

Multivariate Analysis of Variance (MANOVA) untuk Memperkaya Hasil Penelitian Pendidikan

¹Sutrisno, ²Dewi Wulandari

^{1,2}Universitas PGRI Semarang
sutrisnojr@upgris.ac.id

Abstrak

MANOVA merupakan solusi teknik analisis data kuantitatif bagi peneliti di dunia pendidikan yang ingin mengamati hasil belajar peserta didik dalam rangka menerapkan prinsip kebulatan dalam Kurikulum 2013 (prinsip evaluasi hasil belajar meliputi aspek kognitif, afektif, dan psikomotor). MANOVA mampu mengungkapkan perbedaan yang tidak ditampilkan ANOVA secara terpisah, sehingga dapat meningkatkan kesempatan untuk menemukan perubahan sebagai akibat dari perlakuan yang berbeda dan interaksinya. Dengan demikian, temuan hasil penelitian akan semakin kaya dan sangat berguna bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Terdapat dua model analisis variansi yaitu model overparameterized dan model rerata sel. Model rerata sel memberikan pendekatan sederhana dan tidak ambigu, yang dapat digunakan pada data seimbang atau data tidak seimbang. Model ini menggunakan kontras untuk menyatakan efek utama dan interaksi. Uji persyaratan MANOVA meliputi uji normalitas multivariat dengan uji Mardia dan uji homogenitas matriks kovariansi dengan uji Box's M. Terdapat beberapa statistik uji MANOVA yaitu Wilks' Lambda, Pillai, Lawley-Hotelling, dan Roy's Largest Root. Ketika hipotesis nol MANOVA ditolak, maka dilanjutkan ANOVA pada setiap variabel terikat. Apabila hipotesis nol ANOVA ditolak dan variabel bebas memiliki lebih dari dua nilai, maka dilakukan uji post hoc dengan metode Scheffe'. Prosedur ini menjaga taraf kesalahan α . Uji komparasi rerata antar sel tidak dapat dilakukan secara langsung menggunakan General Linear Model (GLM) pada SPSS. Prosedur yang dapat dilakukan adalah memanipulasi data dengan merubah kondisi eksperimentasi menjadi nilai-nilai yang dianggap satu variabel bebas, sehingga dapat dianalisis dengan One-Way ANOVA atau GLM. Kesulitan analisis multivariat pada perhitungannya yang terlalu rumit, sudah terpecahkan dengan adanya software statistik yang semakin canggih.

Kata kunci: MANOVA, analisis multivariat, memperkaya hasil, penelitian pendidikan

Abstract

MANOVA is a quantitative data analysis technique solution for researchers in the world of education who want to observe learners' learning outcomes in order to apply the principle of unanimity in Curriculum 2013 (principle of evaluation of learning outcomes covering cognitive, affective, and psychomotor aspects). MANOVA is able to reveal differences that the ANOVA does not show separately, thus increasing the chance to find change as a result of different treatments and interactions. Thus, the findings of research will be more rich and very useful for the development of science. There are two models of variance analysis ie overparameterized model and cell mean model. The cell mean model provides a simple and unambiguous approach, which can be used on balanced data or unbalanced data. This model uses contrast to express main effects and interactions. The MANOVA requirement test includes multivariate normality test with Mardia test and homogeneity test of covariance matrix with Box's M test. There are several MANOVA test statistic ie Wilks' Lambda, Pillai, Lawley-

Hotelling, and Roy's Largest Root. When MANOVA hypothesis is rejected, then ANOVA is followed on each dependent variable. If the ANOVA hypothesis is rejected and the independent variable has more than two values, then a post hoc test with Scheffe 'method is performed. This procedure keeps the error level (a). An average comparative test between cells can not be performed directly using the General Linear Model (GLM) on SPSS. The procedure that can be done is to manipulate the data by changing the experimentation conditions into values considered as one independent variable, so it can be analyzed with One-Way ANOVA or GLM. The difficulty of multivariate analysis on its overly complex calculations is solved by increasingly sophisticated statistical software.

Keywords: MANOVA, multivariat analysis, enriches the results, education research

A. Pendahuluan

Pendidikan merupakan sebuah proses belajar yang tidak cukup sekedar mengejar masalah kecerdasan saja. Berbagai potensi peserta didik lainnya juga harus mendapatkan perhatian yang profesional agar berkembang secara optimal. Oleh karenanya, untuk mengetahui perkembangan hasil belajar peserta didik perlu dilihat dari berbagai ranah belajar yang meliputi ranah sikap, pengetahuan, dan keterampilan sebagaimana dijelaskan pada Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 53 Tahun 2015 tentang Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik dan Satuan Pendidikan pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah, khususnya Pasal 5. Pembagian taksonomi hasil belajar yang demikian dikenal dengan taksonomi Bloom yang saat ini telah disempurnakan oleh Anderson dan Krathwohl dan sangat berpengaruh terhadap pengembangan Kurikulum.

Berdasarkan pemaparan tersebut, terlihat bahwa salah satu prinsip dasar yang harus senantiasa diperhatikan dan dipegang dalam pengembangan kurikulum 2013 adalah prinsip kebulatan, yaitu prinsip melaksanakan evaluasi hasil belajar secara menyeluruh terhadap peserta didik, baik dari aspek kognitif, afektif, dan psikomotor. Untuk mendukung hal tersebut, peneliti bidang pendidikan dalam melakukan penelitiannya harus memperhatikan ranah-ranah belajar peserta didik secara bersamaan, sehingga hasil penelitiannya selaras dengan kurikulum yang berlaku. Berdasarkan pengamatan peneliti khususnya di Indonesia, pada saat ini masih sedikit penelitian pendidikan yang memperhatikan ranah-ranah hasil belajar secara bersamaan sebagai dampak dari pembelajaran yang diberikan. Dalam berbagai hasil penelitian yang ditemui, para peneliti pendidikan pada umumnya cenderung memperhatikan satu ranah hasil belajar, misalnya ranah kognitif. Kalaupun ada penelitian yang mengkaji lebih dari satu variabel terikat, jumlahnya masih sedikit dan teknik analisis data yang digunakan masih terbatas, belum kuat, dan bahkan ada yang kurang tepat. Hal ini dikarenakan sedikitnya referensi teknik analisis data untuk menyelesaikan kasus penelitian tersebut.

Peneliti dalam penerapan disiplin ilmunya sering mengukur beberapa variabel pada setiap unit obyek atau eksperimental. Dalam beberapa kasus, mungkin memisahkan setiap variabel dalam suatu sistem dan mempelajarinya secara terpisah dapat dilakukan. Namun, biasanya variabel tidak hanya berkorelasi dengan variabel lainnya, tetapi masing-masing variabel dipengaruhi oleh variabel lainnya sehingga mempengaruhi statistik uji. Dengan demikian, dalam banyak kasus, variabel yang terjalin sedemikian rupa, ketika dianalisis secara individual akan menghasilkan sedikit informasi tentang sistem. Menggunakan analisis multivariat, variabel-variabel tersebut dapat diperiksa secara bersamaan untuk memahami dampak dari proses yang dihasilkannya. Pendekatan multivariat memungkinkan kita untuk mengeksplorasi kinerja variabel secara bersama dan mengetahui pengaruh masing-masing variabel terhadap variabel lainnya (Rencher, 2002).

Analisis multivariat merupakan metode statistik yang digunakan untuk memahami struktur data dalam dimensi tinggi (Morrison, 1990; Hardle dan Simar, 2007; Leps dan Smilauer, 1999). Banyak teknik multivariat merupakan perluasan dari prosedur univariat (Morrison, 1990; Mattjik dan Sumertajaya, 2011; Anderson, 2003). Secara historis, sebagian besar aplikasi teknik multivariat telah dilakukan dalam bidang ilmu perilaku dan biologi. Namun, minat metode multivariat sekarang telah menyebar ke berbagai bidang lain seperti di bidang pendidikan, kimia, fisika, geologi, teknik, hukum, bisnis, sastra, agama, penyiaran publik, keperawatan, pertambangan, linguistik, psikologi, dan bidang lain. Teknik-tekniknya disukai karena dianggap mampu memodelkan kerumitan sistem yang nyata, meskipun sulit untuk diterapkan.

Selama bertahun-tahun penerapan analisis multivariat terhalang oleh perhitungannya yang terlalu rumit, sehingga tidak dapat dijangkau dengan bantuan komputer yang tersedia pada saat itu. Namun, dengan komputer modern, hampir setiap analisis yang diinginkan, tidak peduli berapa banyak variabel atau pengamatan yang terlibat, dapat dengan cepat dan mudah dilakukan. Penggunaan secara langsung prosedur univariat pada masing-masing variabel terikat untuk data multivariat tidak lagi dimaklumi, mengingat ketersediaan teknik multivariat dan daya komputasi yang tersedia untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut (Rencher, 2002). Berbagai macam prosedur deskriptif dan inferensial multivariat mudah diakses di berbagai *software* statistik seperti SPSS, SYSTAT, S-Plus, dan Minitab (Timm, 2002).

Salah satu teknik dalam analisis multivariat yaitu *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) atau Analisis Variansi Multivariat. MANOVA mempunyai pengertian sebagai suatu teknik statistik yang digunakan untuk menghitung pengujian signifikansi perbedaan rata-rata secara bersamaan antara kelompok untuk dua atau lebih variabel terikat. MANOVA adalah generalisasi dari ANOVA untuk situasi dimana terdapat beberapa variabel terikat (Tabachnick dan Fidell, 2007). MANOVA memiliki kelebihan bila dibandingkan ANOVA.

Penggunaan MANOVA memiliki keunggulan yaitu mampu menganalisis semua variabel terikat secara simultan, sehingga dapat memperkecil kesalahan tipe I (α) dalam pengambilan keputusan uji statistik (Steven, 2002). MANOVA merupakan uji yang kuat dan salah satu cara menghindari peningkatan alpha sebagai "filter" untuk ANOVA. MANOVA mampu mendeteksi dan mengungkapkan perbedaan yang tidak ditampilkan ANOVA-ANOVA pada masing-masing variabel terikat secara terpisah. MANOVA juga mampu mengoreksi hasil ANOVA palsu yang disebabkan peningkatan alpha saat melakukan beberapa tes ANOVA pada masing-masing variabel terikat. Hal ini berarti dengan menggunakan MANOVA, peneliti dapat meningkatkan kesempatan untuk menemukan perubahan sebagai akibat dari perlakuan yang berbeda dan interaksinya. Dengan demikian, temuan-temuan hasil penelitian akan semakin kaya dan sangat berguna bagi perkembangan ilmu pengetahuan.

Berdasarkan hal tersebut, peneliti sangat tertarik untuk menindaklanjutinya dalam bentuk penelitian. Penelitian yang dilaksanakan yaitu mengkaji prosedur analisis data multivariat menggunakan MANOVA disertai implementasinya dalam dunia pendidikan sebagai upaya memberikan inovasi penelitian pendidikan dan memperkaya hasil penelitian pendidikan.

B. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian literatur karena dalam penelitian ini peneliti melakukan kajian literatur terhadap suatu model dalam ilmu statistika, berupa buku dan artikel jurnal atau prosedur terdahulu yang dapat mendukung penelitian. Untuk mendukung pembahasan, diambil kasus dalam dunia pendidikan yaitu penelitian tentang eksperimentasi model pembelajaran kooperatif tipe TGT (*Teams Games Tournament*) dan STAD (*Student Team Achievement Division*) ditinjau dari Gaya Belajar terhadap Prestasi dan Minat Belajar. Variabel bebas dalam kasus ini yaitu model pembelajaran dan gaya belajar, sedangkan variabel terikatnya yaitu prestasi belajar dan minat belajar. Variabel bebas model pembelajaran memiliki dua nilai yaitu kooperatif tipe TGT dan kooperatif tipe STAD, sedangkan variabel bebas gaya belajar memiliki 3 nilai yaitu visual, auditorial, dan kinestetik. Kasus ini menggunakan desain faktorial 2×3 dengan dua variabel terikat, sehingga analisis data yang digunakan yaitu MANOVA dua jalan dengan sel tidak sama. Penggunaan sel tak sama dikarenakan kecil kemungkinan kondisi di lapangan setiap kelas penelitian memiliki banyak peserta didik yang sama. Hal ini juga dimaksudkan menambahkan referensi tentang MANOVA, karena pembahasan untuk sel tak sama masih jauh lebih sedikit bila dibandingkan dengan sel sama.

C. Hasil dan Pembahasan

Pearson dan Fisher adalah orang pertama yang memperkenalkan analisis multivariat. Mereka merupakan orang yang memiliki pemahaman paling mendasar dalam aplikasi statistika (Farrell, 1976). Salah satu teknik dalam analisis multivariat yaitu *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) atau Analisis Variansi Multivariat. MANOVA mempunyai pengertian sebagai suatu teknik statistik yang digunakan untuk menghitung pengujian signifikansi perbedaan rata-rata secara bersamaan antara kelompok untuk dua atau lebih variabel terikat. MANOVA adalah generalisasi dari ANOVA untuk situasi dimana terdapat beberapa variabel terikat (Tabachnick dan Fidell, 2007). Menurut Field (2009: 603), MANOVA memiliki kemiripan asumsi dengan ANOVA tetapi diperluas untuk kasus multivariat. Adapun asumsi yang harus dipenuhi pada MANOVA yaitu:

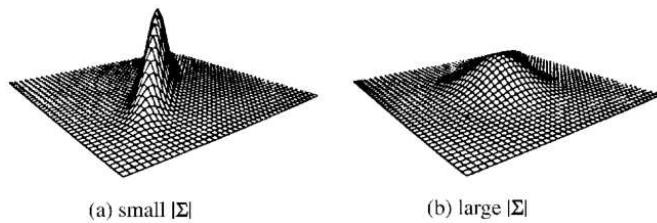
1. Independen: Pengamatan harus independen secara statistik. Dipenuhinya persyaratan ini dimaksudkan agar perlakuan yang diberikan kepada setiap sampel, independen antara satu dengan lainnya.
2. Sampel acak: Dalam statistika untuk hal pengambilan sampel harus dilakukan secara random (acak) dari populasinya atau dengan kata lain menggunakan teknik probabilitas. Selain itu, data yang diukur (variabel terikat) dalam penelitian berskala interval.
3. Normalitas multivariat: Dalam ANOVA, diasumsikan bahwa variabel terikat berdistribusi normal di dalam masing-masing kelompok, sedangkan dalam kasus MANOVA diasumsikan bahwa variabel terikat (secara bersama) berdistribusi normal multivariat di dalam kelompok.
4. Homogenitas matriks kovariansi: Dalam ANOVA, diasumsikan bahwa variansi pada setiap kelompok sama (homogenitas variansi). Sedangkan dalam MANOVA, diasumsikan benar untuk setiap variabel terikat memiliki variansi yang sama pada setiap kelompok, selain itu diasumsikan juga bahwa korelasi antara manapun variabel terikat adalah sama dalam semua kelompok. Asumsi ini diuji dengan pengujian apakah matriks kovariansi populasi dari kelompok yang berbeda adalah sama.

Berdasarkan hal tersebut, maka perlu dilakukan uji persyaratan sebelum digunakan MANOVA. Uji persyaratan ini pada prinsipnya bertujuan untuk memastikan bahwa MANOVA bisa digunakan dan hasil pengujianya dapat diinterpretasikan dengan tepat. Namun dalam praktiknya, asumsi yang harus diuji yaitu populasi-populasi berdistribusi normal multivariat dan matriks kovariansi populasi-populasi sama, sedangkan asumsi lainnya tidak perlu dilakukan pengujian.

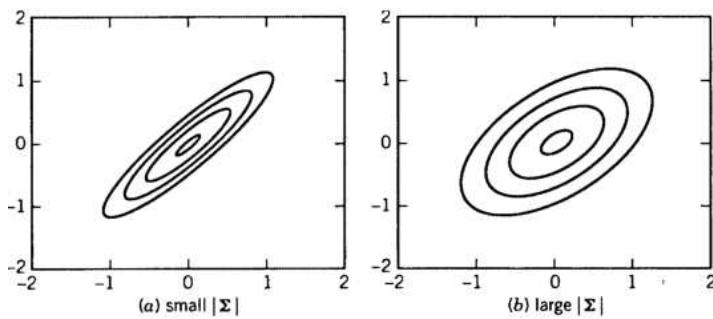
1. Uji Normalitas Multivariat

Sebagian besar prosedur inferensial multivariat didasarkan pada distribusi normal multivariat, yang merupakan generalisasi langsung dari distribusi normal univariat. Teknik multivariat optimal di bawah asumsi normalitas

multivariat, tetapi sayangnya kurang optimal dalam kondisi distribusi data yang miring (tidak simetris) dan sangat sensitif terhadap amatan pencilan (Oja, 2010). Meskipun data sebenarnya mungkin tidak sering tepat berdistribusi normal multivariat, distribusi ini sering kali berfungsi sebagai perkiraan yang berguna terhadap distribusi yang sebenarnya. Untungnya, banyak prosedur berdasarkan normalitas multivariat kuat terhadap penyimpangan keadaan normal (Rencher, 1998).



Gambar 1. Kepadatan Normal Bivariat



Gambar 2. Plot Kontur untuk Distribusi pada Gambar 1

Terdapat beberapa prosedur yang diusulkan para ahli untuk menaksir normalitas multivariat. Menurut Rencher (2002), salah satu prosedur tersebut adalah melakukan generalisasi dari uji normalitas univariat berdasarkan pada *skewness* (kemiringan) dan *kurtosis* (keruncingan) yang dikenal dengan uji Mardia. Romeu dan Ozturk (dalam Timm, 2002) telah meneliti 10 uji *goodness-of-fit* untuk normalitas multivariat, dari simulasi studinya menunjukkan bahwa uji normalitas multivariat berdasarkan kemiringan dan keruncingan yang diusulkan oleh Mardia adalah uji yang paling dapat dipercaya dan stabil untuk menaksir normalitas multivariat. Penolakan terhadap normalitas menggunakan uji Mardia menandai adanya kehadiran *outlier* (pencilan) multivariat atau distribusi berbeda secara signifikan dari distribusi normal multivariat. Oleh karena itu, uji ini dapat bermanfaat ganda yaitu untuk mengecek normalitas multivariat sekaligus mengecek kehadiran pencilan. Namun, jika hipotesis nol ditolak, peneliti tidak tahu sektor manakah yang membawa pelanggaran terhadap asumsi tersebut. Sehingga diperlukan pengidentifikasi pencilan multivariat dan/atau mengubah bentuk data untuk mencapai normalitas multivariat. Saat ini sudah tersedia macro SPSS uji Mardia untuk menguji asumsi normalitas multivariat yang dikembangkan oleh Lawrence T. DeCarlo.

2. Uji Homogenitas Matriks Kovariansi

Field (2009: 604) menjelaskan bahwa asumsi homogenitas matriks kovariansi lebih mudah diuji daripada normalitas multivariat. Untuk melakukan uji homogenitas matriks kovariansi dipergunakan uji Box's M . Menurut Rencher (2002), uji Box's M merupakan perluasan dari uji Bartlett. Box (dalam Rencher, 1998) menjelaskan bahwa uji Box's M menyediakan dua pendekatan yaitu χ^2 dan F untuk distribusi M . Pendekatan χ^2 disarankan untuk $p \leq 5$, $k \leq 5$, dan setiap $n_i > 20$. Dalam situasi dimana kondisi itu tidak terpenuhi, uji Box's M lebih tepat didasarkan pada pendekatan F . Pearson (dalam Rencher, 1998) membandingkan kedua pendekatan dengan distribusi eksak untuk $p \leq 5$ dan disimpulkan bahwa keduanya merupakan pendekatan yang cukup baik dan pendekatan F yang umumnya lebih akurat. Uji ini harus tidak signifikan jika matriksnya sama. Uji Box's M peka terhadap penyimpangan normalitas multivariat, maka hasil pengujian dapat tidak signifikan yang bukan dikarenakan matriksnya sama, tetapi karena asumsi normalitas multivariat tidak dipenuhi. Hal serupa juga dikemukakan oleh Stevens (2002), bahwa uji Box's M untuk menguji asumsi homogenitas matriks kovariansi terlalu sensitif dengan ketidaknormalan distribusi data. Oleh karena itu, penting untuk mengetahui apakah data amatan memenuhi asumsi normalitas multivariat sebelum menginterpretasikan uji Box's M .

3. Model MANOVA

Fisher mempublikasikan ANOVA pada tahun 1922, sepuluh tahun sebelum mempublikasikan ANCOVA. Pada awal perkembangannya, semua struktur eksperimental melibatkan jumlah pengamatan yang sama di setiap sel. Setelah itu, berkembang untuk kasus yang tidak seimbang dimana jumlah replikasi dapat bervariasi dari satu sel ke sel lainnya. Pada tahun 1934, Yates mempublikasikan model rerata sel (metode rerata kuadrat tertimbang) untuk menganalisa data yang tidak seimbang. Namun pada awal tahun 1950-an, model rerata sel digantikan oleh model *overparameterized*. Model *overparameterized* telah berhasil dengan baik dalam kasus yang seimbang, namun sayangnya, berbagai upaya untuk menggeneralisasi model *overparameterized* dengan kasus yang tidak seimbang telah menghasilkan hasil yang kontradiktif. Baru-baru ini, Speed (1969), Urquhart, Weeks, dan Henderson (1973), Nelder (1974), Hocking dan Speed (1975), Bryce (1975), Bryce, Carter, dan Reader (1976), Searle (1977), Speed, dkk. (1978), Bryce, Scott, dan Carter (1980), Searle, Speed, dan Henderson (1981), serta Hocking (1985, 1996) berusaha mengembalikan ke model rerata sel karena permasalahan tersebut.

Terdapat dua model untuk analisis variansi yaitu model *overparameterized* (*non-full-rank*) $\mathbf{x}_{ijk} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\gamma}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}$ dan model rerata sel $\mathbf{x}_{ijk} = \boldsymbol{\mu}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}$. Model *overparameterized* didesain untuk data seimbang sehingga ukuran setiap sel harus sama. Model ini menunjukkan efek utama dan interaksi. Sedangkan

model rerata sel tidak menunjukkan efek utama dan interaksi, tetapi dapat digunakan baik pada ukuran sel sama maupun tidak sama. Rencher (1998) menjelaskan bahwa model rerata sel memberikan pendekatan sederhana dan tidak ambigu yang mengarah pada pengujian hipotesis yang dapat dikenali dengan jelas. Untuk menyelesaikan uji dalam model ini digunakan kontras untuk menyatakan efek utama dan interaksi. Model rerata sel dapat pula dinyatakan sebagai:

$$X = WM + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dimana:

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_{111} \\ \mathbf{x}'_{112} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{abn_{ab}} \end{pmatrix} = (\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{(p)}) \quad M = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}'_{11} \\ \boldsymbol{\mu}'_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}'_{ab} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\mu}_{(1)}, \boldsymbol{\mu}_{(2)}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{(p)}) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}'_{111} \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_{112} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_{abn_{ab}} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{(p)})$$

W: rank penuh sebesar ab merupakan matriks ukuran $N \times (ab)$

4. Statistik Uji MANOVA

Terdapat beberapa statistik uji MANOVA yaitu Wilks' Lambda, Pillai, Lawley-Hotelling, dan Roy's Largest Root. Banyak *software* statistik menyajikan perhitungan keempat statistik uji MANOVA tersebut, dan biasanya keempat statistik uji tersebut menghasilkan kesimpulan yang sama. Dalam kasus ketika keempat statistik uji tersebut menghasilkan kesimpulan yang berbeda dalam hal menerima dan menolak hipotesis, cara yang dapat dilakukan yaitu menguji nilai eigen dan matriks kovariansi serta mengevaluasi permasalahan kesimpulan dalam karakteristik statistik uji (Rencher, 2002).

Pada artikel ini akan dibahas secara terperinci mengenai statistik uji Wilks' Lambda. Hal ini dengan pertimbangan bahwa secara historis, Wilks' Lambda telah memainkan peran dominan dalam uji-uji signifikansi dalam MANOVA. Wilks' Lambda merupakan statistik uji MANOVA yang pertama kali diturunkan dan memiliki pendekatan χ^2 dan F yang terkenal (Rencher, 2002).

Sebelum melakukan perhitungan statistik uji MANOVA, terlebih dahulu dihitung matriks *Sum-of-Squares and Cross-Products* (SSCP). Menurut Rencher (1998), perhitungan matriks SSCP untuk MANOVA dua jalan sel tak sama disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Rangkuman Matriks SSCP MANOVA Dua Jalan Sel Tak Sama

Sumber Variasi	Matriks SSCP	Derajat Kebebasan
Faktor A	$\mathbf{H}_A = (\mathbf{A}\hat{\mathbf{M}})' \left[\mathbf{A}(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1} \mathbf{A}' \right]^{-1} \mathbf{A}\hat{\mathbf{M}}$	$v_{HA} = a - 1$
Faktor B	$\mathbf{H}_B = (\mathbf{B}\hat{\mathbf{M}})' \left[\mathbf{B}(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1} \mathbf{B}' \right]^{-1} \mathbf{B}\hat{\mathbf{M}}$	$v_{HB} = b - 1$
Interaksi	$\mathbf{H}_{AB} = (\mathbf{C}\hat{\mathbf{M}})' \left[\mathbf{C}(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1} \mathbf{C}' \right]^{-1} \mathbf{C}\hat{\mathbf{M}}$	$v_{HAB} = (a-1)(b-1)$
Galat	$\mathbf{E} = (\mathbf{X} - \mathbf{W}\hat{\mathbf{M}})'(\mathbf{X} - \mathbf{W}\hat{\mathbf{M}})$ atau	$v_E = N - ab$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} (x_{ijk} - \bar{x}_{ij}) (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})' \\
 \text{Total} \quad \mathbf{T} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} (x_{ijk} - \bar{x}) (x_{ijk} - \bar{x})' \quad N - 1
 \end{aligned}$$

dengan:

- a : banyaknya baris (klasifikasi faktor A)
- b : banyaknya kolom (klasifikasi faktor B)
- N : banyaknya seluruh data amatan = $n_{11} + n_{12} + \dots + n_{ij}$
- \mathbf{W} : rank penuh sebesar ab merupakan matriks ukuran $N \times (ab)$
- \mathbf{WW}' : matriks diagonal ukuran $(ab) \times (ab)$ dengan entri n_{ij}
= $\text{diag}(n_{11}, n_{12}, \dots, n_{ab})$
- \mathbf{X} : matriks ukuran $N \times p$ dengan entri seluruh data amatan
- $\hat{\mathbf{M}}$: matriks ukuran $(ab) \times p$ dengan entri $\bar{x}_{pij} = (\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X}$
- \mathbf{A} : matriks kontras untuk efek utama baris (faktor A)
- \mathbf{B} : matriks kontras untuk efek utama kolom (faktor B)
- \mathbf{C} : matriks kontras untuk efek sederhana (interaksi)

Sebagai contoh perhitungan matriks kontras, ditinjau kasus pada pada desain faktorial 2×3 dengan 2 buah variabel terikat. Perhitungan matriks kontras pada kasus tersebut sebagai berikut:

Telah diketahui $\mathbf{M} = (\boldsymbol{\mu}_{(1)}, \boldsymbol{\mu}_{(2)}) = (\boldsymbol{\mu}_{11}, \boldsymbol{\mu}_{12}, \boldsymbol{\mu}_{13}, \boldsymbol{\mu}_{21}, \boldsymbol{\mu}_{22}, \boldsymbol{\mu}_{23})'$

Faktor A memiliki 2 nilai yang bersesuaian dengan 3 kolom faktor B . Untuk 2 nilai pada faktor A mempunyai 1 derajat kebebasan, sehingga memerlukan 1 kontras. Efek utama faktor A diperoleh dengan membandingkan baris pertama dengan baris kedua. Ini dapat dilakukan dengan satu kontras ortogonal.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}'\mathbf{M} &= (\boldsymbol{\mu}_{11} + \boldsymbol{\mu}_{12} + \boldsymbol{\mu}_{13}) - (\boldsymbol{\mu}_{21} + \boldsymbol{\mu}_{22} + \boldsymbol{\mu}_{23}) \\
 &= \boldsymbol{\mu}_{11} + \boldsymbol{\mu}_{12} + \boldsymbol{\mu}_{13} - \boldsymbol{\mu}_{21} - \boldsymbol{\mu}_{22} - \boldsymbol{\mu}_{23} \\
 &= (1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1) \mathbf{M}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}' = (1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1)$$

Faktor B memiliki 3 nilai yang bersesuaian dengan 2 baris faktor A . Untuk 3 nilai pada faktor B mempunyai 2 derajat kebebasan, sehingga memerlukan 2 kontras. Efek utama faktor B diperoleh dengan membandingkan kolom pertama dengan dua kolom lainnya, dan kemudian membandingkan kolom kedua dengan kolom ketiga. Ini dapat dilakukan dengan dua kontras ortogonal berikut.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_1' \mathbf{M} &= 2(\boldsymbol{\mu}_{11} + \boldsymbol{\mu}_{21}) - (\boldsymbol{\mu}_{12} + \boldsymbol{\mu}_{22}) - (\boldsymbol{\mu}_{13} + \boldsymbol{\mu}_{23}) & \mathbf{b}_2' \mathbf{M} &= (\boldsymbol{\mu}_{12} + \boldsymbol{\mu}_{22}) - (\boldsymbol{\mu}_{13} + \boldsymbol{\mu}_{23}) \\
 &= 2\boldsymbol{\mu}_{11} - \boldsymbol{\mu}_{12} - \boldsymbol{\mu}_{13} + 2\boldsymbol{\mu}_{21} - \boldsymbol{\mu}_{22} - \boldsymbol{\mu}_{23} & &= \boldsymbol{\mu}_{12} - \boldsymbol{\mu}_{13} + \boldsymbol{\mu}_{22} - \boldsymbol{\mu}_{23} \\
 &= (2 \ -1 \ -1 \ 2 \ -1 \ -1) \mathbf{M} & &= (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1) \mathbf{M}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Kontras $\mathbf{a}'\mathbf{M}$, $\mathbf{b}_1'\mathbf{M}$, dan $\mathbf{b}_2'\mathbf{M}$ membandingkan unsur-unsur μ_{ij} di dalam rerata vektor \mathbf{M} . Interaksi AB mempunyai 2 derajat kebebasan, sehingga memerlukan 2 kontras berhubungan yang diperoleh dengan mengalikan unsur-unsur bersesuaian dari a_1 dan b_1 serta a_1 dan b_2 . Perkalian menurut unsur dari dua vektor tersebut dinamakan *Hadamard product*.

$$\mathbf{c}_1' = (2 \ -1 \ -1 \ -2 \ 1 \ 1) \quad \mathbf{c}_2' = (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk kasus lainnya dapat menyesuaikan prosedur perhitungan matriks kontras sebagaimana yang telah dijelaskan. Selanjutnya, perhitungan Λ Wilks' untuk pengujian hipotesis terkait interaksi dan efek utama sebagai berikut (Rencher, 2002).

$$\Lambda_A = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}_A|} \quad \Lambda_B = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}_B|} \quad \Lambda_{AB} = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}_{AB}|}$$

Tabel 2. Transformasi Λ Wilks' menjadi Uji F Ekor Kanan Eksak

Parameter p, v_H	Statistik dalam Distribusi F	Derajat Bebas
Sebarang $p, v_H = 1$	$\frac{1-\Lambda}{\Lambda} \frac{v_E - p + 1}{p}$	$p, v_E - p + 1$
Sebarang $p, v_H = 2$	$\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \frac{v_E - p + 1}{p}$	$2p, 2(v_E - p + 1)$
$p = 1$, sebarang v_H	$\frac{1-\Lambda}{\Lambda} \frac{v_E}{v_H}$	v_H, v_E
$p = 2$, sebarang v_H	$\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \frac{v_E - 1}{v_H}$	$2v_H, 2(v_E - 1)$

Rencher (2002) menjelaskan bahwa ketika $v_H = 1$ atau 2 atau ketika $p = 1$ atau 2 , Λ Wilks' diubah menjadi statistik F eksak. Perubahannya diberikan pada Tabel 2. Hipotesis ditolak ketika nilai perubahan dari Λ melebihi titik persentase teratas dengan tingkat signifikansi α dari distribusi F , dengan derajat bebas seperti yang ditunjukkan.

Untuk nilai p dan v_H selain pada Tabel 2, perkiraan statistik F diberikan oleh $F = \frac{1-\Lambda^{1/t}}{\Lambda^{1/t}} \frac{df_2}{df_1}$ dengan derajat bebas df_1 dan df_2 , dimana

$$df_1 = p v_H, \quad df_2 = wt - \frac{1}{2} (p v_H - 2),$$

$$w = v_E + v_H - \frac{1}{2}(p + v_H + 1), \quad t = \sqrt{\frac{p^2 v_H^2 - 4}{p^2 + v_H^2 - 5}}.$$

Ketika $p v_H = 2$, t diatur sama dengan 1. Perkiraan $F = \frac{1 - \Lambda^{1/t}}{\Lambda^{1/t}} \frac{df_2}{df_1}$ tereduksi menjadi nilai F eksak yang diberikan dalam Tabel 2, ketika keduanya v_H atau p adalah 1 atau 2.

5. Prosedur MANOVA

Setelah mengetahui statistik uji MANOVA khususnya Wilks' Lambda, berikut prosedur pengujian MANOVA dua jalan dengan sel tak sama.

a. Menetapkan Hipotesis

1) Hipotesis perbedaan efek antarbaris

$$H_{0A} : \mathbf{AM} = \mathbf{O} \text{ (arti } H_{0A}: \begin{bmatrix} \mu_{11\bullet} \\ \mu_{21\bullet} \\ \vdots \\ \mu_{p1\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12\bullet} \\ \mu_{22\bullet} \\ \vdots \\ \mu_{p2\bullet} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} \mu_{1a\bullet} \\ \mu_{2a\bullet} \\ \vdots \\ \mu_{pa\bullet} \end{bmatrix} \text{)}$$

$H_{1A} : \mathbf{AM} \neq \mathbf{O}$ (arti H_{1A} : paling sedikit ada dua matriks rerata baris yang tidak sama)

2) Hipotesis perbedaan efek antarkolom

$$H_{0B} : \mathbf{BM} = \mathbf{O} \text{ (arti } H_{0B}: \begin{bmatrix} \mu_{1\bullet 1} \\ \mu_{2\bullet 1} \\ \vdots \\ \mu_{p\bullet 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1\bullet 2} \\ \mu_{2\bullet 2} \\ \vdots \\ \mu_{p\bullet 2} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} \mu_{1\bullet b} \\ \mu_{2\bullet b} \\ \vdots \\ \mu_{p\bullet b} \end{bmatrix} \text{)}$$

$H_{1B} : \mathbf{BM} \neq \mathbf{O}$ (arti H_{1B} : paling sedikit ada dua matriks rerata kolom yang tidak sama)

3) Hipotesis interaksi

$H_{0AB} : \mathbf{CM} = \mathbf{O}$ (arti H_{0AB} : tidak ada interaksi baris dan kolom terhadap variabel-variabel terikat)

$H_{1AB} : \mathbf{CM} \neq \mathbf{O}$ (arti H_{1AB} : ada interaksi baris dan kolom terhadap variabel-variabel terikat)

b. Taraf Signifikansi (α)

c. Menentukan Statistik Uji

Untuk melakukan uji hipotesis menggunakan MANOVA dua jalan mengikuti formula statistik uji Wilks' sebagaimana disajikan pada Tabel 2. Langkah awal dalam menguji hipotesis ini adalah menentukan statistik uji yang tepat sesuai dengan model analisis. Hal yang perlu diperhatikan dalam memilih formula statistik uji Wilks' yaitu banyaknya

variabel terikat dan desain faktorial yang digunakan. Sebagai contoh penentuan formula statistik uji Wilks', ditinjau kasus pada desain faktorial 2×3 dengan 2 buah variabel terikat. Pada contoh ini terdapat dua variabel terikat ($p = 2$). Menurut Rencher (2002), ketika untuk $p = 2$ dan sebarang v_H , maka formula statistik uji Wilks' yang tepat adalah:

$$F = \left(\frac{1 - \sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \right) \left(\frac{v_E - 1}{v_H} \right) \sim F(2v_H, 2(v_E - 1))$$

Formula ini perlu adanya modifikasi pada nilai-nilai v_H dan v_E dengan mengikuti Tabel 1.

1) Pengaruh Faktor A

Karena $v_{HA} = a - 1$ dan $v_E = N - ab$, maka

$$F_A = \left(\frac{1 - \sqrt{\Lambda_A}}{\sqrt{\Lambda_A}} \right) \left(\frac{N - ab - 1}{a - 1} \right) \sim F(2(a - 1), 2(N - ab - 1))$$

2) Pengaruh Faktor B

Karena $v_{HB} = b - 1$ dan $v_E = N - ab$, maka

$$F_B = \left(\frac{1 - \sqrt{\Lambda_B}}{\sqrt{\Lambda_B}} \right) \left(\frac{N - ab - 1}{b - 1} \right) \sim F(2(b - 1), 2(N - ab - 1))$$

3) Interaksi Antara Faktor A dan Faktor B

Karena $v_{HAB} = (a - 1)(b - 1)$ dan $v_E = N - ab$, maka

$$F_{AB} = \left(\frac{1 - \sqrt{\Lambda_{AB}}}{\sqrt{\Lambda_{AB}}} \right) \left(\frac{N - ab - 1}{(a - 1)(b - 1)} \right) \sim F(2(a - 1)(b - 1), 2(N - ab - 1))$$

dimana:

a :banyaknya baris

b :banyaknya kolom

N :banyaknya seluruh data amatan

v_{HA} : derajat kebebasan $H_A = a - 1$

v_{HB} : derajat kebebasan $H_B = b - 1$

v_{HAB} : derajat kebebasan $H_{AB} = (a - 1)(b - 1)$

v_E :derajat kebebasan $E = N - ab$

d. Daerah Kritis

Untuk masing-masing nilai F di atas, daerah kritisnya adalah:

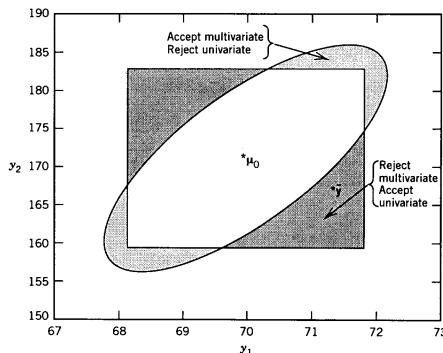
1) Daerah kritis F_A adalah $DK = \{F \mid F > F_{\alpha; 2(a-1), 2(N-ab-1)}\}$

2) Daerah kritis F_B adalah $DK = \{F \mid F > F_{\alpha; 2(b-1), 2(N-ab-1)}\}$

3) Daerah kritis F_{AB} adalah $DK = \{F \mid F > F_{a; 2(a-1)(b-1); 2(N-ab-1)}\}$

- e. Keputusan Uji: H_0 ditolak jika $F_{\text{obs}} \in DK$.
- f. Menentukan kesimpulan dari keputusan uji yang ada.

Jika uji multivariat yang didasarkan pada Λ menolak H_0 , ini dapat diikuti oleh uji F pada setiap p individual. Kita dapat merumuskan hipotesis perbandingan rerata menyilang k kelompok untuk setiap variabel, yaitu, $H_{0r} : \mu_{1r} = \mu_{2r} = \dots = \mu_{kr}, r = 1, 2, \dots, p$. Itu tidak selalu berarti bahwa setiap uji F pada p individual variabel akan menolak H_{0r} yang bersesuaian. Sebaliknya, ada kemungkinan bahwa salah satu atau lebih dari F akan menolak H_{0r} ketika uji Λ menerima H_0 . Dalam kedua kasus, dimana uji multivariat dan uji univariat berbeda, kita menggunakan hasil uji multivariat daripada hasil uji univariat. Hal ini mirip hubungan antara uji Z^2 dan uji z yang ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3. Daerah Penerimaan dan Penolakan Uji Univariat dan Uji Multivariat

Ketika MANOVA menunjukkan bahwa hipotesis nol ditolak, maka dilanjutkan dengan ANOVA pada masing-masing variabel terikat. Rencher dan Schott (dalam Rencher, 1998, 2002) menunjukkan bahwa prosedur ini akan menjaga taraf kesalahan α sepanjang uji ANOVA dilaksanakan hanya jika uji MANOVA menolak hipotesis nol.

Komparasi ganda adalah tindak lanjut dari ANOVA apabila hasil analisis tersebut menunjukkan bahwa hipotesis nol ditolak dan nilai dari variabel penelitian lebih dari dua. Metode Scheffé dipilih karena menghasilkan cacah beda rerata signifikan paling sedikit dibandingkan metode lainnya. Metode ini terdapat empat macam komparasi, yaitu komparasi ganda rerata antar baris, komparasi ganda rerata antar kolom, komparasi ganda antar sel pada baris yang sama, dan komparasi ganda rerata antar sel pada kolom yang sama.

Menurut Ho (2006: 64), uji komparasi rerata antar sel untuk faktor interaksi tidak dapat dilakukan secara langsung menggunakan program

General Linear Model (GLM) pada paket *software* SPSS. Fasilitas yang dapat digunakan untuk melihat adanya interaksi secara langsung adalah profil efek. Jika profil variabel bebas pertama dan profil variabel bebas kedua tidak berpotongan, maka kecenderungannya tidak ada interaksi di antara mereka. Sebaliknya, jika profil variabel bebas pertama berpotongan dengan profil variabel bebas kedua, maka kecenderungannya ada interaksi di antara keduanya. Namun, profil efek tidak dapat mengindikasikan perbedaan rerata. Untuk mengidentifikasi perbedaan secara spesifik tetap membutuhkan uji pasca ANOVA (disebut juga uji lanjut atau komparasi ganda). Misalnya kasus pada artikel ini menggunakan desain faktorial 2×3 dengan 2 buah variabel bebas. Variabel bebas pertama memiliki 2 nilai dan variabel bebas kedua memiliki 3 nilai, sehingga terdapat 6 sel (kondisi eksperimentasi). Selain program GLM, uji komparasi ganda pada paket *software* SPSS dapat dilakukan melalui program *One-Way ANOVA*. Menurut Ho (2006: 64), prosedur yang dapat dilakukan untuk keperluan tersebut adalah memanipulasi data dengan merubah 6 kondisi eksperimentasi menjadi 6 nilai (dianggap satu variabel bebas).

D. Simpulan

MANOVA merupakan suatu solusi teknik analisis data kuantitatif bagi peneliti di dunia pendidikan yang ingin mengamati secara lebih mendetail terkait hasil belajar peserta didik, dalam rangka menerapkan prinsip kebulatan dalam Kurikulum 2013 (prinsip evaluasi hasil belajar secara menyeluruh meliputi aspek kognitif, aspek afektif, dan aspek psikomotor). MANOVA memberikan inovasi bagi penelitian pendidikan, sekaligus memperkaya hasil penelitian pendidikan.

MANOVA memiliki asumsi yang mirip dengan ANOVA tetapi diperluas untuk kasus multivariat. Adapun asumsi yang harus dipenuhi pada MANOVA yaitu independen, sampel acak, normalitas multivariat, dan homogenitas matriks kovariansi. Uji persyaratan MANOVA meliputi uji normalitas multivariat yang dapat menggunakan uji Mardia dan uji homogenitas matriks kovariansi yang dapat menggunakan uji Box's *M*. Kesulitan penerapan analisis multivariat pada perhitungannya yang terlalu rumit, sudah terpecahkan dengan tersedianya fitur *software* statistik yang semakin canggih.

Terdapat beberapa statistik uji MANOVA yaitu Wilks' Lambda, Pillai, Lawley-Hotelling, dan Roy's Largest Root. Banyak *software* statistik menyajikan perhitungan keempat statistik uji MANOVA tersebut, dan biasanya keempat statistik uji tersebut menghasilkan kesimpulan yang sama. Ketika MANOVA menunjukkan bahwa hipotesis nol ditolak, maka dilanjutkan dengan ANOVA pada masing-masing variabel terikat. Prosedur ini akan menjaga taraf kesalahan α sepanjang uji ANOVA dilaksanakan

hanya jika uji MANOVA menolak hipotesis nol. Apabila ANOVA menunjukkan bahwa hipotesis nol ditolak, maka dilakukan uji post hoc menggunakan metode Scheffe'. Metode ini dilakukan ketika variabel bebas memiliki lebih dari dua nilai. Jika suatu variabel bebas hanya memiliki dua nilai, maka untuk melihat perbedaan antara keduanya dapat langsung dilakukan perbandingan pada masing-masing rerata marginalnya.

Berdasarkan simpulan penelitian ini, maka saran yang dapat diberikan yaitu: 1) peneliti di bidang pendidikan tidak perlu cemas lagi untuk melakukan analisis data kuantitatif menggunakan MANOVA, karena sudah tersedia fitur software yang dapat membantu untuk keperluan tersebut; dan 2) peneliti sudah saatnya melakukan inovasi pada penelitian pendidikan dengan menggunakan MANOVA sebagai teknik analisis data karena akan memperkaya hasil penelitian. MANOVA mampu menganalisis variabel terikat dalam hal ini hasil belajar secara simultan.

E. Daftar Pustaka

Anderson, T. W. 2003. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Bryce, G. R. 1975. The One-Way Model. *American Statistician* 29, 69-70.

Bryce, G. R., Carter, M. W., and Reader, M. W. 1976. *Nonsingular and singular transformations in the fixed model*. Presented at the Annual Meeting of the American Statistical Association, Boston, MA, August 1976.

Bryce, G. R., Scott, D. T, and Carter, M. W. 1980. *Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models—A Reparameterization Approach*. Communications in Statistics—Series A, Theory and Methods 9, 131-150.

Field, A. 2009. *Discovering Statistics Using SPSS*. London: Sage Publications.

Härdle, W. dan Simar, L. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Berlin: Springer-Verlag.

Hocking, R. R. 1985. *The Analysis of Linear Models*. Monterey, CA: Brooks/Cole.

Hocking, R. R. 1996. *Methods and Applications of Linear Models*. New York: Wiley.

Hocking, R. R. and Speed, F M. 1975. A Full Rank Analysis of Some Linear Model Problems. *Journal of the American Statistical Association* 70, 706-712.

Leps, J. dan Smilauer, P. 1999. *Multivariate Analysis of Ecological Data*. Ceske Budejovice: Faculty of Biological Science, University of South Bohemia.

Mattjik, A. A. dan Sumertajaya, I. M. 2011. *Sidik Peubah Ganda dengan Menggunakan SAS*. Bogor: IPB Press.

Morrison, D. F. 1990. *Multivariate Statistical Methods*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Nelder, J. A. 1974. Letter to The Editor. *Journal of the Royal Statistical Society (Series C)*, 23, 232.

Oja, H. 2010. *Multivariate Nonparametric Methods with R: An Approach Based on Spatial Signs and Ranks*. New York: Springer Science+Business Media.

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 53 Tahun 2015 tentang *Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik dan Satuan Pendidikan pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah*.

Rencher, A. C. 1998. *Multivariate Statistical Inference and Applications*. Kanada: John Wiley and Sons, Inc.

Rencher, A. C. 2002. *Methods of Multivariate Analysis*. Kanada: John Wiley and Sons, Inc.

Searle, S. R. 1977. *Analysis of Variance of Unbalanced Data From 3-Way and Higher-Order Classifications*. Technical Report BU-606-M, Cornell University, Biometrics Units.

Searle, S. R., Speed, F. M., and Henderson, H. V. 1981. Some computational and model equivalencies in analysis of variance of unequal-subclass-numbers data. *American Statistician* 35, 16-33.

Speed, F. M. 1969. *A New Approach to the Analysis of Linear Models*. Technical Report, National Aeronautics and Space Administration, Houston, TX. NASA Technical memo, NASA TM X-58030.

Speed, F M., Hocking, R. R., and Hackney, O. P. 1978. Methods of analysis of linear models with unbalanced data. *Journal of the American Statistical Association* 73, 105-112.

Steven, J. 2002. *Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Tabachnick, B. G. dan Fidell, L. S. 2007. *Using Multivariate Statistics*. Boston: Pearson Education, Inc.

Timm, N. H. 2002. *Applied Multivariate Analysis*. New York: Springer-Verlag.

Urquhart, N. S., Weeks, D. L., dan Henderson, C. R. 1973. Estimation Associated with Linear Models: A Revisitation. *Communications in Statistics* 1, 303-330.