

**DIMENSI METRIK HASIL OPERASI KORONA ANTARA GRAF LINTASAN  
DENGAN GRAF LENGKAP ( $p_n \odot k_m$ ) DAN GRAF SIKEL DENGAN GRAF  
LINTASAN ( $C_n \odot mP_2$ )**

*Petrus Fendiyanto*

Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mulawarman

Email: *petrus@fkip.unmul.ac.id*

**ABSTRAK**

Graf merupakan suatu  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan simpul dan  $E$  adalah himpunan *edge*, yaitu pasangan simpul dari  $V$ . Jika  $G$  adalah graf terhubung, jarak antara dua simpul  $u$  dan  $v$  di  $G$  dinotasikan dengan  $d(u, v)$  adalah panjang lintasan terpendek di antara keduanya. Untuk himpunan terurut  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  dari simpul-simpul dalam graf terhubung  $G$  dan simpul  $v$  pada  $V(G)$ , representasi dari  $v$  terhadap  $W$  dinotasikan  $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$  untuk setiap simpul  $v$  pada  $V(G)$  berbeda, maka  $W$  disebut himpunan *resolving* dari  $V(G)$ . Jika  $r(v|W)$  untuk setiap simpul  $v \in V(G)$  berbeda, maka  $W$  disebut himpunan pembeda dari  $V(G)$ . Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari  $G$  dinotasikan  $\dim(G)$ . Operasi korona pada dua buah graf  $G$  dan  $H$ , dinotasikan dengan  $G \odot H$ , didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari salinan  $p$ -simpul graf  $G$  untuk setiap simpul di  $H$ . Jika  $G$  adalah graf hasil  $(p_n \odot k_m)$ , maka  $\dim(G) = n(m - 1)$  dan jika  $G$  adalah graf hasil  $(C_n \odot mP_2)$ , maka  $\dim(G) = nm$ .

**Kata kunci:** Dimensi Metrik, *Resolving Set*, Operasi Korona

**ABSTRACT**

A graph is an  $(V, E)$  with  $V$  to set of vertices and  $E$  to set of edges, a pair of vertices of  $V$ . If  $G$  is a connected graph, the distance between two vertices  $u$  and  $v$  in  $G$  denoted by  $d(u, v)$ . It is shortest path length between  $u$  and  $v$ . The order set  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  of vertices in the graph connected  $G$  and vertices  $v$  on  $V(G)$ , the representation of  $v$  with  $W$  denoted  $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$  for each node  $v$  on  $V(G)$  of different, then resolving set of  $V(G)$ . If  $r(v|W)$  for each node  $v \in V(G)$  different then the distinguishing set of  $V(G)$ . The set of distinguishing minimum cardinalities called the minimum distinguishing set (metric basis), and the cardinality of the metric base called the metric dimension of  $G$  denoted  $\dim(G)$ . Corona operation on two graph  $G$  and  $H$ , denoted  $G \odot H$ , are defined as graph obtained from copie of the  $p$ -node graph  $G$  for each node in  $H$ . If  $G$  of the result graph  $(p_n \odot k_m)$  then  $\dim(G) = n(m - 1)$  and  $G$  of the result graph  $(C_n \odot mP_2)$  then  $\dim(G) = nm$ .

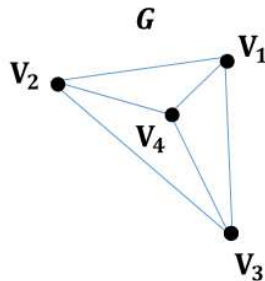
**Keywords:** Metrik Dimension, Resolving Set, Corona Operation

## PENDAHULUAN

Dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1966, kajian tentang dimensi metrik menjadi sebuah *complete problem*, artinya tidak mudah untuk mendapatkan dimensi metrik dari suatu graf bentuk tertentu. Oleh karenanya, untuk mendapatkan dimensi metrik bentuk graf tertentu ataupun kelas tertentu dilakukan analisis dari subkelas terlebih dahulu agar lebih mudah mencari dimensi metrik dari graf secara umum. Untuk simpul  $u$  dan  $v$  dalam graf terhubung  $G$ , jarak  $d(u, v)$  adalah panjang lintasan terpendek antara  $u$  dan  $v$  pada  $G$ . Untuk himpunan terurut  $W = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_k)$  dari simpul-simpul dalam graf terhubung  $G$  dan simpul  $v$  pada  $G$ , adalah vektor- $k$  (pasangan  $k$ -tuple),  $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), d(v, w_3), \dots, d(v, w_k))$  menunjukkan representasi dari  $v$  pada  $W$ . Himpunan  $W$  dinamakan himpunan pembeda (*resolving set*)  $G$  jika simpul-simpul  $G$  mempunyai representasi berbeda. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda disebut dimensi metrik dari  $G$  dan dinotasikan dengan  $\dim(G)$ .

Pada tahun 2009, Johanes melakukan penelitian tentang dimensi metrik dari pengembangan graf kincir dengan pola  $k_1 + mk_n$ . Dari analisis yang telah dilakukan diperoleh  $\dim(G) = m(n-1)$  dengan  $n \geq 3$  dan  $m \geq 2$ . Selanjutnya, pada tahun 2011 Hindayani mengembangkannya dan mengkaji penelitian pada graf  $k_r + mk_s$ , dengan  $m, r, s \in \mathbb{N}$  diperoleh  $\dim(G) = m + (r - 2)$  untuk  $m \geq 2, s = 1$  dan  $\dim(G) = (s - 1)m + (r - 1)$  untuk  $m, s \geq 2$ . Sedangkan Septiana dan Budi mengkaji penelitian dimensi metrik pada graf lintasan, graf lengkap, graf sikel, graf bintang, dan graf bipartite lengkap pada tahun 2013. Dari analisis yang telah dilakukan diperoleh dimensi metrik  $G$  adalah 1 jika dan hanya jika  $G$  graf lintasan, graf lengkap  $K_n$  dengan  $n$  titik dan  $n \geq 2$  maka  $\dim(K_n) = n - 1$ , graf sikel  $C_n$  dengan  $n$  titik dan  $n \geq 3$  maka  $\dim(C_n) = 2$ , graf bintang  $K_{1, n-1}$  dengan  $n$  titik dan  $n \geq 3$  maka  $\dim(K_{1, n-1}) = n - 1$ , dan dimensi metrik  $G = K_{s, t}, G = K_s + \overline{K}_t$  dan  $G = K_s + (K_1 \cup K_t)$  adalah  $n - 2$ .

Dipilih dua simpul yaitu  $W_2 = \{v_1, v_2\}$  sebagai himpunan pembeda, maka representasi setiap simpul pada  $G$  terhadap  $W_2$  adalah  $r(v_1|W_2) = (0, 1), r(v_2|W_2) = (1, 0)$ ,



**Gambar 1.** Graf lengkap  $K_4$

$r(v_3|W_2) = (1, 1)$ ,  $r(v_4|W_2) = (1, 1)$ . Karena ada  $v_3, v_4$  dan  $v_3 \neq v_4$  tetapi  $r(v_3|W_2) = (1, 1) = (v_4|W_2)$  maka  $W$  dengan kardina-litas 2 bukan himpunan pembeda sehingga  $\dim(G) \neq 2$ . Dipilih  $W_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$  maka representasi setiap simpul pada  $G$  terhadap  $W_3$  adalah  $r(v_1, W_3) = (0, 1, 1)$ ,  $r(v_2, W_3) = (1, 0, 1)$ ,  $r(v_3, W_3) = (1, 1, 0)$ ,  $r(v_4, W_3) = (1, 1, 1)$ . Karena setiap  $u, v \in V(G)$ ,  $u \neq v$  dan  $r(u|W_3) \neq r(v|W_3)$  maka  $W$  dengan kardinalitas 3 adalah himpunan pembeda. Kemudian dipilih  $W_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  maka representasi setiap simpul pada  $G$  terhadap  $W_4$  adalah  $r(v_1|W_4) = (0, 1, 1, 1)$ ,  $r(v_2|W_4) = (1, 0, 1, 1)$ ,  $r(v_3|W_4) = (1, 1, 0, 1)$ ,  $r(v_4|W_4) =$

Operasi graf korona yaitu apabila diberikan graf  $G$  dan  $H$ . Graf  $G$  mempunyai  $n$  buah simpul, maka korona didefinisikan sebagai graf dengan

$$V(G \circ H) = V(G) \cup \bigcup_{i \in G} V(H_i)$$

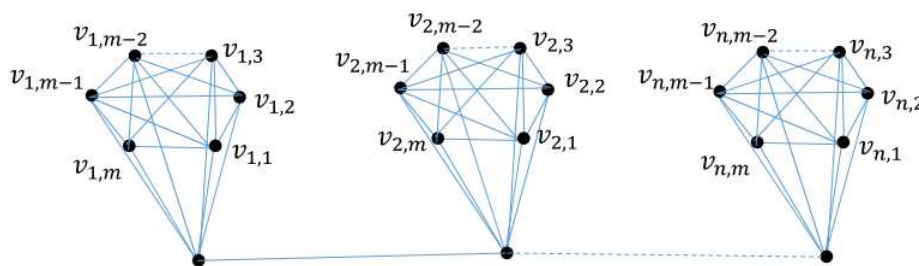
$$(G \circ H) = E(G) \cup \bigcup_{i \in G} (E(H_i) \cup \{i u_i | u_i \in v(H_i)\})$$

dengan  $H_i \cong H$  untuk semua  $i \in v(G)$ .

### HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

#### A. Dimensi Metrik Pada Hasil Korona Graf Lintasan Dan Graf Lengkap ( $P_n \odot K_m$ )

Untuk membedakan dua graf hasil



Gambar 2. Graf  $P_n \odot K_m$

$(1, 1, 1, 0)$ . Karena setiap  $u, v \in V(G)$ ,  $u \neq v$  dan  $r(u|W_4) \neq r(v|W_4)$  maka  $W$  dengan kardinalitas 4 adalah himpunan pembeda. Sesuai dengan definisi dimensi metrik yaitu kardinalitas minimum dari himpunan pembeda, sehingga diperoleh kardinalitas 3 dan 4 maka  $\dim(G) = 3$ .

korona, graf lintasan disebut sebagai graf  $P_n$  dengan himpunan simpul  $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  dan graf lengkap disebut  $K_m$  dengan himpunan simpul  $V(K_m) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ . Gambar 2 merupakan bentuk umum dari graf  $P_n \odot K_m$ . Dari konstruksi yang telah dilakukan diperoleh pola (tabel 1).

Tabel 1. Pola bilangan dimensi metrik graf  $P_n \odot K_m$

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	...	$K_m$
$P_1$	1	2	3	4	5	...	$m$
$P_2$	1	2	4	6	8	...	$2m - 2$
$P_3$	2	3	6	9	12	...	$3m - 3$
$P_4$	2	4	8	12	16	...	$4m - 4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_n$	2	$n$	$2n$	$3n$	$4n$	...	$mn - n$

Berdasarkan dari kontruksi dimensi metrik graf  $P_n \odot K_m$  dan menganalisa karakteristik graf hasil korona dari graf lengkap, diperoleh kesimpulan pada teorema di bawah ini.

**Teorema 1**

Misalkan  $P_n$  adalah graf lintasan order  $n$  dan  $K_m$  graf lengkap order  $m$  maka

$$\dim(P_n \odot K_m) = n(m - 1)$$

dengan  $n \geq 2, m \geq 2$

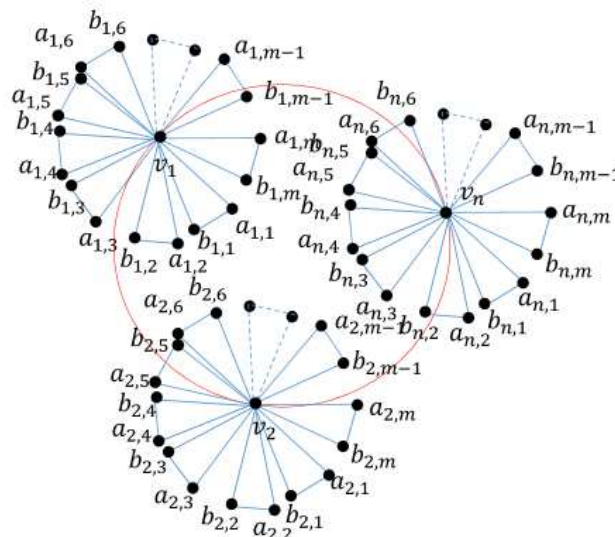
**Bukti:**

Himpunan simpul dalam graf korona korona  $P_n \odot K_m$  adalah  $V(P_n \odot K_m) = V(P_n) \cup \cup_{i \in V(P_n)} V(K_m)$ . Untuk membedakan dua graf hasil operasi korona, graf lintasan disebut graf  $P_n$ , dengan himpunan simpul  $V(P_n) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$  dan graf lengkap disebut sebagai graf  $K_m$ , dengan himpunan simpul  $V(K_m) = \{v_{1,i}, v_{2,i}, v_{3,i}, \dots, v_{m,i}\}$ . Sehingga notasi hasil operasi korona kedua graf yaitu  $V(P_n \odot K_m) = \{u_i \cup \{v_{1,i}, v_{2,i}, v_{3,i}, \dots, v_{m,i}\}\}$  dengan  $1 \leq i \leq n$ . Jika untuk setiap simpul  $v_a, v_b \in K_m$  dengan simpul  $u_i \in P_n$  maka diketahui bahwa  $d(v_a, v_i) = d(v_b, v_i) = 1$ . Sehingga

himpunan pembeda merupakan simpul-simpul dari graf lengkap  $K_m$ , untuk itu diperlukan sebanyak  $m - 1$  simpul sebagai himpunan pembeda. Terdapat sejumlah  $n$  subgraf  $K_{m,i}$  dalam graf  $P_n \odot K_m$  maka kardinalitas minimum himpunan pembeda graf  $P_n \odot K_m$  adalah  $n(m - 1)$  atau  $\dim(P_n \odot K_m) \leq n(m - 1)$ . Apabila direduksi simpul  $v_1$ , mengakibatkan  $r(v_1|W) = r(v_m|W)$ , sehingga  $n(m - 1) \leq \dim(P_n \odot K_m) \leq n(m - 1)$ . Dengan demikian  $\dim(P_n \odot K_m) = n(m - 1)$ .

**B. Dimensi Metrik Pada Hasil Korona Graf Sikel Dan Graf Lintasan ( $C_n \odot mP_2$ )**

Untuk membedakan dua graf operasi korona graf sikel disebut sebagai graf  $C_n$  dengan himpunan simpul  $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan graf lintasan dengan orde 2 disebut  $P_2$  dengan simpul  $V(P_2) = \{a_1, b_1\}$ . Gambar 3 merupakan bentuk umum dari graf  $C_n \odot mP_2$ . Berdasarkan dari kontruksi dimensi metrik graf  $C_n \odot mP_2$  dan menganalisa karakteristik graf hasil korona



Gambar 3. Graf  $C_n \odot mP_2$

dari graf sikel dan graf lengkap pada orde 2, diperoleh kesimpulan pada teorema di bawah ini.

**Teorema 2**

Misalkan  $C_n$  adalah graf lintasan order  $n$  dan  $P_2$  adalah graf lintasan dengan order 2, maka

$$\dim(C_n \odot mP_2) = nm$$

dengan  $n, m \in \mathbb{N}$  dan  $m \geq 2$

**Bukti:**

Untuk memperoleh minimum resolving set dari graf  $C_n \odot mP_2$ , maka di ambil satu simpul dari setiap  $mP_2$  untuk  $m \geq 2$ . Hal tersebut dilakukan karena jika diambil kedua simpul dari  $mP_2$  atau tidak diambil kedua-duanya, maka akan menghasilkan representasi yang sama. Untuk menentukan dimensi metrik dari graf  $C_n \odot mP_2$ , maka dicari batas atas dan batas bawah terlebih dahulu.

a. Batas atas

Simpul dari  $mP_2$  diambil salah satu simpulnya untuk menjadi himpunan terurut yaitu  $W = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,m-1}\}$ , sehingga representasi jarak berbeda terhadap setiap titik pada graf  $C_n \odot mP_2$ . Dengan demikian  $W$  merupakan *resolving set* tetapi belum tentu basis metrik, maka terdapat kardinalitas yang lebih minimum. Jadi berlaku batas atas  $\dim(C_n \odot mP_2) \leq nm$ .

b. Batas bawah

Jika kardinalitas  $|W| = nm - 1$  dengan  $W = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,m-1}\}$ , maka terdapat simpul  $a_{nm}$  atau simpul  $b_{nm}$  yang bukan anggota himpunan  $W$ . Dengan demikian pasti ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama yaitu  $r(a_{nm}|W) = r(b_{nm}|W)$ . Jelas  $W$  bukan resolving set dari graf  $C_n \odot mP_2$ . Jadi, batas bawah dari  $\dim(C_n \odot mP_2)$  adalah  $|W| \geq nm$  atau  $\dim(C_n \odot mP_2) \geq nm$ .

Karena batas atas dan batas bawah dari  $\dim(C_n \odot mP_2)$  adalah  $nm \leq \dim(G) \leq nm$ , maka  $\dim(C_n \odot mP_2) = nm$ , dengan  $n, m \in \mathbb{N}$  dan  $m \geq 2$ .

**KESIMPULAN**

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan sebelumnya maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika  $G$  adalah graf hasil  $P_n \odot K_m$  dengan  $n \geq 2, m \geq 2$  maka  $\dim(G) = n(m - 1)$ .
2. Jika  $G$  adalah graf hasil  $C_n \odot mP_2$  dengan  $n, m \in \mathbb{N}$  dan  $m \geq 2$ , maka  $\dim(G) = nm$ .

**DAFTAR PUSTAKA**

Darmaji. (2011). *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*. Bandung: Disertasi, Program studi matematika ITB.

G. Chartrand, Linda Eroh, Mark A. Johnson, O.R Oellermann. (2000). *Resolvability in Graph and The Metric Dimension of a Graph*. Discrete Applied Mathematics.

G. Chartrand, Erwin D, Johns G, dan Zhang P. (2003). *Boundary vertices in Graph*. Discrete Applied Mathematics.

Hindayani. (2011). *Dimensi Metrik Graf  $k_r + mk_s$* . Malang: Tugas Akhir, Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim.

H. Iswadi, E. T Baskoro, R, Simanjuntak, A.N.M Salman. 2012. *The Metric Dimention of Graph with Pendant Edge*. Bandung: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB.

Johanes, P. 2009. *Dimensi Metrik Pada Pengembangan Graf kincir Dengan*

*Pola  $k_1 + mk_n$* . Surabaya: Tugas Akhir, Jurusan Matematika ITS.

Septiana dan Budi. (2013). *Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit*. Surabaya: Tugas Akhir, Jurusan Matematika Universitas Negeri Surabaya.