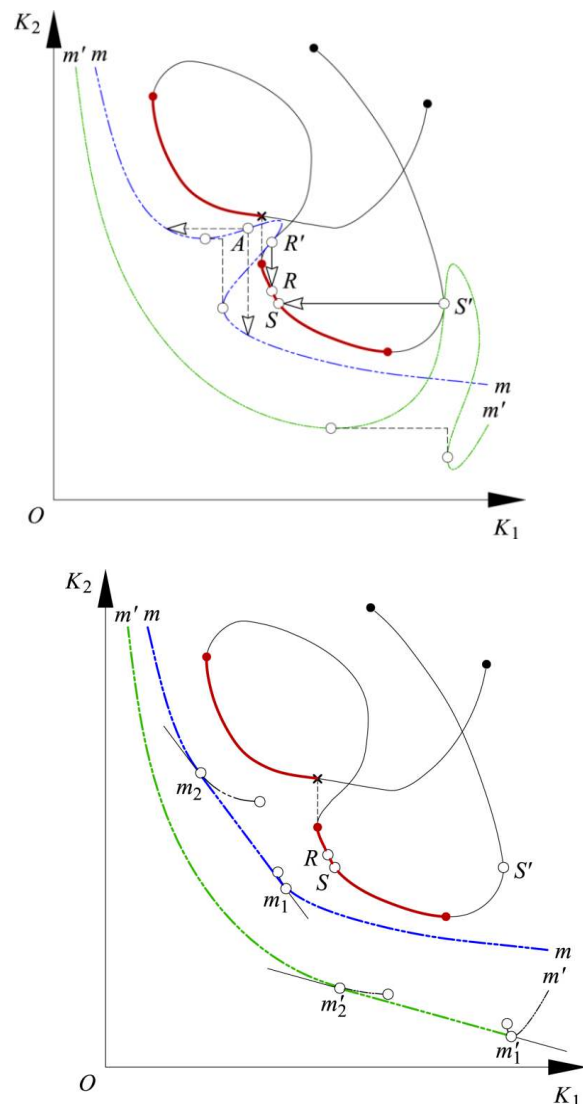


Рисунок 9 — Особливі випадки оптимізаційної задачі

Оминати зазначені клопоти можна, вдаючись до умовного варіювання ще одним параметром, або ж керуватись обвідними тільки відтинків  $[P_1, P_2]$  і  $[P_3, P_4]$  (а не всієї лінії  $F(K_1, K_2) = 0$ )...

А взагалі способів обійти такі труднощі є багато, але про них тут не йтиметься.

Та хай там як, але принцип визнання рівноцінними всіх розв'язків, найкращий в прояві яких розпізнати, залишаючись в рамках прийнятої концепції, не можливо, все ж є найсправедливішим і найоб'єктивнішим. Та й особливий перебіг закономірностей, якими доводиться оперувати в оптимізаційній задачі, часто не є об'єктивною реальністю, а лише — наслідком того, що доводиться мати справу не з сутністю, а з явищем, та ще й спиратися на обмежені можливості точно визначати/виміряти/перетворювати...

Зростання кількості параметрів, якими доведеться оперувати, збільшує розмірність оптимізаційної задачі і всіх її елементів.

**Резюме.** 1. Самі по собі математичні засоби оптимізації аж ніяк не наближають дослідника (чи інженера) до істинного розуміння досконалості системи/машини. З іншого боку, рефлекс уникати математики, покладаючись на емпіричне сприйняття властивостей і досконалості системи, істотно обмежує пізнавальні здатності/можливості дослідника, та й кожного, хто намагається свідомо й цілеспрямовано жити (життя — це ж бо розв'язування-вирішення низки цікавих і корисних задач-завдань). Та виявляється, перш ніж вдатися до математичного формалізму, все ж необхідно подолати суб'єктивні парадигмально-змістові протиріччя.

2. Вимірюють зазвичай досконалість принаймні двома протиставними (взаємно суперечними) вимірниками (критеріями), наділеними фізичним змістом (багатоцільова ж постановка оптимізаційної задачі — це радше вияв поганого розуміння суті досконалості). У певній мірі вимірники досконалості завжди є суб'єктивними. А оперування одночасно двома критеріями ще більше поглиблює об'єктивну невизначеність у трактуванні досконалості системи/машини. Виявляється, мультиплікативний критерій так званого справедливого компромісу насправді виражає середнє геометричне основних критеріїв. І нема жодних підстав надавати йому перевагу перед, скажімо, середнім арифметичним (після відповідного погодження розмірностей) первинних критеріїв.

3. Цілком логічно впливає ідея відмовитися від формального згортання часткових протиставних критеріїв в якийсь один узагальнений. Оперуючи ж одночасно двома протиставними критеріями як цілком рівноправними, оптимізаційну задачу, виявляється, можна звести до пошуку не якихось окремих її розв'язків в звичному розумінні, а до ідентифікації так званих атракторів — множинних оптимальних розв'язків. В межах атрактора всі можливі звичні розв'язки оптимізаційної задачі доречно/доцільно вважати цілком рівноцінними. Проте нездоланний суб'єктивізм насправді не завжди дозволяє пристати на цю думку. В такому разі потрібна участь якогось «розумного диктатора».

4. Атрактор часто формально можна розширити, трактуючи кожен можливий розв'язок оптимізаційної задачі як систему (зв'язане поєднання) двох (чи й більше) звичайних розв'язків. В такому разі частина оптимальних у звичному сенсі розв'язків може втратити привабливість як ідентифікатори досконалості системи/машини. Але загалом множина привабливих розв'язків все-таки розшириться.

5. Ефективним методом звуження невизначеності в ухваленні оптимізаційних рішень є так званий метод розширення оптимізаційної задачі. Суть методу розширення-звуження полягає в тому, що поряд з параметрами, якими реально доводиться оперувати з метою удосконалення системи/машини, в якості засобу оптимізації віртуально слід узяти ще один якийсь параметр. Нова задача, звісно, буде віртуально ширшою за попередню основну. Вона обов'язково матиме свій атрактор-розв'язок, відмінний від атрактора-розв'язку основної задачі. Спільні елементи атракторів основної (первісної) і нової (розширеної) задач власне і складатимуть шуканий оптимальний розв'язок основної задачі, якому властивий суттєво менший рівень невизначеності.

6. Описані тут алгоритми пошуку оптимального формалізовано відтворюють реальний процес покрокового удосконалення всього рукотворного — від прийнятного до кращого... Не існує прикладів, коли б щось було створено відразу беззастережно оптимально (а ідеальне — взагалі не пізнаване, а отже й не втілюване). На кожному кроці один з алгоритмів регламентує мінімізувати значення якогось одного критерію, не змінюючи другого. А тому поза атрактором жодних конфліктів інтересів не виникає. І тільки в межах атрактора, за який, приміром, править відтинок лінії (він є одновимірним), злагода зникає. Інший алгоритм поєднує в собі низку кроків, в кожному з яких змінюється тільки один параметр і зиск при цьому мають як прихильники  $K_1$ -досконалості, так і прихильники  $K_2$ -досконалості. Тож не виникає конфліктів, аж допоки алгоритм, знову ж таки, не надібує атрактор, який цього разу є областю точок на площині.

#### Література:

1. Parkinson, A. R., Balling, R., J., & Heden-gren, J. D. (2013). *Optimization Methods for Engineering Design: Applications and Theory*, Brigham Young University, 208 p.
2. Rao, S. S. (2009). *Engineering optimization: theory and practice*, 4<sup>th</sup> ed., Hoboken/New Jersey, USA/Canada, *Published by John Wiley & Sons, Inc.*, XIX+813 p.
3. Ravindran, A., Ragsdell, K. M., & Reklaitis, G. V. (2004). *Engineering optimization: methods and applications*, 2<sup>nd</sup> ed., Hoboken/New Jersey, USA/Canada, *Published by John Wiley & Sons, Inc.*, XV+667 p.

4. Sélley, C. E., Gyurecz, G. (ed.), Janik, J., & Körtélyesi, G. (2012). *Engineering Optimization*, Budapest, *Typotex Publishing House*, 225 p.
5. Kilagiz, Y., Baran, A., Yildiz, Z., & Çetin M. (2005). A fuzzy diagnosis and advice system for optimization of emissions and fuel consumption, *Expert Systems with Application*, Vol. 28, pp. 305—311, doi:10.1016/j.eswa.2004.10.016.
6. Sorrentino, M., Arsie, I., Di Martino, R., & Rizzo, G. (2010). On the Use of Genetic Algorithm to Optimize the On-board Energy Management of a Hybrid Solar Vehicle, *Oil & Gas Science and Technology — Rev. IFP*, Vol. 65, No. 1, pp. 133—143, doi: 10.2516/ogst/2009035.
7. Mao, T., Zhang, X., & Zhou, B. (2019). Intelligent Energy Management Algorithms for EV-charging Scheduling with Consideration of Multiple EV Charging Modes, *Energies*, Vol. 12, No. 265, pp. 1—17, doi:10.3390/en12020265.
8. Manios, S. E., Lagaros, N. D. & Nassiopoulos E. (2019). Nested Topology Optimization Methodology for Designing Two-Wheel Chassis, *Frontiers in Built Environment*, Vol. 5 (34), pp. 1—12, doi: 10.3389/fbuilt.2019.00034.
9. Vatanabe, S. L., Lippi, T. N., de Lima, C. R., Paulino, G. H., & Silva, E. C. N. (2016). Topology Optimization with Manufacturing Constraints: A Unified Projection-Based Approach, *Adv. Eng. Softw.*, Vol. 100, pp. 97—112, doi: 10.1016/j.advengsoft.2016.07.002.
10. Larson J., Menickelly M., & Wild S. M. (2019). Derivative-free optimization methods, *Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, Lemont, IL 60439, USA*, 94 p.
11. Yuan, Y., Meng, W., Sun, X. & Zhang L. (2019). Design Optimization and Analysis of an Outer-Rotor Direct-Drive Permanent-Magnet Motor for Medium-Speed Electric Vehicle, *World Electric Vehicle Journal*, Vol. 10 (2), 16, pp. 1—19, doi: 10.3390/wevj10020016.
12. Yuan, Z., & Wang, Y. (2017). Effect of Underbody Structure on Aerodynamic Drag and Optimization, *Journal of Measurements in Engineering*, Vol. 5, Issue 3, pp. 194—204, doi: 10.21595/jme.2017.19210.
13. Fincham, J. H. S., & Friswell, M. I. (2015). Aerodynamic optimisation of a camber morphing aerofoil, *Aerospace Science and Technology*, 43, pp. 245—255, doi: 10.1016/j.ast.2015.02.023
14. Paplicki, P. (2014). Optimization of Electrically Controlled Permanent Magnet Synchronous Machine to Improve Flux Control Range, *Elektronika Ir Elektrotechnika*, Vol. 20, No. 10, pp. 17—22, doi: 10.5755/j01.eee.20.10.5934.
15. Hashchuk, P., & Pelo, R. (2018). Optimal Gear Shift Algorithm in the Car Transmission During its Deceleration, *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*, Vol. 4, No 1, pp. 131—143.
16. Hashchuk, P. M., & Pelo, R. A. (2018). Zasadnychi pryntsyropy teorii syntezy optymalnykh zakoniv peremykannia peredach u skhodynchastii avtomobilnii transvisii, [Fundamental principles of optimal gear shift synthesis theory in automobile stepped ration gear transmission], *Visnyk LDUBZhD [Bulletin of Lviv State University of Life Safety]*, No 18, pp. 23—40, doi: 10.32447/20784643.18.2018.02(in Ukrainian).
17. Miller, J. M. (2006). Hybrid electric vehicle propulsion system architectures of the e-CVT type, *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 21, No. 3, pp. 756—767, doi: 10.1109/TPEL.2006.872372
18. Zhang, X. W., Li, C. T., Kum, D., & Peng, H. (2012). Prius<sup>+</sup> and Volt<sup>™</sup>: Configuration Analysis of Power-Split Hybrid Vehicles with a Single Planetary Gear. *IEEE Trans. Vehicular Technology*, Vol. 61, pp. 3544—3552, doi: [10.1109/TVT.2012.2208210](https://doi.org/10.1109/TVT.2012.2208210).
19. Xu, L. F., Ouyang, M. G., Li, J. Q., Yang, F. Y., Lu, L. G., & Hua, J. F. (2013). Optimal sizing of plug-in fuel cell electric vehicles using models of vehicle performance and system cost, *Applied Energy*, Vol. 103, pp. 477—487, doi: [10.1016/j.apenergy.2012.10.010](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2012.10.010).
20. Lin, C.-C., Peng, H., Grizzle, J. W., & Kang, J.-M. (2003) Power Management Strategy for a Parallel Hybrid Electric Truck, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 11, No. 6, pp. 839—849, doi: 10.1109/TCST.2003.815606.
21. Larsson, V., Lars, J., & Egardt, B. (2015). Analytic solutions to the dynamic programming subproblem in hybrid vehicle energy management. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 64 (4), pp. 1458—1467. doi: 10.1109/TVT.2014.2329864.
22. Nüesch, T., Elbert, P., Flankl, M., Onder, C., & Guzzella, L. (2014). Convex Optimization for the Energy Management of Hybrid Electric Vehicles Considering Engine Start and Gearshift Costs, *Energies*, Vol. 7 (2), pp. 834—856. doi: [10.3390/en7020834](https://doi.org/10.3390/en7020834).
23. Hu, X., Murgovski, N., Johannesson, L., & Egardt, B. (2013). Energy efficiency analysis of a series plug-in hybrid electric bus with different energy management strategies and battery sizes, *Applied Energy*, Vol. 111, pp. 1001—1009, doi: 10.1016/j.apenergy.2013.06.056.
24. Hu, X., Murgovski, N., Johannesson, L., & Egardt, B. (2014). Comparison of three electrochemical energy buffers applied to a hybrid bus powertrain with simultaneous optimal sizing and energy management, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol. 15, No. 3, pp. 1193—1205, doi: 10.1109/TITS.2013.2294675.
25. Kim, T. S., Manzie, C., & Sharma, R. (2014). Optimal Control of a Parallel Hybrid Vehicle with a Traffic Preview, *Proc IMechE Part D: J. Automobile Engineering*, Vol. 228 (7), pp. 719—733, doi: 10.1177/0954407013506567.
26. Betancur, E., Osorio-Gómez, G., & Rivera, J. C. (2017). Heuristic Optimization for the Energy Management and Race Strategy of a Solar Car, *Sustainability*, 9, 1576, pp. 1—12, doi: 10.3390/su9101576.

27. Reinbold, V., Vinot, E., & Gerbaud, L. (2013). Global Optimization of a Parallel Hybrid Vehicle Using Optimal Energy Management, *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, Vol. 43, pp. 115—126, doi: 10.3233/JAE-131715.
28. 2. Гащук П. М., Сичевський М. І., Домінік А. М. Про зміст поняття «коефіцієнт корисної дії автомобіля» // Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності. — 2016. — № 14. — С. 152—175.
29. Dmitrienko, D. V. (2017). Parametric optimization of structural elements of port handling machines, *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota*, Vol. 9.3, pp. 655—662, doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-655-662 (in Russian).
30. Tanaka, S., Uruguchi, Y., & Araki, M. (2005). Dynamic optimization of the operation of single-car elevator systems with destination hall call registration: Part I. Formulation and simulations, *European Journal of Operational Research*, Vol. 167, No. 2, pp. 550—573, doi: 10.1016/j.ejor.2004.04.038.
31. Tanaka, S., Uruguchi, Y., & Araki, M. (2005). Dynamic optimization of the operation of single-car elevator systems with destination hall call registration: Part II. The solution algorithm, *European Journal of Operational Research*, Vol. 167, No. 2, pp. 574—587, doi: 10.1016/j.ejor.2004.04.039.
32. Dawande, M., Geismar, H. N., Sethi, S. P., & Sriskandarajah, C. (2005). Sequencing and Scheduling in Robotic Cells: Recent Developments, *Journal of Scheduling*, Vol. 8, pp. 387—426, doi: 10.1007/s10951-005-2861-9.
33. Hashchuk, L., & Hashchuk, P. Osoblyvi otsinky dynamichnosti rozgonu viiskovogo avtomobilia [Special estimations of acceleration dynamism of the military vehicle], *Військово-технічний збірник [Military-technical collection]*, No. 13, pp. 20—29. (in Ukrainian).
34. Hashchuk, P., & Nikipchuk, S. (2019). Development Praxeological Principles to Model/Study Heat Generation and Heat Consumption Processes in the Engine Rapid Internal Combustion, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Issue 1/5 (97), pp. 54—65, doi: 10.15587/1729-4061.2019.154409.
35. Hashchuk, P., & Nikipchuk, S. (2018). Heat Generation and Heat Consumption in Engine of Rapid Internal Combustion, *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*, Vol. 4, No 1, pp. 160—174.
36. Hashchuk, P. M., & Nikipchuk, S. V. (2018). Heating (Thermogenesis) in Rapid Internal Combustion Engine, *Mechanics and Advanced Technologies*. Vol. 82, Issue 1, pp. 92—99, doi: 10.20535/2521-1943.2018.82.125201.
37. Hashchuk, P. M., & Nikipchuk, S. V. (2018). Osoblyvosti teplotvorennia u dvyhuni vnutrishnioho zhoriannia [Special Considerations of Heat Generation in the Internal Combustion Engine], *Automobile transport: Collection of scientific works*, Issue 42, pp. 12—21, doi: 10.30977.AT.2219-8342.2018.42.0.12 (in Ukrainian).
38. Hashchuk, P. M., & Nikipchuk, S. V. (2018). Modeliuvannia teploobminnykh protsesiv, shcho perebihaiut u tsylindrakh dvyhuna vnutrishnioho zhoriannia [Modeling of heat exchange processes expecting in cylinders of the internal combustion engines], *Pozhezhna bezpeka [Fire Safety]*, No 33, pp. 15—34, doi: 10.32447/20786662.33.2018.03 (in Ukrainian).
39. Hashchuk, P. M., & Nikipchuk, S. V. (2018). Hard-soft-tekhnolohiia informatsiinoho suprovodu protsesu modeliuvannia teplotvorennia/tepospozhyvannia v dvyhuni vnutrishnioho zhoriannia [Hard-Soft Technology of Information Suspension Process of Modelling of Heat Generation/Heat Consumption in the Internal Combustion Engine], *Visnyk LDUBZhD [Bulletin of Lviv State University of Life Safety]*, No 18, pp. 6—22, doi: 10.32447/20784643.18.2018.01 (in Ukrainian).
40. Hashchuk, P., & Nikipchuk, S. (2018). General Principles of Hard-Soft-Technologies Application to Modeling of Operation Process in Internal Combustion Engines, *Proceeding of Odesa Polytechnic University*, Issue 2(55), pp. 34—48, doi: 10.15276/opu.2.55.2018.04.
41. Finesso, R., Misul, D., Spessa, E., & Mattia, V. (2018). Optimal Design of Power-Split HEVs Based on Total Cost of Ownership and CO<sub>2</sub> Emission Minimization, *Energies*, Vol. 11, No. 1705, pp. 1—28, doi: 10.3390/en11071705
42. Zhuang, W., Zhang, X., Peng, H. & Wang, L. (2016). Simultaneous Optimization of Topology and Component Sizes for Double Planetary Gear Hybrid Powertrains, *Energies*, Vol. 9, No. 411, pp. 1—17, doi: 10.3390/en9060411.
43. Hashchuk, P. M. (2016). Pryntsyipy identyfikatsii reguliatorykh kharakterystyk dvyhuna vnutrishnioho zhoriannia [Authentication principles of internal combustion engines regulators descriptions], *Visnyk Natsionalnoho universytetu “Lvivska Politehnika”*: Dynamika, mitsnist ta proektuvannia mashyn i prykladiv. [Bulletin of Lviv Polytechnic National University: Dynamics, strength and design of machines and devices], Vol. 838, pp. 135—145 (in Ukrainian).
44. Elmarakbi, A., Ren, Q., Trimble, R., & Elkady M. (2013). Performance Analysis of Hybrid and Full Electrical Vehicles Equipped with Continuously Variable Transmissions, *Advances in Automobile Engineering*, Vol. 2, issue 1, pp. 1—8. doi: 10.4172/2167-7670.1000103.
45. Kessels, J. T. B. A., Foster, D. L., & Bosch, van den, P. P. J. (2009). Integrated powertrain control for hybrid electric vehicles with electric variable transmission. In *Proceedings of the IEEE Vehicle Power and Propulsion, Conference 2009, VPPC'09*, 7-10 September



ber 2009, Dearborn, Michigan (pp. 376-381). Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers. doi: 10.1109/VPPC.2009.5289825.

46. Zhang, X., Li, S. E., Peng, H., & Sun, J. (2016). Design of Multimode Power-Split Hybrid Vehicles—A Case Study on the Voltec Powertrain System, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 65, No. 6, pp. 4790—4801, doi: 10.1109/TVT.2016.2531740.

47. Hu J., Mei, B., Peng, H., & Jiang, X. (2019). Optimization Design and Analysis for a Single Motor Hybrid Powertrain Configuration with Dual Planetary Gears, *Applied Sciences*, Vol. 9, 707, pp. 1—17, doi: 10.3390/app9040707.

48. Sciarretta, A., Serrao, L., Dewangan, P. C., Tona, P., Bergshoeff, E. N. D., Bordons, C., Charmpa, L., Elbert, Ph., Eriksson, L., Hofman, T., Hubacher, M., Isenegger, R., Lacandia, F., Laveau, A., Li, H., Marcos, D., Nueesch, T., Onori, S., Pisu, P., Rios, J., Silvas, E., Sivertsson, M., Tribioli, L., van der Hoeven, A.-J. & Wu, M. (2014). A control benchmark on the energy management of a plug-in hybrid electric vehicle, *Control Engineering Practice*, Vol. 29, pp. 287—298, doi: 10.1016/j.conengprac.2013.11.020.

49. Ellenberg, J. (2017). Yak nikoly ne pomylatysia: Syl'a matematychnogo myslennia, [*How Not To Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking*], Kyiv, *Nash Format*, 408 p. (in Ukrainian, Translated from English)

50. Carcangiu, S., Fanni A., & Montisci A. (2019). Optimization of a Power Line Communication System to Manage Electric Vehicle Charging Stations in a Smart Grid, *Energies*, Vol. 12, 1767, pp. 1—13, doi:10.3390/en12091767.

51. Hashchuk, L. P., Hashchuk, P. M. (2017). Pryiniattia rishen v umovakh nevyznachenosti ta tekhnologiiia expertnykh otsinok [Decision-Making in the Conditions of Vagueness and Technology of Expert Estimations], *Visnyk LDUBZhD [Bulletin of Lviv State University of Life Safety]*, No. 16, pp. 6—26 (in Ukrainian).

52. Hashchuk, P. M. (2004). Enerhiia ta uporiadkovanyi rukh [Energy and orderly movement], *L'viv, Ukrainian technologies*, 608 p. (in Ukrainian).

### References:

1. Parkinson, A. R., Balling, R., J., & Hedengren, J. D. (2013). Optimization Methods for Engineering Design: Applications and Theory, *Brigham Young University*, 208 p.

2. Rao, S. S. (2009). Engineering optimization: theory and practice, 4<sup>th</sup> ed., Hoboken/New Jersey, USA/Canada, *Published by John Wiley & Sons, Inc.*, XIX+813 p.

3. Ravindran, A., Ragsdell, K. M., & Reklaitis, G. V. (2004). Engineering optimization: methods and applications, 2<sup>nd</sup> ed., Hoboken/New Jersey, USA/Canada, *Published by John Wiley & Sons, Inc.*, XV+667 p.

4. Sélley, C. E., Gyurecz, G. (ed.), Janik, J., & Körtélyesi, G. (2012). Engineering Optimization, Budapest, *Typotex Publishing House*, 225 p.

5. Kilagiz, Y., Baran, A., Yildiz, Z., & Çetin M. (2005). A fuzzy diagnosis and advice system for optimization of emissions and fuel consumption, *Expert Systems with Application*, Vol. 28, pp. 305—311, doi:10.1016/j.eswa.2004.10.016.

6. Sorrentino, M., Arsie, I., Di Martino, R., & Rizzo, G. (2010). On the Use of Genetic Algorithm to Optimize the On-board Energy Management of a Hybrid Solar Vehicle, *Oil & Gas Science and Technology — Rev. IFP*, Vol. 65, No. 1, pp. 133—143, doi: 10.2516/ogst/2009035.

7. Mao, T., Zhang, X., & Zhou, B. (2019). Intelligent Energy Management Algorithms for EV-charging Scheduling with Consideration of Multiple EV Charging Modes, *Energies*, Vol. 12, No. 265, pp. 1—17, doi:10.3390/en12020265.

8. Manios, S. E., Lagaros, N. D. & Nassiopoulos E. (2019). Nested Topology Optimization Methodology for Designing Two-Wheel Chassis, *Frontiers in Built Environment*, Vol. 5 (34), pp. 1—12, doi: 10.3389/fbuil.2019.00034.

9. Vatanabe, S. L., Lippi, T. N., de Lima, C. R., Paulino, G. H., & Silva, E. C. N. (2016). Topology Optimization with Manufacturing Constraints: A Unified Projection-Based Approach, *Adv. Eng. Softw.*, Vol. 100, pp. 97—112, doi: 10.1016/j.advengsoft.2016.07.002.

10. Larson J., Menickelly M., & Wild S. M. (2019). Derivative-free optimization methods, Mathematics and Computer Science Division, *Argonne National Laboratory, Lemont, IL 60439, USA*, 94 p.

11. Yuan, Y., Meng, W., Sun, X. & Zhang L. (2019). Design Optimization and Analysis of an Outer-Rotor Direct-Drive Permanent-Magnet Motor for Medium-Speed Electric Vehicle, *World Electric Vehicle Journal*, Vol. 10 (2), 16, pp. 1—19, doi: 10.3390/wevj10020016.

12. Yuan, Z., & Wang, Y. (2017). Effect of Underbody Structure on Aerodynamic Drag and Optimization, *Journal of Measurements in Engineering*, Vol. 5, Issue 3, pp. 194—204, doi: 10.21595/jme.2017.19210.

13. Fincham, J. H. S., & Friswell, M. I. (2015). Aerodynamic optimisation of a camber morphing aerofoil, *Aerospace Science and Technology*, 43, pp. 245—255, doi: 10.1016/j.ast.2015.02.023

14. Paplicki, P. (2014). Optimization of Electrically Controlled Permanent Magnet Synchronous Machine to Improve Flux Control Range, *Elektronika Ir Elektrotehnika*, Vol. 20, No. 10, pp. 17—22, doi: 10.5755/j01.eee.20.10.5934.

15. Hashchuk, P., & Pelo, R. (2018). Optimal Gear Shift Algorithm in the Car Transmission During its Deceleration, *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*, Vol. 4, No 1, pp. 131—143.

16. Hashchuk, P. M., & Pelo, R. A. (2018). Zasadnychi pryntsypty teorii syntezy optymalnykh zakoniv peremykannia peredach u skhodynchastii avtomobilnii transvisii, [Fundamental principles of optimal gear shift synthesis theory in automobile stepped ration gear transmission], *Visnyk LDUBZhD [Bulletin of Lviv State University of Life Safety]*, No 18, pp. 23—40, doi: 10.32447/20784643.18.2018.02(in Ukrainian).
17. Miller, J. M. (2006). Hybrid electric vehicle propulsion system architectures of the e-CVT type, *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 21, No. 3, pp. 756—767, doi: 10.1109/TPEL.2006.872372
18. Zhang, X. W., Li, C. T., Kum, D., & Peng, H. (2012). Prius<sup>+</sup> and Volt<sup>+</sup>: Configuration Analysis of Power-Split Hybrid Vehicles with a Single Planetary Gear. *IEEE Trans. Vehicular Technology*, Vol. 61, pp. 3544—3552, doi:[10.1109/TVT.2012.2208210](https://doi.org/10.1109/TVT.2012.2208210).
19. Xu, L. F., Ouyang, M. G., Li, J. Q., Yang, F. Y., Lu, L. G., & Hua, J. F. (2013). Optimal sizing of plug-in fuel cell electric vehicles using models of vehicle performance and system cost, *Applied Energy*, Vol. 103, pp. 477—487, doi: [10.1016/j.apenergy.2012.10.010](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2012.10.010).
20. Lin, C.-C., Peng, H., Grizzle, J. W., & Kang, J.-M. (2003) Power Management Strategy for a Parallel Hybrid Electric Truck, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 11, No. 6, pp. 839—849, doi: 10.1109/TCST.2003.815606.
21. Larsson, V., Lars, J., & Egardt, B. (2015). Analytic solutions to the dynamic programming subproblem in hybrid vehicle energy management. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 64 (4), pp. 1458—1467. doi: 10.1109/TVT.2014.2329864.
22. Nüesch, T., Elbert, P., Flankl, M., Onder, C., & Guzzella, L. (2014). Convex Optimization for the Energy Management of Hybrid Electric Vehicles Considering Engine Start and Gearshift Costs, *Energies*, Vol. 7 (2), pp. 834—856. doi: [10.3390/en7020834](https://doi.org/10.3390/en7020834).
23. Hu, X., Murgovski, N., Johannesson, L., & Egardt, B. (2013). Energy efficiency analysis of a series plug-in hybrid electric bus with different energy management strategies and battery sizes, *Applied Energy*, Vol. 111, pp. 1001—1009, doi: 10.1016/j.apenergy.2013.06.056.
24. Hu, X., Murgovski, N., Johannesson, L., & Egardt, B. (2014). Comparison of three electrochemical energy buffers applied to a hybrid bus powertrain with simultaneous optimal sizing and energy management, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol. 15, No. 3, pp. 1193—1205, doi: 10.1109/TITS.2013.2294675.
25. Kim, T. S., Manzie, C., & Sharma, R. (2014). Optimal Control of a Parallel Hybrid Vehicle with a Traffic Preview, *Proc IMechE Part D: J. Automobile Engineering*, Vol. 228 (7), pp. 719—733, doi: 10.1177/0954407013506567.
26. Betancur, E., Osorio-Gómez, G., & Rivera, J. C. (2017). Heuristic Optimization for the Energy Management and Race Strategy of a Solar Car, *Sustainability*, 9, 1576, pp. 1—12, doi: 10.3390/su9101576.
27. Reinbold, V., Vinot, E., & Gerbaud, L. (2013). Global Optimization of a Parallel Hybrid Vehicle Using Optimal Energy Management, *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, Vol. 43, pp. 115—126, doi: 10.3233/JAE-131715.
28. Hashchuk, P. M., Sychevskiy, M. I., & Dominik A. M. (2016). Pro zmist poniattia «koeffitsient korysnoi dii avtomobilia» [The Maintenance of Concept «A Car Efficiency»], *Visnyk LDUBZhD [Bulletin of Lviv State University of Life Safety]*, No. 14, pp. 152—175 (in Ukrainian).
29. Dmitrienko, D. V. (2017). Parametric optimization of structural elements of port handling machines, *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota*, Vol. 9.3, pp. 655—662, doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-655-662 (in Russian).
30. Tanaka, S., Uruguchi, Y., & Araki, M. (2005). Dynamic optimization of the operation of single-car elevator systems with destination hall call registration: Part I. Formulation and simulations, *European Journal of Operational Research*, Vol. 167, No. 2, pp. 550—573, doi: 10.1016/j.ejor.2004.04.038.
31. Tanaka, S., Uruguchi, Y., & Araki, M. (2005). Dynamic optimization of the operation of single-car elevator systems with destination hall call registration: Part II. The solution algorithm, *European Journal of Operational Research*, Vol. 167, No. 2, pp. 574—587, doi: 10.1016/j.ejor.2004.04.039.
32. Dawande, M., Geismar, H. N., Sethi, S. P., & Sriskandarajah, C. (2005). Sequencing and Scheduling in Robotic Cells: Recent Developments, *Journal of Scheduling*, Vol. 8, pp. 387—426, doi: 10.1007/s10951-005-2861-9.
33. Hashchuk, L., & Hashchuk, P. Osoblyvi otsinky dynamichnosti rozgonu viiskovogo avtomobilia [Special estimations of acceleration dynamism of the military vehicle], *Військово-технічний збірник [Military-technical collection]*, No. 13, pp. 20—29. (in Ukrainian).
34. Hashchuk, P., & Nikipchuk, S. (2019). Development Praxeological Principles to Model/Study Heat Generation and Heat Consumption Processes in the Engine Rapid Internal Combustion, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Issue 1/5 (97), pp. 54—65, doi: 10.15587/1729-4061.2019.154409.
35. Hashchuk, P., & Nikipchuk, S. (2018). Heat Generation and Heat Consumption in Engine of Rapid Internal Combustion, *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*, Vol. 4, No 1, pp. 160—174.
36. Hashchuk, P. M., & Nikipchuk, S. V. (2018). Heating (Thermogenesis) in Rapid Internal Combustion Engine, *Mechanics and Advanced Technologies*. Vol. 82, Issue 1, pp. 92—99, doi: 10.20535/2521-1943.2018.82.125201.

37. Hashchuk, P. M., & Nikipchuk, S. V. (2018). Osoblyvosti teplotvorennia u dvyhuni vnutrishnioho zhoriannia [Special Considerations of Heat Generation in the Internal Combustion Engine], *Automobile transport: Collection of scientific works*, Issue 42, pp. 12—21, doi: 10.30977.AT.2219-8342.2018.42.0.12 (in Ukrainian).
38. Hashchuk, P. M., & Nikipchuk, S. V. (2018). Modeliuвання teploobminnykh protsesiv, shcho perebihaiut u tsylindrakh dvyhuna vnutrishnioho zhoriannia [Modeling of heat exchange processes expecting in cylinders of the internal combustion engines], *Pozhezhna bezpeka [Fire Safety]*, No 33, pp. 15—34, doi: 10.32447/20786662.33.2018.03 (in Ukrainian).
39. Hashchuk, P. M., & Nikipchuk, S. V. (2018). Hard-soft-tekhnolohiia informatsiinoho suprovodu protsesu modeliuвання teplotvorennia/teplospozhyvania v dvyhuni vnutrishnioho zhoriannia [Hard-Soft Technology of Information Suspension Process of Modelling of Heat Generation/Heat Consumption in the Internal Combustion Engine], *Visnyk LDUBZhD [Bulletin of Lviv State University of Life Safety]*, No 18, pp. 6—22, doi: 10.32447/20784643.18.2018.01 (in Ukrainian).
40. Hashchuk, P., & Nikipchuk, S. (2018). General Principles of Hard-Soft-Technologies Application to Modeling of Operation Process in Internal Combustion Engines, *Proceeding of Odesa Polytechnic University*, Issue 2(55), pp. 34—48, doi: 10.15276/opu.2.55.2018.04.
41. Finesso, R., Misul, D., Spessa, E., & Mattia, V. (2018). Optimal Design of Power-Split HEVs Based on Total Cost of Ownership and CO<sub>2</sub> Emission Minimization, *Energies*, Vol. 11, No. 1705, pp. 1—28, doi: 10.3390/en11071705
42. Zhuang, W., Zhang, X., Peng, H. & Wang, L. (2016). Simultaneous Optimization of Topology and Component Sizes for Double Planetary Gear Hybrid Powertrains, *Energies*, Vol. 9, No. 411, pp. 1—17, doi: 10.3390/en9060411.
43. Hashchuk, P. M. (2016). Pryntsyipy identyfikatsii regulatorynykh kharakterystyk dvyhuna vnutrishnioho zhoriannia [Authentication principles of internal combustion engines regulators descriptions], *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lviska Politehnika": Dynamika, mitsnist ta proektuvannia mashyn i pryladiv. [Bulletin of Lviv Polytechnic National University: Dynamics, strength and design of machines and devices]*, Vol. 838, pp. 135—145 (in Ukrainian).
44. Elmarakbi, A., Ren, Q., Trimble, R., & Elkady M. (2013). Performance Analysis of Hybrid and Full Electrical Vehicles Equipped with Continuously Variable Transmissions, *Advances in Automobile Engineering*, Vol. 2, *issue 1*, pp. 1—8. doi: 10.4172/2167-7670.1000103.
45. Kessels, J. T. B. A., Foster, D. L., & Bosch, van den, P. P. J. (2009). Integrated powertrain control for hybrid electric vehicles with electric variable transmission. In *Proceedings of the IEEE Vehicle Power and Propulsion, Conference 2009, VPPC'09*, 7-10 September 2009, Dearborn, Michigan (pp. 376-381). Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers. doi: 10.1109/VPPC.2009.5289825.
46. Zhang, X., Li, S. E., Peng, H., & Sun, J. (2016). Design of Multimode Power-Split Hybrid Vehicles—A Case Study on the Voltec Powertrain System, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 65, No. 6, pp. 4790—4801, doi: 10.1109/TVT.2016.2531740.
47. Hu J., Mei, B., Peng, H., & Jiang, X. (2019). Optimization Design and Analysis for a Single Motor Hybrid Powertrain Configuration with Dual Planetary Gears, *Applied Sciences*, Vol. 9, 707, pp. 1—17, doi: 10.3390/app9040707.
48. Sciarretta, A., Serrao, L., Dewangan, P. C., Tona, P., Bergshoeff, E. N. D., Bordons, C., Charmpa, L., Elbert, Ph., Eriksson, L., Hofman, T., Hubacher, M., Isenegger, R., Lacandia, F., Laveau, A., Li, H., Marcos, D., Nueesch, T., Onori, S., Pisu, P., Rios, J., Silvas, E., Sivertsson, M., Tribioli, L., van der Hoeven, A.-J. & Wu, M. (2014). A control benchmark on the energy management of a plug-in hybrid electric vehicle, *Control Engineering Practice*, Vol. 29, pp. 287—298, doi: 10.1016/j.conengprac.2013.11.020.
49. Ellenberg, J. (2017). Yak nikoly ne pomylatysia: Syl'a matematychnogo myslennia, [*How Not To Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking*], Kyiv, *Nash Format*, 408 p. (in Ukrainian, Translated from English)
50. Carcangiu, S., Fanni A., & Montisci A. (2019). Optimization of a Power Line Communication System to Manage Electric Vehicle Charging Stations in a Smart Grid, *Energies*, Vol. 12, 1767, pp. 1—13, doi:10.3390/en12091767.
51. Hashchuk, L. P., Hashchuk, P. M. (2017). Pryiniattia rishen v umovakh nevyznachenosti ta tekhnologiiia expertnykh otsinok [Decision-Making in the Conditions of Vagueness and Technology of Expert Estimations], *Visnyk LDUBZhD [Bulletin of Lviv State University of Life Safety]*, No. 16, pp. 6—26 (in Ukrainian).
52. Hashchuk, P. M. (2004). Enerhiia ta uporiadkovanyi rukh [Energy and orderly movement], *L'viv, Ukrainian technologies*, 608 p. (in Ukrainian).

\*Науково-методична стаття