УДК 517.192

О.О. Власій[1], Т. В. Дячун[2], М.Ф. Стасюк[3], *канд. фіз.-мат. наук, доцент*
([1]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
[2]Територіальне управління МНС України у Тернопільській області
[3]Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У БАГАТОШАРОВОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Процес теплопровідності у багатошаровому порожнистому циліндрі за наявності внутрішніх точкових джерел тепла змодельовано узагальненим неоднорідним квазідиференціальним рівнянням другого порядку. Розрахунок стаціонарного температурного поля здійснено на основі теорії коректних узагальнених систем диференціальних рівнянь та концепції квазіпохідних. Розв’язок задачі конструктивний і виражається виключно через її вихідні дані. При розв’язуванні задачі використовуються основні положення теорії теплопередачі, та елементи теорії узагальнених функцій.

Ключові слова: температурне поле, точкові джерела тепла, квазідиференціальне рівняння, багатошаровий циліндр.

Вступ. Однією із важливих задач теплопровідності є розрахунок стаціонарного температурного поля у багатошарових тілах – плоских, циліндричних, сферичних [4], [6]. Практичний інтерес становлять такі задачі за умови неоднорідних шарів з різними коефіцієнтами теплопровідності, а також за наявності внутрішніх розподілених та точкових джерел тепла (наприклад, багатошарові стінки із підігрівом деяких із них, трубопроводи із кількома шарами ізоляції, виникнення пожежі на одному з шарів тощо) [1], [2]. Дослідження задач такого роду тривалий період мали частковий характер, оскільки стосувалися рівнянь конкретних видів. Наявність зосереджених точкових факторів при цьому враховувалася в умовах спряження на розв’язки рівнянь теплопровідності [3], [4]. Використання теорії узагальнених функцій, а також концепції квазіпохідних дало можливість досліджувати процеси теплопровідності у багатошарових тілах на основі уточнених математичних моделей, що описуються квазідиференціальними рівняннями із узагальненими функціями в коефіцієнтах, які не завжди є коректними з точки зору теорії розподілів.

Постановка задачі. Розглянемо n-шаровий порожнистий нескінченний циліндр. Нехай $r_0, r_1, ..., r_k, r_{k+1}, ..., r_n$ – радіуси циліндрів-шарів, причому $r_0 \neq 0$. Введемо характеристичну функцію k-го шару: $\Theta_k(r) = \begin{cases} 1, r \in [r_k, r_{k+1}) \\ 0, r \notin [r_k, r_{k+1}) \end{cases}$.

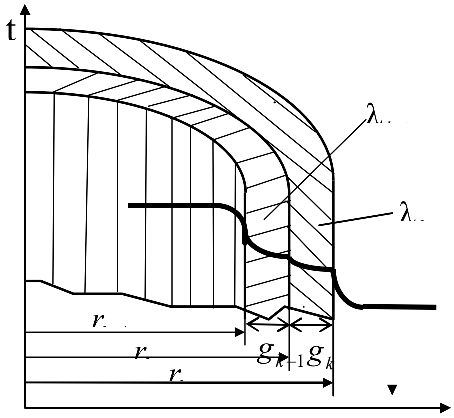

Рис. 1. Багатошарова циліндрична стінка

Розглянемо рівняння теплопровідності

$$(\lambda t')' + \frac{1}{r}(\lambda t') = f(r), \qquad (1)$$

де t – температура, r – радіальна змінна, λ – коефіцієнт теплопровідності, $f(r)$ – функція розподілу внутрішніх джерел тепла.

Нехай λ_k – коефіцієнт теплопровідності k-го шару, $g_k(r)$ – інтенсивність рівномірно розподіленого по k-ому шарі джерела тепла, s_k – інтенсивність точкового джерела тепла k-го шару. Тоді рівняння (1) запишемо у вигляді

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k(r) t'\right)' + \frac{1}{r}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k(r) t'\right) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k \Theta_k(r) + \sum_{k=1}^{n} s_k \delta_k(r) \qquad (2)$$

де $\delta_k(r)=\delta(r-r_k)$ – функція Дірака з носієм у точці $r=r_k$.

Рівняння (2) будемо розглядати як квазідиференціальне і введемо для нього квазіпохідну $t^{[1]}(r)=\lambda(r)t'(r)$. Оскільки ця квазіпохідна є ніщо інше, як тепловий потік, то позначатимемо надалі $q(r)=t^{[1]}(r)$.

Рівняння (2) розглядатимемо разом з такими граничними умовами, які в загальному випадку є нелокальними:

$$\begin{aligned} u_{11}t(r_0)+u_{12}q(r_0)+v_{11}t(r_n)+v_{12}q(r_n)=\gamma_1,\\ u_{21}t(r_0)+u_{22}q(r_0)+v_{21}t(r_n)+v_{22}q(r_n)=\gamma_2, \end{aligned} \tag{3}$$

де $u_{ij},v_{ij},\gamma_i\,(i,j=1,2)$ – задані дійсні числа.

За допомогою ветора $Y=\begin{pmatrix} t(r)\\ q(r)\end{pmatrix}$ рівняння (2) запишемо у матричному вигляді

$$Y'=\begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{\lambda_k}\Theta_k(r)\\ 0 & -\dfrac{1}{r}\end{pmatrix}Y+\begin{pmatrix} 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}g_k\Theta_k(r)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}s_k\delta_k(r)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Умовам (3) відповідатимуть такі умови:

$$UY(r_0)+VY(r_n)=\Gamma \tag{5}$$

$$\text{де } U=\left(u_{ij}\right)_{i,j=1}^{n},\ V=\left(v_{ij}\right)_{i,j=1}^{n},\ \Gamma=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}.$$

Математичний апарат. Розглянемо на проміжку $[r_0,r_n]$ систему диференціальних рівнянь загального вигляду

$$Y'=\left(\sum_{k=0}^{n-1}A_k(r)\Theta_k(r)\right)Y+\sum_{k=0}^{n-1}G_k\Theta_k(r)+\sum_{k=1}^{n-1}S_k\delta_k(r) \tag{6}$$

з початковою умовою

$$Y(r_0)=Y^0, \tag{7}$$

де Y – невідома m-вимірна вектор-функція; G_k,S_k – m-вимірні дійсні вектори, $A_k(r)$ – $m\times m$ матриця-функція, неперервна на $[r_k,r_{k+1})$, $k=\overline{0,n-1}$.

Систему $Y=\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}A_k(r)\Theta_k(r)\right)Y$ називатимемо *визначальною* для системи (6).

Фундаментальну матрицю визначальної системи на проміжку $[x_k,x_{k+1})$ позначатимемо $\tilde{B}_k(r,\alpha)$ і вважатимемо її відомою для $k=\overline{0,n-1}$.

Теорема 1. На кожному з проміжків $[r_k,r_{k+1})$ початкова задача (задача Коші) (6), (7) має єдиний розв'язок $Y_k(r)$ з простору неперервних справа функцій обмеженої на $[r_0,r_n]$ варіації і який можна подати у вигляді

$$Y_k(r)=\tilde{B}_k(r,r_k)B(r_k,r_0)Y^0+\tilde{B}_k(r,r_k)\sum_{i=0}^{k}B(r_k,r_i)Z_i+\int_{r_k}^{r}\tilde{B}_k(r,\xi)G_k\,d\xi,\ k=\overline{0,n-1}, \tag{8}$$

де

$$B(r_k, r_i) = \tilde{B}_{k-1}(r_k, r_{k-1})\tilde{B}_{k-2}(r_{k-1}, r_{k-2})\cdots\tilde{B}_i(r_{i+1}, r_i), \tag{9}$$

$$Z_i = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \tilde{B}_{i-1}(r_i, \xi) G_{i-1} d\xi + S_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{10}$$

$$Z_0 = 0, \; S_n = 0, \; B(r_k, r_k) = E.$$

Доведення. На кожному з проміжків $[r_k, r_{k+1})$ система (6) має вигляд

$$Y' = A_k Y + G_k + S_k \delta_k(r). \tag{11}$$

Розв'язок рівняння (6) на проміжку $[r_k, r_{k+1})$ (тобто розв'язок рівняння (11)) шукатимемо у вигляді

$$Y_k = \tilde{B}_k(r, r_k) Y_k^0 + \int_{r_k}^{r} \tilde{B}_k(r, \xi) G_k d\xi, \tag{12}$$

де Y_k^0 – невідомий початковий вектор.

Аналогічно запишемо розв'язок рівняння (6) на проміжку $[r_{k-1}, r_k)$

$$Y_{k-1} = \tilde{B}_{k-1}(r, r_{k-1}) Y_{k-1}^0 + \int_{r_{k-1}}^{r} \tilde{B}_{k-1}(r, \xi) G_{k-1} d\xi, \tag{13}$$

В точці $r = r_k$ має виконуватись умова спряження [6]

$$Y_k(r_k) = Y_{k-1}(r_k) + S_k,$$

яка приводить до рекурентного співвідношення

$$Y_k^0 = \tilde{B}_{k-1}(r_k, r_{k-1}) Y_{k-1}^0 + \int_{r_{k-1}}^{r_k} \tilde{B}_{k-1}(r_k, \xi) G_k d\xi + S_k. \tag{14}$$

Покладаючи $Y_0^0 = Y^0$ ($Y^0 = Y(r_0)$ – довільний початковий вектор), методом математичної індукції з (14) в позначеннях (9), (10), отримуємо

$$Y_k^0 = B(r_k, r_0) Y^0 + \sum_{i=0}^{k} B(r_k, r_i) Z_i. \tag{15}$$

Поклавши $Z_0 = 0$, $S_n = 0$, $B(r_k, r_k) = E$ і підставивиши (15) у (12), отримаємо твердження теореми.

Лема 1. За умови $\det[U + VB(r_n, r_0)] \neq 0$ існує єдиний розв'язок крайової задачі (6), (5), який на інтервалі $[r_k, r_{k+1})$ обчислюється за формулою (8) з таким початковим вектором

$$Y^0 = [U + VB(r_n, r_0)]^{-1} \cdot \left[\Gamma - V\sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i) Z_i\right]. \tag{16}$$

Доведення. На основі (15) маємо

$$Y(r_n) = Y_n^0 = B(r_n, r_0) Y^0 + \sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i) Z_i.$$

Далі послідовно отримуємо

$$UY^0 + VY_n^0 = \Gamma \Leftrightarrow UY(r_0) + VY(r_n) = \Gamma \Leftrightarrow UY^0 + V\left[B(r_n, r_0) Y^0 + \sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i) Z_i\right] = \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [U + VB(r_n, r_0)] Y^0 + V\sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i) Z_i = \Gamma.$$

Звідси і отримуємо (16).

Розрахунок температурного поля в загальному випадку. Для системи (4) визначальною [5] буде система

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k} \Theta_k(r) \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} Y, \tag{17}$$

якій відповідає визначальне рівняння

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k(r) t' \right)' + \frac{1}{r} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k(r) t' \right) = 0, \tag{18}$$

На кожному з інтервалів $[r_k; r_{k+1})$ рівняння (18) має вигляд

$$(\lambda_k t')' + \frac{\lambda_k}{r} t' = 0. \tag{19}$$

Знайдемо функцію Коші (в термінах квазіпохідних) рівняння (19), тобто таку функцію $\tilde{K}_k(r,\alpha)$, яка за змінною r задовольняє це рівняння і для якої виконуються умови

$$\tilde{K}_k(\alpha,\alpha) = 0, \tilde{K}_k^{[1]}(\alpha,\alpha) = 1. \tag{20}$$

Зауважимо, що $\tilde{K}_k^{[1]}(r,\alpha) = \lambda_k \left(\tilde{K}_k(r,\alpha) \right)'_r$. З (19) матимемо рівняння $t'' + \frac{1}{r} t' = 0$, загальний розв'язок якого знаходимо класичним способом: $t(r) = C_1 \ln r + C_2$, де C_1, C_2 – деякі сталі. Функцію Коші $\tilde{K}_k(r,\alpha)$ шукатимемо у вигляді $\tilde{K}_k(r,\alpha) = C_1(\alpha) \ln r + C_2(\alpha)$. Обчислимо квазіпохідну $\tilde{K}_k^{[1]}(r,\alpha) = \lambda_k \left(\tilde{K}_k(r,\alpha) \right)'_r = \frac{\lambda_k}{r} C_1(\alpha)$. Враховуючи умови (20), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $C_1(\alpha)$ та $C_2(\alpha)$

$$\begin{cases} \tilde{K}_k(\alpha,\alpha) = C_1(\alpha) \ln \alpha + C_2(\alpha) = 0; \\ \tilde{K}_k^{[1]}(\alpha,\alpha) = \frac{\lambda_k}{\alpha} C_1(\alpha) = 1. \end{cases},$$

Звідки слідує $C_1(\alpha) = \frac{\alpha}{\lambda_k}$, $C_2(\alpha) = \frac{\lambda_k}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha}$. Таким чином, функція Коші квазідиференціального рівняння (19) обчислюється за формулою

$$\tilde{K}_k(r,\alpha) = \frac{\alpha}{\lambda_k} \ln \frac{r}{\alpha}.$$

Система (17) на кожному інтервалі $[r_k; r_{k+1})$, $k = \overline{0, n-1}$, має вигляд

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k} \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} Y. \tag{21}$$

Побудуємо фундаментальну матрицю цієї системи, враховуючи її структуру [5]

$$\tilde{B}_k(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \tilde{K}_k^{\{1\}}(r,\alpha) & \tilde{K}_k(r,\alpha) \\ \tilde{K}_k^{\{1\}[1]}(r,\alpha) & \tilde{K}_k^{[1]}(r,\alpha) \end{pmatrix},$$

де $\tilde{K}_k^{\{1\}}(r,\alpha)$ – квазіпохідна в сенсі спряженого рівняння. Для того, щоб знайти вигляд цієї квазіпохідної, побудуємо систему, спряжену до (21):

$$\begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda_k} & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix},$$

з якої «відчитуємо» $z' = -\frac{1}{\lambda_k} z^{\{1\}} + \frac{1}{\alpha} z$, звідки $z^{\{1\}} = \lambda_k \left(-z' + \frac{1}{\alpha} z \right)$. Тоді

$$\tilde{K}_k^{[1]}(r,\alpha) = \lambda_k \left(\tilde{K}_k(r,\alpha) \right)'_r = \lambda_k \frac{\alpha}{\lambda_k} \frac{s}{r} \frac{1}{s} = \frac{\alpha}{r};.$$

$$\tilde{K}_k^{\{1\}}(r,\alpha) = \lambda_k \left(-\left(\tilde{K}_k(r,\alpha) \right)'_\alpha + \frac{1}{\alpha} \tilde{K}_k(r,\alpha) \right) = \lambda_k \left(-\frac{1}{\lambda_k} \ln\frac{r}{\alpha} + \frac{\alpha}{\lambda_k} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{\lambda_k} \ln\frac{r}{\alpha} \right) \equiv 1;$$

$$\tilde{K}_k^{\{1\}[1]}(r,\alpha) = \left(\tilde{K}_k^{\{1\}}(r,\alpha) \right)' \equiv 0.$$

Отже,

$$\tilde{B}_k(r,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{\lambda_k} \ln\frac{r}{\alpha} \\ 0 & \frac{\alpha}{r} \end{pmatrix}, \; k = \overline{0, n-1}. \tag{22}$$

Методом математичної індукції за індексом k можна довести, що справедлива формула

$$B(r_k, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & r_i \sum_{j=i}^{k-1} \frac{\ln\frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \\ 0 & \frac{r_i}{r_k} \end{pmatrix}, r_k > r_i. \tag{23}$$

Тоді

$$\tilde{B}_k(r, r_k) B(r_k, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & r_i \left(\frac{\ln\frac{r}{r_k}}{\lambda_k} + \sum_{j=i}^{k-1} \frac{\ln\frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right) \\ 0 & \frac{r_i}{r} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Обчислимо інтеграл з (8)

$$\int_{r_k}^{r} \tilde{B}_k(r,\xi) G_k d\xi = \begin{pmatrix} \frac{g_k}{\lambda_k} \cdot \frac{(r - r_k)^2 \cdot \ln\frac{er^2}{r_k^2}}{4} \\ \frac{g_k \left(r^2 - r_k^2 \right)}{2r} \end{pmatrix} \overset{df}{=} \begin{pmatrix} I_k(r) \\ I_k^{[1]}(r) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Позначимо також

$$Z_i = \begin{pmatrix} z_i \\ z_i^{[1]} + s_i \end{pmatrix}, \tag{26}$$

де $$z_i = I_{i-1}(r_i), \quad z_i^{[1]} = I_{i-1}^{[1]}(r_i), \; z_0 = z_0^{[1]} = s_n = 0.$$

Отже, розрахунок стаціонарного температурного поля в n-шаровому порожнистому циліндрі, що моделюється граничною задачею (4), (5), здійснюється за формулами (8)-(10), (16) із врахуванням формул (23)-(26).

Розрахунок температурного поля у частковому випадку. Нехай на внутрішньому шарі циліндра задана температура, а на зовнішньому – тепловий потік. Такий випадок моделюється такими граничними умовами

$$\begin{cases} t(r_0) = t_0, \\ q(r_n) = q_n. \end{cases} \tag{27}$$

На основі (24) (при $i = 0$) для довільного початкового вектора $Y^0 = \begin{pmatrix} t^0 \\ q^0 \end{pmatrix}$ маємо

$$\tilde{B}_k(r, r_k) B(r_k, r_0) Y^0 = \begin{pmatrix} t^0 + r_0 \left(\dfrac{\ln \frac{r}{r_k}}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right) q^0 \\ \dfrac{r_0}{r} q^0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Необхідно ще обчислити

$$\tilde{B}_k(r, r_k) \sum_{i=0}^{k} B(r_k, r_i) Z_i = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k} \left\{ z_i + r_i \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \left(\dfrac{\ln \frac{r}{r_k}}{\lambda_k} + \sum\limits_{j-i}^{k-1} \dfrac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right) \right\} \\ \dfrac{1}{r} \sum\limits_{i=0}^{k} r_i \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Використовуючи зображення (28), (29) та (25) отримуємо

$$Y_k(r) = \begin{pmatrix} t^0 + r_0 \left(\dfrac{\ln \frac{r}{r_k}}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right) q^0 \\ \dfrac{r_0}{r} q^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k} \left\{ z_i + r_i \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \left(\dfrac{\ln \frac{r}{r_k}}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=i}^{k-1} \dfrac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right) \right\} \\ \dfrac{1}{r} \sum\limits_{i=0}^{k} r_i \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_k(x) \\ I_k^{[1]}(x) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Граничні умови (27) запишемо в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(r_0) \\ q(r_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(r_n) \\ q(r_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ q_n \end{pmatrix},$$

тобто у вигляді (5), де $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} t_0 \\ q_n \end{pmatrix}$.

Оскільки

$$B(r_n, r_0) = \begin{pmatrix} 1 & r_0 \sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \\ 0 & \dfrac{r_0}{r_n} \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i) Z_i = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} \left\{ z_i + r_i \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \sum\limits_{j=i}^{n-1} \dfrac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j} \right\} \\ \dfrac{1}{r_n} \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} r_i \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \end{pmatrix},$$

то на основі (16) отримуємо:

$$\begin{pmatrix} t^0 \\ q^0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(r_n, r_0) \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} t_0 \\ q_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i) Z_i \right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & r_0 \sigma_1 \\ 0 & \dfrac{r_0}{r_n} \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} t_0 \\ q_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \dfrac{\sigma_3}{r_n} \end{pmatrix} \right] =$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{r_0}{r_n}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}t_0\\ q_n-\dfrac{\sigma_3}{r_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{r_0}{r_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_0\\ q_n-\dfrac{\sigma_3}{r_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_0\\ \dfrac{r_0}{r_n}\left(q_n-\dfrac{\sigma_3}{r_n}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_0\\ r_nq_n-\sum\limits_{i=0}^{n}r_i\left(z_i^{[1]}+s_i\right)\end{pmatrix},$$

де

$$\sigma_1=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\ln\frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j},\quad \sigma_2=\sum_{i=0}^{n}\left\{z_i+r_i\left(z_i^{[1]}+s_i\right)\cdot\sum_{j=i}^{n-1}\frac{\ln\frac{r_{j+1}}{r_j}}{\lambda_j}\right\}$$

$$\sigma_3=\frac{1}{r_n}\sum_{i=0}^{n}r_i\left(z_i^{[1]}+s_i\right)\cdot$$

Отже, у формулі (30) слід покласти :

$$t^0=y_0,\quad q^0=\frac{r_nq_n-\sum\limits_{i=0}^{n}r_i\left(z_i^{[1]}+s_i\right)}{r_0}.$$

Висновки. Застосування теорії узагальненеих функцій та теорії коректних систем диференціальних рівнянь з мірами дає можливість будувати уточнені математичні моделі процесів теплопровідності у багатошарових тілах з дискретно-неперервним розподілом джерел тепла. В представленій роботі досліджено математичну модель процесу теплопровідності у багатошаровому порожнистому циліндрі із врахуванням внутрішніх розподілених та точкових джерел тепла. При цьому передбачається, що коефіцієнт теплопровідності є сталим в межах одного шару. Розрахунки температурного поля у загальному випадку дають можливість отримати значення температури та тепловго потоку у довільному шарі за конкретно заданих граничних умов.

Список літератури:

1. Будник А. Ф. Тепломасоперенос у процесах і матеріалах дизайну матеріалів: навчальний посібник. – Суми: Вд-во СумДУ, 2008. – 158 с.

2. Величко Л. Д. Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі / Л. Д. Величко, Р. Я. Лозинський, М. М. Семерак. – Львів: «Сполом», 2011. – 497 с.

3. Кошмаров Ю. А. Теплотехника: учебник для вузов. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2006. – 501 с.

4. Лыков Н. Н. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 559 с.

5. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Тацій Р. М. [та ін.]. – Дрогобич: Коло, 2011. – 301 с.

6. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – Москва: Мир,1971. – 312 с.

7. Чепурний М. М. Тепломасообмін в прикладах і задачах: навчальний посібник / М. М. Чепурний, Н. В. Резидент. – Вінниця: ВНТУ, 2011. – 128 с.

О.О. Власий, Т.В. Дячун, М.Ф. Стасюк

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Процесс теплопроводности в многослойном полом цилиндре при наличии внутренних точечных источников тепла смоделирован обобщенным неоднородным квазидифференциальных уравнением второго порядка. Расчет стационарного температурного поля осуществлен с использованием теории корректных обобщенных систем дифференциальных уравнений и концепции квазипроизводных. Решение задачи конструктивно и выражается исключительно через ее исходные данные. При решении задачи используются основные положения теории теплопередачи и элементы теории обобщенных функций.

Ключевые слова: температурное поле, точечные источники тепла, квазидифференциальное уравнение, многослойный цилиндр.

O. Vlasiy, T.Dyachunн, M. Stasiuk

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT PROCESS IN MULTILAYER HOLLOW CYLINDER

The heat process in a multilayered hollow cylinder with internal point heat source is modeled by heterogeneous generalized second-order quasi-differential equation. The calculation of the temperature field obtained on the basis of the theory of correct generalized systems of differential equations and concepts quasi-derivatives. The decision of task is constructir and expressed exceptionally by means of its input data. For solving the task the main statements of the theory of heat transfer, and elements of theory of the generalized functions are used.

Key words: temperature field, point heat source , quasi-differential equation, multilayer cylinder.

❖ ❖ ❖