

## MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT TIPES DENGAN SATURATED INCIDENCE RATE

### MATHEMATICAL MODEL OF TYPHOID FEVER SPREAD USING SATURATED INCIDENCE RATE

M. Julkarnain<sup>a</sup>, Widodo<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Program Studi Teknik Informatika FT UTS

Jl. Olat Maras Moyo Hulu Sumbawa, m.julkarnain@uts.ac.id

<sup>b</sup> Departemen Matematika FMIPA UGM

Sekip Utara Bulaksumur Yogyakarta, widodo\_math@ugm.ac.id

#### ABSTRAK

Penyakit tipes merupakan penyakit yang disebabkan oleh infeksi bakteri *Salmonella typhi*, menyebar melalui makanan atau air yang terkontaminasi oleh feces atau urin dari orang yang terinfeksi bakteri *Salmonella typhi*. Dalam penelitian ini, dibentuk model matematika penyebaran penyakit tipes dengan *saturated incidence rate*. Penambahan *saturated incidence rate* dalam model ini mewakili kewaspadaan individu yang rentan terhadap penyakit tipes ketika jumlah individu yang terinfeksi penyakit tipes meningkat. Diperoleh dua titik ekuilibrium, titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Pencarian bilangan reproduksi dasar juga dilakukan metode *next-generation matrix*. Dalam paper ini juga dilakukan analisa kestabilan lokal titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik serta analisa kestabilan global titik ekuilibrium bebas penyakit. Simulasi numerik juga dilakukan di sekitar titik ekuilibrium. Penambahan *saturated incidence rate* menghambat penyebaran penyakit tipes. Ketika bilangan reproduksi dasar kurang dari 1, penyakit tipes akan hilang dan jika bilangan reproduksi dasar lebih besar dari 1, penyakit tipes akan tetap ada.

**Kata Kunci:** penyakit tipes, model matematika, *saturated incidence rate*, titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar.

#### ABSTRACT

Typhoid fever is a bacterial infectious disease caused by *Salmonella typhi*, transmitted through food or water contaminated by feces or urine of people who was infected by *Salmonella typhi*. In this research, mathematical model of typhoid fever with saturated incidence rate that when infected population increase, people more aware and inhibit the spread of the disease. According to model analysis, there was two equilibrium point, free disease and endemic. The basic reproduction number has been computed using next-generation matrix method. We have shown that the disease free equilibrium point of the model is globally asymptotic stable when basic reproduction number is less than unity and endemic equilibrium point is locally asymptotic stable when basic reproduction number is greater than unity. Numerical simulation was shown around equilibrium point. The addition of the saturated incidence rate inhibits the spread of typhoid. When the basic reproduction number is less than 1, typhoid will disappear and if the basic reproduction number is greater than 1, typhoid will remain.

**Keywords:** typhoid fever, mathematical model, saturated incidence rate, equilibrium point, basic reproduction number.

## Pendahuluan

Model matematika merupakan suatu hasil dari proses representasi permasalahan dalam kehidupan nyata ke dalam pernyataan matematis. Salah satu permasalahan dalam kehidupan nyata adalah penyakit menular.

Model matematika yang dibentuk berdasarkan masalah penyakit menular dikenal dengan istilah model epidemik. Model epidemik yang paling sederhana yaitu model epidemik SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Model epidemik SIR membagi populasi menjadi tiga sub populasi terhadap penyakit yang sama. Ketiga sub populasi tersebut yaitu sub populasi individu yang rentan (*susceptible*) terhadap penyakit pada waktu  $t$  yang dilambangkan dengan  $S(t)$ , sub populasi individu yang terinfeksi penyakit pada waktu  $t$  yang dilambangkan dengan  $I(t)$  dan sub populasi individu yang sembuh (*recovered*) dari penyakit pada waktu  $t$  yang dilambangkan dengan  $R(t)$ .

Penyakit tipes atau demam tifoid (*Typhoid Fever*) adalah penyakit infeksi bakteri, yang disebabkan oleh *Salmonella typhi*. Penyakit ini ditularkan melalui konsumsi makanan atau minuman yang terkontaminasi oleh tinja atau urin orang yang menderita penyakit tipes. Besaran kasus penyakit tipes di dunia sangat sulit ditentukan, karena penyakit ini dikenal mempunyai gejala dengan spektrum klinis

yang sangat luas. *World Health Organization* (2003) memperkirakan ada 17 juta kasus penyakit tipes di seluruh dunia dengan insiden 600.000 kasus kematian tiap tahun. Di negara-negara dengan status endemis demam tifoid, 95% merupakan kasus rawat jalan sehingga insiden sebenarnya 15-25 kali lebih besar dari laporan rawat inap rumah sakit.

Gejala penyakit tipes biasanya muncul 13 minggu setelah terkena. Gejala meliputi demam tinggi, malas, sakit kepala, mual, kehilangan nafsu makan, sembelit atau diare, bintik-bintik merah muda di dada (*rose spots*), dan pembesaran limpa dan hati. Penyakit tipes sebagian dapat dicegah dengan vaksin, dimana vaksin disarankan di daerah tempat umum terjadinya penyakit tipes.

Sorrell (2015) menjelaskan ada beberapa contoh vaksin untuk penyakit tipes antara lain seperti yang digunakan di U.S. military yaitu *Vi Polisaccharide*, *Live Ty21a*, *Parental heat-phenol* dan *Acetone-inactivated* dengan masa perlindungan (booster) berkisar 2 sampai 5 tahun.

Penanganan penyakit tipes mencakup antibiotik dan cairan. Antibiotik untuk menghentikan pertumbuhan dan membunuh bakteri dan saat penderita akan mengalami dehidrasi saat diare sehingga butuh cairan penyeimbang yang cukup. Setelah

penderita mendapatkan perawatan, ada fase dimana bakteri di dalamnya belum hilang sepenuhnya. Ketika dalam fase ini penderita tadi berhenti meminum obat yang diberikan atau tidak menjaga makanan maupun minumannya, maka ada kemungkinan penyakit tipusnya kambuh lagi dalam jangka waktu yang dekat.

Deris (2010) dalam jurnalnya menjelaskan bahwa di Hospital Universiti Sains Malaysia terdapat 13 kasus penderita penyakit tipus yang sudah dirawat dan sembuh, namun kemudian terinfeksi kembali penyakit tipus.

Model matematika penyakit tipus biasanya menggunakan *bilinear incidence rate  $\beta SI$*  seperti pada Edward (2016). Dalam tulisan tersebut, Stephen Edward dan Nkuba Nyerere membuat model matematika penyakit tipus SEIRV dengan mengikutsertakan sub-populasi individu yang sudah diberi vaksin ( $V$ ) dan individu yang sudah sembuh dapat kembali menjadi rentan. Ini sesuai dengan fakta bahwa seorang penderita tipus yang sudah dilakukan perawatan dan sembuh bisa kembali menjadi rentan dan terinfeksi lagi bahkan dalam waktu yang relatif singkat.

Mushayabasa (2012) dalam jurnalnya membuat model matematika penyakit tipus dengan *saturated incident rate*. Laju insiden *saturated incident rate* yang merupakan salah satu contoh *nonlinear incidence rate* dianggap lebih

realistis dibandingkan dengan *bilinear incident rate* karena tidak menghiraukan perubahan perilaku individu-individu dalam populasi yang lebih waspada ketika jumlah individu yang menderita tipus dengan gejala meningkat.

Pada penelitian ini akan dibahas model matematika penularan penyakit tipus dengan *saturated incidence rate* yang terinspirasi dari model penyakit tipus yang sebelumnya dibentuk pada Mushayabasa (2012) dan Edward (2016).

### Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka. Studi pustaka adalah metode pengumpulan data dengan mencari informasi lewat buku, jurnal, dan literatur lainnya yang bertujuan untuk membentuk suatu landasan teori. Sumber literatur yang digunakan diperoleh dari artikel, jurnal, prosiding, dan buku yang berhubungan dengan penyakit tipus dan model matematika penyebaran penyakit.

Selanjutnya melakukan langkah-langkah untuk mencapai tujuan penelitian. Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut: (1) menentukan permasalahan dunia nyata yang akan dikaji, (2) membuat asumsi-asumsi yang digunakan untuk menyusun model, (3) membuat diagram transfer model penyebaran penyakit tipus dengan

*saturated incidence rate*, (4) menyusun model matematika penyebaran penyakit tipes yang berupa sistem persamaan diferensial nonlinear, (5) menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, (6) melakukan linearisasi sistem di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik dengan menggunakan matriks Jacobian, (7) membentuk persamaan karakteristik dari sistem di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, (8) menentukan nilai-nilai eigen yang merupakan akar persamaan karakteristik, (9) menentukan bilangan reproduksi dasar untuk kestabilan lokal titik ekuilibrium, (10) menganalisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, (11) melakukan simulasi model matematika penyebaran penyakit tipes dengan *saturated incidence rate* menggunakan software Matlab yang mana parameter-parameter diganti dengan angka-angka yang berasal dari data yang diperoleh dari berbagai sumber, dan (12) penarikan kesimpulan.

### Hasil dan Pembahasan

Pada penyusunan model penyebaran penyakit tipes dengan vaksinasi, pendidikan dan *saturated incidence rate* ini, populasi manusia

terdiri dari 5 sub populasi, yaitu rentan (*susceptible*), *carrier* (*exposed*), terinfeksi dengan gejala (*symptomatically infected*), sub populasi sembuh (*recovered*) dan sub populasi manusia yang telah diberi vaksin (*vaccinated*).

Asumsi yang digunakan dalam proses pemodelan penularan penyakit tipes yaitu:

1. Terdapat rekrutmen yang masuk ke sub populasi rentan dari populasi manusia.
2. Terdapat kematian alami pada setiap sub populasi manusia.
3. Manusia dapat terinfeksi bakteri *Salmonella typhi* dari mengkonsumsi makanan atau minuman yang terkontaminasi bakteri tersebut.
4. Manusia yang terinfeksi tipes tetapi tidak menimbulkan gejala (*carrier*), pada suatu waktu dapat menimbulkan gejala terinfeksi penyakit tipes.
5. Manusia yang terinfeksi tipes dengan gejala dapat sembuh jika diberi pengobatan. Pengobatan hanya diberikan pada manusia yang terinfeksi tipes dengan gejala.
6. Individu yang telah diberi vaksin atau sembuh setelah diberi perawatan, dapat kembali menjadi rentan lagi.

Variabel dan parameter yang digunakan dalam pemodelan ini dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2 berikut.

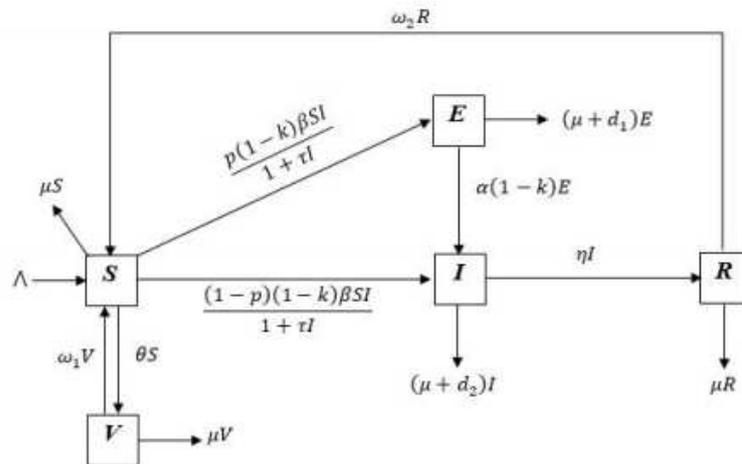
**Tabel 1.** Variabel dalam Pemodelan Matematika Penularan Penyakit Tipes

Variabel	Deskripsi	Satuan
$S(t)$	Sub populasi manusia yang rentan tertular tipes pada saat $t$	Individu
$V(t)$	Sub populasi manusia yang telah diberi vaksin tipes pada saat $t$	Individu
$E(t)$	Sub populasi manusia <i>carrier</i> pada saat $t$	Individu
$I(t)$	Sub populasi manusia yang terinfeksi tipes dengan gejala pada saat $t$	Individu
$R(t)$	Sub populasi manusia yang sudah sembuh dari penyakit tipes pada saat $t$	Individu

**Tabel 2.** Parameter dalam Simulasi Model Matematika Penularan Penyakit Tipes dan Nilainya

Parameter	Deskripsi	Nilai	Satuan
$\Lambda$	Laju rekrutmen dari populasi manusia ke sub populasi rentan ( <i>susceptible</i> )	$10^3$	ribu orang /tahun
$\omega_1$	Laju perpindahan sub populasi yang telah diberi vaksin kembali menjadi rentan	0,1	/tahun
$\omega_2$	Laju perpindahan sub populasi yang sembuh kembali menjadi rentan kembali	0,3	/tahun
$\eta$	Laju perpindahan sub populasi terinfeksi dengan gejala ke sub populasi sembuh	0,15	/tahun
$\theta$	Laju vaksinasi dari sub populasi rentan	0,02	/tahun
$\beta$	Laju interaksi sub populasi rentan dengan manusia terinfeksi (sub populasi <i>carrier</i> dan terinfeksi dengan gejala)	0, 02	/tahun
$p$	Proporsi dari individu yang rentan menjadi terinfeksi dengan gejala	0,5	-
$K$	Tingkat edukasi penyakit tipes	0,4	-
$\alpha$	Laju perpindahan dari sub populasi <i>carrier</i> ke sub populasi terinfeksi dengan gejala	0,04	/tahun
$\mu$	Laju kematian alami pada manusia	0,142	/tahun
$d_2$	Laju kematian karena penyakit tipes pada sub populasi <i>carrier</i>	0,01	/tahun
$d_2$	Laju kematian karena penyakit tipes pada sub populasi terinfeksi dengan gejala	0,012	/tahun
$\tau$	Faktor modifikasi	6	/tahun

Berdasarkan asumsi, variabel dan parameter di atas, maka dapat dibuat diagram transfer penularan penyakit tipes sebagai berikut.



Gambar 1. Diagram Transfer Model Penyebaran Penyakit Tipes SVEIRS dengan *Saturated Incidence Rate*

Berdasarkan Gambar 1, maka dapat dibuat model penularan penyakit tipes sebagai berikut.

1. Perubahan subpopulasi manusia rentan (*S*) terhadap waktu

Pertambahan banyaknya individu pada subpopulasi rentan *S* dipengaruhi oleh adanya rekrutmen sebesar  $\Lambda$ , rekrutmen dari subpopulasi yang telah diberi vaksin *V* menjadi rentan kembali *S* sebesar  $\omega_1 V$ , dan rekrutmen dari subpopulasi yang sembuh *R* menjadi rentan kembali *S* sebesar  $\omega_2 R$ . Pengurangan banyaknya individu pada subpopulasi rentan dipengaruhi oleh kematian alami sebesar  $\mu$ , vaksinasi sebesar  $\theta S$  dan banyaknya individu pada subpopulasi rentan yang terinfeksi penyakit tipes, baik menjadi *carrier E* maupun terinfeksi dengan gejala *I*.

Pada model ini, *saturated incident rate* yang digunakan adalah  $g(I) = \beta I(1 + \tau I)$  seperti yang digunakan dalam

(Mushayabasa, 2012) dimana  $\beta I$  menyatakan laju penularan penyakit tipes dan  $1/(1 + \tau I)$  menyatakan efek penghambatan penularan penyakit tipes yang disebabkan oleh adanya perubahan perilaku individu rentan terhadap penyakit tipes *S* yang lebih waspada ketika jumlah individu yang terinfeksi penyakit tipes dengan gejala *I* meningkat atau ketika suatu wilayah hampir semua individunya sudah terinfeksi penyakit tipes dengan gejala dan individu rentan semakin sedikit, maka sebagian besar individu yang terinfeksi dengan gejala tersebut tidak dapat menularkan penyakit tipes. Dalam model ini, parameter  $\tau$  menyatakan faktor modifikasi, dengan  $1/\tau$  merupakan batas maksimal penularan dari individu terinfeksi dengan gejala. Dilihat dari fungsi  $g(I) = \beta I(1 + \tau I)$ , ketika jumlah individu terinfeksi dengan gejala masih sedikit, fungsi  $g(I)$  akan mendekati  $g(I) = \beta I$  dan akan cenderung menuju ke

batas saturasi  $1/\tau$  ketika jumlah individu terinfeksi dengan gejala banyak.

Tingkat edukasi penyakit tipes ke masyarakat juga ikut menghambat penyebaran penyakit tipes. Tingkat edukasi dapat dilihat dari jumlah individu yang mengetahui penyakit tipes, baik penyebab, pencegahan, penularan, dan perawatannya. Pada model yang akan dibentuk, tingkat edukasi tentang penyakit tipes disimbolkan  $K$  dengan  $0 < K < 1$  yaitu suatu proporsi jumlah individu yang telah mendapat edukasi penyakit tipes dari jumlah individu seluruhnya dalam populasi. Ketika  $K = 0$  berarti edukasi tentang penyakit tipes sangat minim, sehingga subpopulasi manusia rentan  $S$  tidak tahu dan peduli terhadap penyakit tipes, sehingga penularan penyakit tipes sebesar  $\beta SI$ . Namun, jika  $K = 1$  berarti subpopulasi manusia rentan  $S$  sudah memiliki pengetahuan terhadap penyakit tipes, baik tentang penyebab, penyebaran maupun penanggulangannya.

2. Perubahan subpopulasi manusia *carrier* ( $E$ ) terhadap waktu

Pertambahan subpopulasi *carrier* dipengaruhi oleh infeksi bakteri *salmonella typhi* pada individu dalam subpopulasi rentan  $S$  namun tanpa gejala dengan peluang sebesar  $p$  yaitu  $p \frac{(1-K)\beta}{1+\tau I}$ . Pengurangan subpopulasi ini dipengaruhi oleh adanya kematian alami pada

subpopulasi ini sebesar  $\mu E$ , kematian karena penyakit tipes sebesar  $d_1 E$  dan ketika gejala penyakit tipes sudah mulai muncul sebesar  $\alpha(1-K)E$ .

3. Perubahan subpopulasi manusia terinfeksi dengan gejala (*symptomatically infected*) ( $I$ ) terhadap waktu

Pertambahan subpopulasi ini dipengaruhi oleh infeksi bakteri *salmonella typhi* pada individu dalam subpopulasi rentan  $S$  yang menunjukkan gejala dengan peluang sebesar  $1-p$  yaitu  $(1-p) \frac{(1-K)\beta SI}{1+\tau I}$  dan timbulnya gejala penyakit tipes pada individu dalam subpopulasi *carrier* sebesar  $\alpha(1-K)E$ . Pengurangan subpopulasi ini dipengaruhi oleh adanya kematian alami sebesar  $\mu I$ , kematian karena penyakit tipes sebesar  $d_1 I$  dan sembuh dari penyakit sebesar  $\eta I$ .

4. Perubahan subpopulasi manusia sembuh/*recovered* ( $R$ ) terhadap waktu

Pertambahan subpopulasi manusia sembuh dipengaruhi oleh laju penyembuhan dari subpopulasi terinfeksi dengan gejala sebesar  $\eta I$ . Pengurangan subpopulasi ini akibat adanya kematian alami sebesar  $\mu R$  dan adanya subpopulasi ini yang menjadi rentan kembali sebesar  $\omega_2 R$ .

5. Perubahan subpopulasi manusia yang telah diberi vaksin (*vaccinated*) ( $V$ ) terhadap waktu

Pertambahan subpopulasi ini dipengaruhi oleh banyaknya subpopulasi manusia rentan yang diberi vaksin yaitu  $\theta S$ . Pengurangan subpopulasi ini

dipengaruhi oleh kematian alami pada subpopulasi ini sebesar  $\mu V$  dan adanya individu dari subpopulasi ini yang menjadi rentan kembali sebesar  $\omega_1 V$ .

Dari uraian diatas, diperoleh model matematika penularan penyakit tipes yaitu.

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda + \omega_1 V(t) + \omega_2 R(t) - (\theta + \mu)S(t) - \frac{(1-K)\beta S(t)I(t)}{1+\tau I(t)} \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \theta S(t) - (\omega_1 + \mu)V(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= p \frac{(1-K)\beta S(t)I(t)}{1+\tau I(t)} - (\mu + d_1 + \alpha(1-K))E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (1-p) \frac{(1-K)\beta S(t)I(t)}{1+\tau I(t)} - (\eta + d_2 + \mu)I + \alpha(1-K)E(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \eta I(t) - (\omega_2 + \mu)R(t)\end{aligned}\quad (1)$$

dengan nilai awal  $S(t_0) = S_0 \geq 0$ ,  $V(t_0) = V_0 \geq 0$ ,  $E(t_0) = E_0 \geq 0$ ,  $I(t_0) = I_0 \geq 0$ ,  $R(t_0) = R_0 \geq 0$  untuk  $t > 0$ .

Semua parameter  $p$ ,  $\Lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\tau$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\mu$ , dan  $K$  diasumsikan bernilai positif karena berkaitan dengan jumlah populasi manusia.

Titik E (S, E, I, R, V) merupakan titik ekuilibrium jika memenuhi persamaan  $\frac{dS}{dt} = 0$ ,  $\frac{dV}{dt} = 0$ ,  $\frac{dI}{dt} = 0$ ,  $\frac{dE}{dt} = 0$  dan  $\frac{dR}{dt} = 0$ . Titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh ketika sub populasi *carrier* (E) dan sub populasi terinfeksi dengan gejala (I) tidak ada, sehingga sub populasi sembuh dari penyakit (R) juga tidak ada, dengan kata lain  $E = 0$ ,  $I = 0$ , dan  $R = 0$ .

Titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  dari sistem (1) adalah

$$E_1(S_1, V_1, E_1, I_1, R_1) = \left( \frac{\Lambda(\omega_1 + \mu)}{\mu^2 + \mu(\omega_1 + \theta)}, \frac{\theta\Lambda}{\mu^2 + \mu(\omega_1 + \theta)}, 0, 0, 0 \right) \quad (2)$$

Titik ekuilibrium endemik diperoleh ketika  $S \neq 0$ ,  $V \neq 0$ ,  $E \neq 0$ ,  $I \neq 0$ ,

dan  $R \neq 0$ . Titik ekuilibrium endemik dari sistem (1) yaitu  $E_2(S_2, V_2, E_2, I_2, R_2)$ , dengan

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{S_1(1 + \tau b)}{\mathfrak{R}_0}, \\ V_2 &= \frac{S_1\theta(1 + \tau b)}{\mathfrak{R}_0(\mu + \omega_1)}, \\ E_2 &= \frac{p(1-K)\beta S_1}{\mathfrak{R}_0(\mu + d_1 + \alpha(1-K))}, \\ I_2 &= b, \\ R_2 &= \frac{\eta b}{\omega_2 + \mu}\end{aligned}$$

dan

$$b = \frac{b_{01}b_{02} + b_{03}}{b_{04}b_{02} - b_{05} + b_{06}}$$

dengan

$$\begin{aligned}b_{01} &= (\Lambda\mathfrak{R}_0 - S_1(\theta + \mu)) \\ b_{02} &= (\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu) \\ b_{03} &= S_1\omega_1(\omega_2 + \mu) \\ b_{04} &= (S_1\tau(\theta + \mu) + (1 + K)\beta S_1) \\ b_{05} &= S_1\omega_1\theta\tau(\omega_2 + \mu) \\ b_{06} &= \mathfrak{R}_0\omega_2\eta(\omega_1 + \mu)\end{aligned}$$

Murray (1993) mendefinisikan bilangan reproduksi dasar sebagai jumlah infeksi sekunder yang terjadi karena satu infeksi primer pada populasi yang seluruhnya rentan. Semakin besar ( $\mathfrak{R}_0$ ) berarti penyakit semakin mudah menular.

Bilangan reproduksi dasar  $\mathfrak{R}_0$  dari sistem (1) dicari menggunakan *next-generation matrix* seperti yang dijelaskan oleh Castillo-Chaves dan Brauer (2010). Diperoleh bilangan reproduksi dasar  $\mathfrak{R}_0$  dari sistem (1) sebagai berikut.

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{p(1-K)^2\beta S_1\alpha}{(\mu + d_1 + \alpha(1-K))(\eta + \mu + d_2)} + \frac{(1-p)(1-K)\beta S_1}{\eta + \mu + d_2}$$

**Lemma 2.1.** *Diberikan sistem (1) dengan titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  seperti pada (2) dan bilangan reproduksi dasar  $\mathfrak{R}_0$  seperti pada (4).*

1. Jika  $\mathfrak{R}_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  stabil asimtotik lokal
2. Jika  $\mathfrak{R}_0 > 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  tidak stabil.

Bukti: Bagian 1

Untuk membuktikan bagian ini, akan dicari syarat agar nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (1) pada titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  bernilai negatif,

kemudian akan dikaitkan dengan kondisi ketika  $R_0 < 1$ . Dari sistem (1), misalkan  $f_1 = \frac{dS}{dt}, f_2 = \frac{dE}{dt}, f_3 = \frac{dI}{dt}, f_4 = \frac{dR}{dt}$ , dan  $f_5 = \frac{dV}{dt}$ . Matriks Jacobiannya  $Df(E_1)$

adalah sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -(\theta + \mu) & \omega_1 & 0 & 0 & \omega_2 \\ \theta & -(\omega_1 + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & pa_3 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha(1-K)) & (1-p)a_3 - a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & -(\omega_2 + \mu) \end{bmatrix}$$

dengan  $a_1 = \alpha(1-K) + \eta + d_1$ ,  $a_2 = \eta + \mu + d_2$ , dan  $a_3 = (1-K)\beta S_1$ .

Nilai eigen dari matriks  $Df(E_1)$  diperoleh dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik dari  $\det(\lambda I - Df(E_1)) = 0$  (Anton, 2005), sehingga diperoleh

$$\lambda + \mu = 0, \lambda + \theta + \omega_1 + \mu = 0, \lambda + \omega_2 + \mu = 0, \text{ atau } \lambda^2 + (a_1 + a_2 - (1-p)a_3)\lambda + a_1a_2 - (1-p)a_1a_3 - \alpha(1-K)pa_3 = 0.$$

Diperoleh  $\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -\theta - \omega_1 - \mu, \lambda_3 = -\omega_2 - \mu$  dan dua nilai eigen yang lain  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  belum bisa ditentukan. Misalkan polinomial

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (a_1 + a_2 - (1-p)a_3)\lambda + a_1a_2 - (1-p)a_1a_3 - \alpha(1-K)pa_3.$$

Untuk mengetahui positif atau negatifnya bagian real nilai eigen  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  dapat disusun Tabel Routh yang berisi koefisien-koefisien polinomial (Wiggins, 2000). Tabel Routh dari polinomial tersebut sebagai berikut.

**Tabel 3.** Tabel Routh

1	$a_1a_2 - (1-p)a_1a_3 - \alpha(1-K)pa_3$
$a_1 + a_2 - (1-p)a_3$	0
$a_1a_2 - (1-p)a_1a_3 - \alpha(1-K)pa_3$	

Bagian real akar-akar polinomial  $P(\lambda)$  akan bernilai negatif jika dan hanya jika semua elemen pada kolom pertama Tabel 3 tidak berganti tanda dan tidak nol. Elemen pertama kolom pertama bernilai  $1 > 0$ , sehingga syarat yang harus dipenuhi adalah  $a_1 + a_2 - (1 - p)a_3 > 0$  dan

$$a_1 a_2 - (1 - p)a_1 a_3 - \alpha(1 - K)pa_3 > 0.$$

Bagian real nilai eigen  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  akan bernilai negatif apabila berlaku dua syarat  $a_1 + a_2 > (1 - p)a_3$

dan

$$a_1 a_2 > (1 - p)a_1 a_3 - \alpha(1 - K)pa_3$$

Diperhatikan bahwa

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{p(1 - K)^2 \beta S_1 \alpha}{(\mu + d_1 + \alpha(1 - K))(\eta + \mu + d_2)} + \frac{(1 - p)(1 - K)\beta S_1}{\eta + \mu + d_2}$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $a_1$ ,  $a_2$ , dan  $a_3$ , maka

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{p\alpha(1 - K)a_3}{a_1 a_2} + \frac{(1 - p)a_3}{a_2}$$

Jika  $\mathfrak{R}_0 < 1$  yaitu  $\frac{p\alpha(1 - K)a_3}{a_1 a_2} + \frac{(1 - p)a_3}{a_2} < 1$ ,

maka  $\frac{p\alpha(1 - K)a_3}{a_1 a_2} < 1$  dan  $\frac{(1 - p)a_3}{a_2} < 1$ .

Dari pertidaksamaan tersebut diketahui bahwa  $\frac{(1 - p)a_3}{a_2} < 1$  sehingga diperoleh

$a_2 > (1 - p)a_3$  dan karena  $a_1 > 0$  maka  $a_1 + a_2 > (1 - p)a_3$ .

Selanjutnya nilai  $\mathfrak{R}_0 = \frac{p\alpha(1 - K)a_3}{a_1 a_2} +$

$\frac{(1 - p)a_3}{a_2} < 1$  juga dapat dituliskan sebagai

$\frac{p\alpha(1 - K)a_3 + (1 - p)a_1 a_3}{a_1 a_2} < 1$  mengakibatkan

$$a_1 a_2 > p\alpha(1 - K)a_3 + (1 - p)a_1 a_3$$

Jadi ketika  $\mathfrak{R}_0 < 1$  akan berlaku

$$a_1 + a_2 > (1 - p)a_3 \text{ dan}$$

$$a_1 a_2 > p\alpha(1 - K)a_3 + (1 - p)a_1 a_3.$$

Ini tidak lain adalah kedua syarat agar kedua akar-akar polinomial  $P(\lambda)$  memiliki bagian real negatif atau syarat agar kedua nilai eigen  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  memiliki bagian real negatif. Lebih lanjut, karena kedua nilai eigen  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  memiliki bagian real yang negatif, maka semua nilai eigen dari matriks jacobian sistem (1) pada titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  bernilai negatif, sehingga titik ekuilibrium  $E_1$  stabil asimtotik lokal.

Dengan demikian, terbukti poin 1 yaitu Jika  $\mathfrak{R}_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  stabil asimtotik lokal.

Bagian 2

Diperhatikan kembali bahwa

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{p\alpha(1 - K)a_3}{a_1 a_2} + \frac{(1 - p)a_3}{a_2}$$

Jika  $\mathfrak{R}_0 > 1$  yaitu

$\frac{p\alpha(1 - K)a_3}{a_1 a_2} + \frac{(1 - p)a_3}{a_2} > 1$ , juga dapat

ditulis sebagai  $\frac{p\alpha(1 - K)a_3 + (1 - p)a_1 a_3}{a_1 a_2} > 1$ ,

maka berlaku

$$a_1 a_2 > p\alpha(1 - K)a_3 + (1 - p)a_1 a_3$$

Jika hal ini terjadi, maka akan ada pergantian tanda pada kolom pertama Tabel Routh (3) yang mengakibatkan akan ada akar polinomial  $P(\lambda)$  yang memiliki bagian real positif. Dengan kata lain, setidaknya salah satu dari nilai eigen  $\lambda_4$

atau  $\lambda_5$  memiliki bagian real yang bernilai positif, sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  dari sistem (1) tidak stabil.

Selanjutnya, menggunakan teorema kestabilan global (Castillo, Feng, Huang: 2002), titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  stabil asimtotik global jika  $\mathfrak{R}_0 < 1$  dan  $S > S_1(1 + \tau I)$ . Titik Ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  stabil global jika nilai awal diambil pada

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \left\{ (S, E, I, R, V) \in \mathbb{R}_+^5 : N \right. \\ \left. = S + E + I + R + V \right. \\ \left. \leq \frac{\Lambda}{\mu} \wedge S < S_1(1 + \tau I) \right\} \end{aligned}$$

Untuk menduga pengaruh bilangan reproduksi dasar ( $\mathfrak{R}_0$ ) terhadap kestabilan titik ekuilibrium endemik  $E_2$  maka dikonstruksi lemma 2.2 sebagai berikut.

**Lemma 2.2.** *Diberikan sistem (1) dengan titik ekuilibrium endemik  $E_2$  seperti pada (3) dan bilangan reproduksi dasar  $\mathfrak{R}_0$  seperti pada (4). Jika  $\mathfrak{R}_0 > 1$  maka titik ekuilibrium endemik  $E_2$  stabil asimtotik lokal.*

Pembuktian secara analitik masih terlalu kompleks sehingga dilakukan simulasi numerik sistem 1 di sekitar titik ekuilibrium dengan bantuan perangkat lunak *Matlab*. Simulasi numerik model penularan penyakit tipes dengan *saturated incidence rate* dibedakan dalam dua kasus yaitu kasus ketika  $\mathfrak{R}_0 < 1$  dan  $\mathfrak{R}_0 > 1$ . Simulasi dilakukan dengan mengambil

nilai awal di sekitar titik ekuilibrium dari sistem (1) dengan menggunakan parameter pada tabel (2) dari Edward (2016).

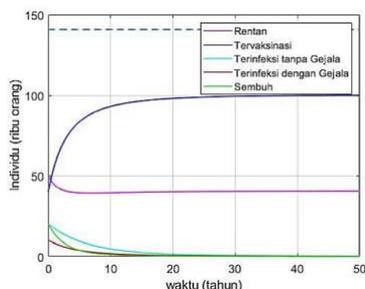
### Kasus $\mathfrak{R}_0 < 1$

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 2, dengan laju rekrutmennya ( $\Lambda$ ) diubah menjadi 20 ribu orang per tahun diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu  $E_1 = (40.48, 100.36, 0, 0, 0)$ , dengan bilangan reproduksi dasar  $\mathfrak{R}_0 = 0.9079$ . Dalam simulasi ini juga akan ditunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  stabil global jika nilai awal diambil pada daerah  $\Omega_1$ , yang memenuhi

$$\begin{aligned} S + E + I + R + V \leq 140, 845 \text{ dan} \\ S < 40, 48(1 + 0, 6I) \end{aligned}$$

Kemudian akan dilakukan simulasi numerik berdasarkan parameter pada Tabel 2 untuk melihat kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit pada diagram trayektori.

Berdasarkan nilai awal dan parameter pada tabel 2, maka dapat dibuat trayektori dengan bantuan perangkat lunak *Matlab* dari model matematika penularan penyakit tipes dengan dan tanpa *saturated incidence rate* sebagai berikut dengan nilai awal (dalam ribuan) adalah  $x_{20}(S_{20}, V_{20}, E_{20}, I_{20}, R_{20}) = (50, 40, 20, 10, 20)$ .



Gambar 2. Trayektori Model Matematika Penyebaran Penyakit Tipes dengan *Saturated Incidence Rate* Kasus  $\mathcal{R}_0 < 1$

Dari Gambar 2 dapat dilihat bahwa sekitar 3 tahun pertama jumlah individu yang tervaksin meningkat sehingga menurunkan jumlah individu pada subpopulasi rentan dengan sangat pesat, akibatnya jumlah individu terinfeksi juga ikut berpengaruh menurun dan menuju nol dalam kurun waktu sekitar 13 tahun. Ketika jumlah populasi terinfeksi menurun, maka subpopulasi sembuh juga merasakan dampaknya. Ketika subpopulasi terinfeksi menuju nol, maka sudah tidak akan ada yang sembuh lagi. Akhirnya semua akan menuju titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$ . Ketika bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0 < 1$ , jumlah individu yang terinfeksi, baik dengan gejala maupun tidak, lama kelamaan akan menurun dan tidak tersisa yang berarti penyebaran penyakit tipes akan hilang.

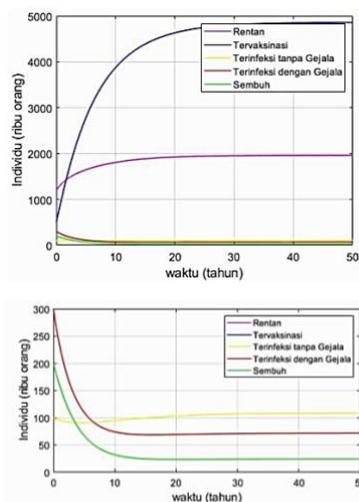
### Kasus $\mathcal{R}_0 > 1$

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 2 diperoleh titik ekuilibrium endemiknya (dalam juta) yaitu  $E_2 = (1.9597, 4.8590, 0.1135, 0.0732, 0.0248)$ ,

dengan 8 bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0 = 45, 395$ . Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik berdasarkan parameter pada Tabel 2 untuk melihat kestabilan titik ekuilibrium endemik pada diagram trayektori.

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 2 diperoleh titik ekuilibrium endemiknya (dalam ribuan) yaitu  $E_2 = (1.9597, 4.8590, 0.1135, 0.0732, 0.0248)$ , dengan bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0 = 45, 395$ . Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik berdasarkan parameter pada Tabel 2 untuk melihat kestabilan titik ekuilibrium endemik pada diagram trayektori.

Berdasarkan nilai awal dan parameter pada tabel 2, maka dapat dibuat trayektori dengan bantuan perangkat lunak Matlab dari Model matematika penularan penyakit tipes dengan *saturated incidence rate* sebagai berikut.

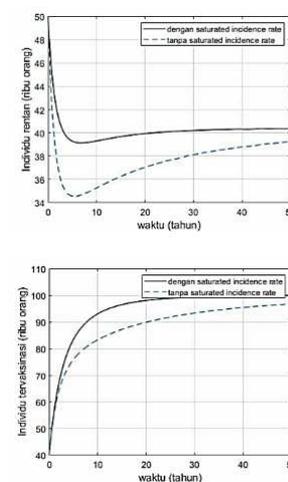


Gambar 3. Trayektori Model Matematika Penyebaran Penyakit Tipes dengan *Saturated Incidence Rate* Kasus  $\mathcal{R}_0 > 1$

Pada Diagram Trayektori 3, gambar yang bawah merupakan diagram trayektori gambar yang atas dengan sumbu vertikalnya diambil dari 0 sampai 300 ribu orang. Dari Diagram trayektori 3 dapat dilihat bahwa pada awalnya jumlah individu yang rentan dan tervaksin meningkat pesat sampai pada sekitar 20 tahun lebih, jumlah individu yang tervaksin meningkat melampaui jumlah individu yang rentan dan terus meningkat pesat. Akibatnya jumlah individu yang terinfeksi juga ikut berpengaruh menurun namun tidak sampai menuju nol. Ketika jumlah individu yang terinfeksi menurun, maka jumlah individu yang sembuh juga merasakan dampaknya namun tidak sampai menuju nol. Akhirnya semua akan menuju titik ekulibrium endemik  $E_2$ . Hal ini menunjukkan bahwa ketika bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0 > 1$ , yaitu tiap individu yang terinfeksi penyakit tipes ternyata dapat menularkan penyakit tipes tersebut kepada lebih dari satu orang, maka untuk jangka waktu yang lama penyakit tipes tersebut tidak akan pernah hilang dari populasi manusia.

Selanjutnya akan ditampilkan simulasi model matematika penyebaran penyakit tipes dengan *saturated incidence rate* dan tanpa *saturated incidence rate* untuk kasus  $\mathcal{R}_0 < 1$ . Ketika  $\mathcal{R}_0 > 1$  sudah pasti memiliki perbedaan sebab titik ekulibrium yang dihasilkan juga berbeda,

sehingga hanya akan dilakukan penyelidikan pada kasus sebaliknya, meski akan menuju ke titik yang sama, kemungkinan dinamika yang terjadi sebelumnya akan berbeda berkat adanya *saturated incidence rate*. Nilai parameter yang digunakan adalah 9 yang tercantum pada tabel 2 kecuali  $\Lambda = 20$  dengan nilai awal  $x_3(S_3, V_3, E_3, I_3, R_3) = (50, 40, 20, 10, 20)$ .

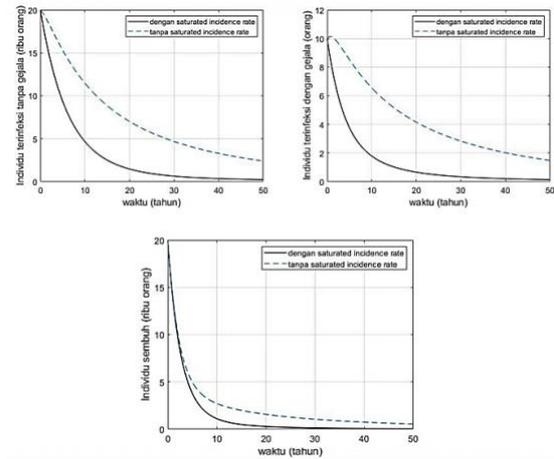


Gambar 4. Diagram Trayektori Individu Rentan dan Tervaksinasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Tipes dengan dan tanpa *Saturated Incidence Rate* Kasus  $\mathcal{R}_0 < 1$

Pada Diagram Trayektori 4, dapat dilihat perbedaan perilaku trayektori sebelum menuju ke titik ekuilibriumnya walaupun pada akhirnya akan menuju ke titik yang sama. Jumlah individu pada subpopulasi yang tidak terinfeksi seperti subpopulasi rentan ( $S$ ) dan tervaksinasi ( $V$ ), ketika tidak ada *saturated incidence rate* selalu lebih sedikit daripada ketika *saturated incidence rate* ada. Perilaku trayektori subpopulasi rentan ( $S$ ) ketika

ada *saturated incidence rate* turun dengan tajam pada tahun-tahun pertama, namun tidak setajam ketika tidak ada *saturated incidence rate* yang hampir menuju nol. Setelah itu, setelah sekitar 5 tahun baru jumlah individu pada subpopulasi rentan ini mulai naik dan menuju angka sekitar 40 ribu orang.

Keadaan sebaliknya terjadi pada jumlah individu sub populasi terinfeksi (V) yang pada tahun-tahun pertama malah meningkat pesat dan mulai tahun ke-5 tidak terlalu tajam kenaikannya dan menuju keangka sekitar 100 ribu orang. Hal ini dapat diinterpretasikan sebagai upaya vaksinasi pada individu rentan yang sangat masif dilakukan pada 5 tahun pertama yang menyebabkan kebanyakan individu yang rentan sudah terinfeksi, kemudian upaya vaksinasi tersebut mulai dikurangi setelah 5 tahun berjalan. Dalam kurun waktu sekitar 30 tahun, kedua subpopulasi tersebut jumlah individu di dalamnya akan stabil asimtotik menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit.



Gambar 5. Diagram Trayektori Individu Terinfeksi tanpa Gejala, Terinfeksi dengan Gejala dan Sembuh Model Matematika Penyebaran Penyakit Tipes dengan dan tanpa *Saturated Incidence Rate* Kasus  $\mathcal{R}_0 < 1$

Dari Diagram Trayektori 5 dapat dilihat dinamika jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi baik tanpa gejala maupun dengan gejala akan menuju ke nol dalam kurun waktu sekitar 50 tahun serta pada subpopulasi sembuh akan menuju nol dalam waktu sekitar 30 tahun. Perilaku trayektori dari jumlah individu pada tiga sub populasi ini ketika ada *saturated incidence rate* selalu lebih sedikit dibandingkan dengan tanpa adanya saturaten incidence rate. Ini artinya hambatanpenyebaran penyakit tipes ketika ada *saturated incidence rate* lebih besar dibantingan dengan ketika *saturated incidence rate* tidak ada, walaupun pada akhirnya penyakit itu akan hilang dalam masyarakat.

Berdasarkan diagram trayektori dan uraian di atas, maka dapat

disimpulkan bawa keberadaan *saturated incidence rate* berpengaruh terhadap dinamika sub populasi sebelum menuju ke titik ekuilibrium. Ada perbedaan perilaku pada saat  $\mathcal{R}_0 < 1$  walaupun pada akhirnya akan menuju titik ekuilibrium bebas penyakit yang sama yaitu  $E_1$ , apalagi ketika  $\mathcal{R}_0 > 1$  dimana titik ekuilibrium yang dituju berbeda periakunya akan berbeda.

### Kesimpulan

Tingkat penyebaran penyakit tipus akan lebih lambat jika diasumsikan ada efek hambatan *saturated incidence rate*. Terdapat dua titik ekuilibrium dari model yang diperoleh yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  dan titik ekuilibrium endemik  $E_2$ . Ketika bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0 < 1$  maka jumlah manusia yang terinfeksi penyakit tipus lambat laun akan menghilang dan sebaliknya jika bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0 > 1$  maka jumlah penderita penyakit tipus tetap akan ada dan penyebaran penyakit akan terus berlangsung.

Pada penelitian ini analisis kestabilan global titik ekuilibrium endemik belum dilakukan namun diduga stabil asimtotik global sesuai hasil simulasi numeriknya. Asumsi kontak yang dilakukan manusia dengan manusia padahal ada peran bakteri yang sangat berpengaruh, dengan ditambahkan

beberapa kompartemen bakteri akan menyebabkan model lebih kompleks dan lebih mendekati realita.

### Pustaka

- Anton, H., Rorres, C., 2005, *Elementary Linear Algebra 9th Edition*, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Castillo-Chaves, C., Feng., Huang, W. 2002, *On the Computation of  $R_0$  and its Role on Global Stability, Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging*, New York: Springer.
- Castillo-Chaves, C., dan Brauer, F., 2010, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, New York: Springer.
- Deris, Z., dkk., 2010, "Relapse of Typhoid Fever in North-eastern state in Malaysia", *Asian Tropical Medicine Journal* (Elsevier), pp 48-50.
- Edward, S., Nkuba, N., 2016, "Modelling Typhoid Fever with Education, Vaccination and Treatment", *Engineering Mathematics Vol. 1*, No. 1, pp. 44-52.
- Murray, J.D., 1993, *Mathematical Biology*, Berlin: Springer-Verlag.
- Mushayabasa, S., 2012, "A Simple Epidemiological Model for Typhoid with Saturated Incidence Rate and Treatment Effect", *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, Vol:6, No:6.
- Sorrell, T. et al., 2015, "Typhoid Fever cases in the U. S. Military", *BMC Infectious Disease*, pp 15:424.
- Wiggin, S., 2000, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos 2th*, New York: Springer.
- WHO, 2003, "Background document: The diagnosis, treatment and prevention of typhoid fever",

tersedia  
[http://www.who.int/rpc/TFGuide  
WHO.pdf](http://www.who.int/rpc/TFGuideWHO.pdf) diakses tanggal 14  
Maret 2018.