

*М.І. Адаменко<sup>1</sup>, д-р техн. наук, професор, Е.А. Дармофал<sup>2</sup>*  
(<sup>1</sup>Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна,  
<sup>2</sup>Харківська державна академія фізичної культури,

### **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗАБРУДНЕННЯ АТМОСФЕРИ З ШАХТНИХ ВИКИДІВ**

Розглядається несприятливий екологічний вплив шахтних регіонів на довкілля. Наведено комплекс математичних розрахунків для різних видів екологічного впливу гірничодобувних об'єктів на атмосферу, що дають можливість оцінити межі розповсюдження екологічної кризової ситуації у навколишньому середовищі. Передбачено заходи, що запобігають розвитку можливих аварій, пов'язаних з викидом небезпечних речовин. Результатом роботи є розроблений механізм та створення інформаційної моделі розповсюдження забруднення атмосфери з шахтних викидів з заданими початковими та граничними умовами, що дає прогнозувати розподіл концентрації забруднювача у просторі та у часі практично для всіляких можливих ситуацій.

**Ключові слова:** екологічний ризик, шахтна атмосфера, забруднювачі повітря, двокомпонентна суміш, дифузія

*Н.І. Адаменко, Е.А. Дармофал*

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ ОТ ШАХТНЫХ ВЫБРОСОВ**

Рассматривается неблагоприятное экологическое воздействие шахтных регионов на окружающую среду. Приведен комплекс математических расчетов для различных видов экологического воздействия горнодобывающих объектов на атмосферу, что дает возможность оценить пределы распространения кризисной экологической ситуации. Предусмотрены мероприятия, предупреждающие развитие возможных аварий, связанных с выбросом опасных веществ в атмосферу. Результатом работы является разработанный механизм и создание информационной модели распространения загрязнения атмосферы шахтными выбросами с заданными начальными и граничными условиями, что позволяет прогнозировать распределение концентрации загрязнителя в пространстве и во времени практически для любых возможных ситуаций.

**Ключевые слова:** экологический риск, шахтная атмосфера, загрязнители воздуха, двухкомпонентная смесь, диффузия

*Н.І. Адаменко, Е.А. Дармофал*

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ ОТ ШАХТНЫХ ВЫБРОСОВ**

The article examines the negative ecological impact of mining regions on the environment. The complex of mathematical calculations for different types of ecological impact of mining operations on the atmosphere that allows us to estimate limits of spreading the critical situation in environmental has been presented. Measures which prevent the development of possible accidents involving the release of hazardous substances into the atmosphere have been presented. The study helped to design mechanism and create informational model of spreading mining pollutions in the atmosphere with given initial and boundary conditions, which allows to predict the spreading of pollutant concentration in space and time for almost all possible situations.

**Key words:** ecological risk, mine atmosphere, air pollutants, two-component mixture, diffusion

**Актуальність.** Забруднення атмосферного повітря – одна із найгостріших екологічних проблем багатьох країн світу, адже саме у атмосферу надходять усі газоподібні відходи виробництва. Процес самоочищення атмосфери, притаманний їй, уже нездатний подолати самостійно навантаження, що діяльність людей покладає на неї. Екологи б'ють на сполох. Вплив забрудненого повітря на здоров'я населення проявляється через скорочення середньої тривалості життя, збільшення кількості передчасних смертей, ріст захворюваності й негативний вплив на працездатність. В шахтних регіонах основними забруднювачами повітря є вуглеводородні підприємства. Вивільнюваний із вугленосних шарів газ – метан разом з вугільним пилом та іншими домішками викидається через дифузори вентиляційних стовбурів шахт в атмосферу погіршуючи і без того складну екологічну ситуацію регіону.

Отже основна **проблема** регіону полягає в мінімізації екологічно-шкідливих викидів в атмосферу. Видобуток вугілля – одне з найбільших джерел надходження в атмосферу забруднюючих речовин. Джерелами забруднення атмосфери тут є терикони, відвали, відкриті розробки, ділянки навантажування, розвантажування та транспортування сировини, проведення вибухових робіт, викиди з вентиляційних систем шахт тощо.

Обговорення означеної проблеми у сучасній науковій літературі та у ЗМІ ведеться достатньо широкими колами як вітчизняних так і закордонних науковців [1-8].

З проблеми органічно витікає **наукова задача** забезпечення сталої фільтрації (очищення) шахтних викидів з мінімальною кількісною складовою потрапляння технічного пилу в атмосферу.

### **Основний матеріал**

Основним фактором екологічного впливу шахтних викидів на навколишнє середовище для аероекологічної оцінки вважають формування пилової хмари забрудненого повітря (первинної, вторинної тощо).

У статті наведемо комплекс математичних розрахунків для різних видів екологічного впливу гірничовидобувних об'єктів на атмосферу, які дають можливість оцінити межі розповсюдження екологічної кризової ситуації у навколишньому середовищі.

Аналітичну модель для опису просторового розподілу концентрації небезпечних для здоров'я людини та навколишнього природного середовища речовин як у нестационарному, так й у стаціонарному випадках розвитку можливих аварій, що пов'язані з викидом небезпечних речовин, можна розробити на основі загальної теорії механіки суцільних середовищ [9-22].

Небезпечна забруднююча речовина (пил) разом з повітрям створює двокомпонентну газову систему. Концентрація речовини, що забруднює атмосферу, визначається її щільністю  $\rho_3(\vec{r}, t)$  (кг/м<sup>3</sup>) в двокомпонентній системі. Сумарна щільність  $\rho_\Sigma$  такої двокомпонентної системи дорівнює

$$\rho_\Sigma(\vec{r}, t) = \rho_3(\vec{r}, t) + \rho_n(\vec{r}, t), \quad (1)$$

де  $\rho_n$  – щільність повітря.

Забруднення атмосфери у різних точках простору у різні моменти часу цілком задається функцією  $\rho_3(\vec{r}, t)$ . Наша задача отримати повну систему рівнянь, вирішуючи яку можна знайти  $\rho_3(\vec{r}, t)$  при заданих початковому розподілі концентрації забруднюючої речовини  $\rho_3(\vec{r}, t = 0)$  та граничних умовах.

У двокомпонентному газі забруднення рухається зі швидкістю  $\vec{v}_3(\vec{r}, t)$ , а повітря – зі швидкістю  $\vec{v}_n(\vec{r}, t)$ . Поряд зі швидкостями  $\vec{v}_3$  та  $\vec{v}_n$  введемо також конвективну (загальну) швидкість  $\vec{V}_k(\vec{r}, t)$  двокомпонентного газу рівністю

$$\rho_{\Sigma} \vec{V}_{\kappa} = \rho_3 \vec{v}_3 + \rho_n \vec{v}_n . \quad (2)$$

Якщо двокомпонентна суміш перебуває у спокої, то  $\vec{V}_{\kappa} = 0$ , тоді, згідно з (2), маємо

$$0 = \rho_3 \vec{v}_{3,d} + \rho_n \vec{v}_{n,d} , \quad (3)$$

де  $\vec{v}_{3,d}$  та  $\vec{v}_{n,d}$  – відповідно швидкості руху забруднюючої речовини та повітря у двокомпонентній системі, яка у цілому перебуває у стані спокою, тому що  $\vec{V}_{\kappa} = 0$ .

Зміна концентрацій компонент у двокомпонентній системі, яка перебуває у стані спокою, як відомо, називається дифузією. Дифузія обумовлена зустрічним рухом компонент з відповідними швидкостями  $\vec{v}_{3,d}$  та  $\vec{v}_{n,d}$ , які не дорівнюють нулю.

Явище дифузії забруднюючої речовини визначається вектором дифузії

$$\vec{i}_3 = \rho_3 \vec{v}_{3,d} \quad (4)$$

який, згідно з (4), дає кількість забруднювача, що переноситься дифузією в одиницю часу крізь одиницю поверхні, перпендикулярну вектору  $\vec{v}_{3,d}$ .

Аналогічно вектор дифузії повітря у двокомпонентному газі визначається рівністю

$$\vec{i}_n = \rho_n \vec{v}_{n,d} . \quad (5)$$

Згідно (3), (4), (5) виконується рівняння

$$\vec{i}_3 = -\vec{i}_n . \quad (6)$$

Фізичною причиною дифузії є зустрічний тепловий рух молекул забруднювача та молекул повітря з середніми швидкостями  $\vec{v}_{3,d}$  та  $\vec{v}_{n,d}$ .

Виділимо у швидкостях руху забруднювача  $\vec{v}_3$  та повітря  $\vec{v}_n$  конвективну швидкість руху двокомпонентного газу  $\vec{V}_{\kappa}$  та швидкості дифузійного руху рівностями

$$\vec{v}_3 = \vec{V}_{\kappa} + \vec{v}_{3,d} , \quad (7)$$

$$\vec{v}_n = \vec{V}_{\kappa} + \vec{v}_{n,d} . \quad (8)$$

Відзначимо, що при цьому визначенні підстановка (7) та (8) у праву частину рівності (2) з урахуванням (1) дає ліву частину рівності (2).

Перейдемо до отримання повної системи рівнянь, яка описує зміну концентрації забруднювача у просторі та часі. Почнемо з закону збереження маси забруднювача. З цією метою розглянемо деякий замкнений об'єм  $V$ , який обмежує замкнена поверхня  $f$ . Маса забруднювача в об'ємі  $V$ , очевидно, дорівнює

$$M_3 = \int_V \rho_3(\vec{r}, t) d^3 r . \quad (9)$$

Зміна маси забруднювача у замкненому об'ємі  $V$  в одиницю часу  $t$  дорівнює

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_3 d^3 r = - \oint_f \rho_3 \vec{v}_3 d \vec{f} + \int_V Q_3 d^3 r . \quad (10)$$

Тут перший інтеграл по замкненій поверхні  $f$  у правій частині рівняння (10) дає зміну маси забруднювача в об'ємі  $V$  в одиницю часу завдяки його руху крізь замкнену поверхню  $f$ . Другий інтеграл у правій частині рівняння (10) дає зміну маси забруднювача в об'ємі  $V$  в одиницю часу через наявність у ньому джерел та викидів забруднювача, що задаються функцією  $Q_3$ .

Джерела зв'язані з зовнішніми викидами забруднювача в атмосферу та можуть бути описані функцією  $Q_{дж}(\vec{r}, t)$ . Функція  $Q_{дж}(\vec{r}, t)$  задає масу забруднювача, яку викидають зовнішні джерела шахт за одиницю часу в одиницю об'єму атмосферного повітря, який містить точку  $\vec{r}$ .

Викиди, подібно до джерел, можна описати функцією  $Q_{cm}(\vec{r}, t)$ . Функція

$$Q_3(\vec{r}, t) = Q_{дж}(\vec{r}, t) + Q_{cm}(\vec{r}, t) . \quad (11)$$

Виходячи з теореми Остроградського-Гауса, інтеграл по поверхні, який міститься у правій частині рівняння (10), перетворюємо в інтеграл по об'єму.

Окрім цього вважаємо, що об'єм  $V$  не змінюється з часом. Це дає змогу диференціювати по часу підінтегральний вираз у лівій частині рівняння (10). Врешті-решт, отримаємо

$$\int_V \frac{\partial \rho_3}{\partial t} d^3 r = - \int_V \text{div} \rho_3 \vec{v}_3 d^3 r + \int_V Q_3 d^3 r . \quad (12)$$

Враховуючи, що рівність (12) виконується для будь-якого об'єму  $V$ , одержимо

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} = - \text{div} \rho_3 \vec{v}_3 + Q_3 . \quad (13)$$

З урахуванням рівностей (4) та (7) запишемо рівність (13) у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div} \rho_3 \vec{V}_\kappa - \text{div} \vec{i}_3 + Q_3 . \quad (14)$$

Закон збереження маси для повітря збігається з (14) з точністю до позначення

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = - \text{div} \rho_n \vec{V}_\kappa - \text{div} \vec{i}_n + Q_n . \quad (15)$$

Рух двокомпонентного газу, як цілого, описується рівнянням Нав'є-Стокса

$$\rho_\Sigma \left\{ \frac{\partial \vec{V}_\kappa}{\partial t} + (\vec{V}_\kappa \nabla) \vec{V}_\kappa \right\} = - \nabla P + \eta \Delta \vec{V}_\kappa + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \text{div} \vec{V}_\kappa + \vec{F}_{cm} , \quad (16)$$

де  $\xi$  та  $\eta$  – відповідно коефіцієнти першої та другої в'язкості, які передбачаються заданими,  $P$  – тиск у двокомпонентному газі, а  $\vec{F}_{cm}$  – стороння сила, яка передбачається заданою (сторонньою силою може бути, наприклад, сила тяжіння).

Закон збереження енергії двокомпонентного газу записується у вигляді

$$\rho_\Sigma T \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{V}_\kappa \nabla) S \right\} = \sigma_{ik} \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_k} - \text{div} \vec{q} + \mu \text{div} \vec{i}_3 , \quad (17)$$

де  $T$  та  $S$  – відповідно температура та ентропія двокомпонентного газу.

Тензор в'язкості  $y_{ik}$ , вектор потоку тепла  $\vec{q}$  та хімічний потенціал  $m$  двокомпонентного газу передбачаються заданими.

Вираз для вектора дифузії  $\vec{i}_3$  записується з простих феноменологічних міркувань. Будемо вважати, що в горизонтальній площині, яка збігається з площиною  $x, y$ , якості атмосфери не залежать від напрямку, але відмінні у вертикальному напрямку, який збігається з віссю  $z$ . Тоді компоненти вектора дифузії  $\vec{i}_3$  можна записати у вигляді

$$i_{zx} = -D_{II} \rho_{\Sigma} \frac{\partial \rho_3}{\partial x \rho_{\Sigma}} - K_T \frac{\partial T}{\partial x} - K_p \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (18)$$

$$i_{zy} = -D_{II} \rho_{\Sigma} \frac{\partial \rho_3}{\partial y \rho_{\Sigma}} - K_T \frac{\partial T}{\partial y} - K_p \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (19)$$

$$i_{zz} = -D_{\perp} \rho_{\Sigma} \frac{\partial \rho_3}{\partial z \rho_{\Sigma}} - \chi_T \frac{\partial T}{\partial z} - \chi_p \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (20)$$

Перші доданки у правих частинах рівностей (18) – (20) описують дифузію, що обумовлена залежністю  $c_3$  від  $\vec{r}$ , другі – термодифузію, треті – бародифузію. Коефіцієнти  $D_{II}, D_{\perp}, K_T, \chi_T, K_p, \chi_p$  передбачаються заданими. Коефіцієнти дифузії  $D_{II}$  та  $D_{\perp}$  – позитивні, а коефіцієнти термодифузії  $K_T$  і  $\chi_T$  та коефіцієнти бародифузії  $K_p$  і  $\chi_p$  можуть бути як позитивні, так і негативні.

Аналогічно записується вектор дифузії  $\vec{i}_n$ . При цьому має виконуватись рівняння (6).

Система трьох скалярних рівнянь (14), (15), (17) та одного векторного рівняння (16) є повна система рівнянь відносно чотирьох функцій  $\rho_3(\vec{r}, t)$ ,  $\rho_n(\vec{r}, t)$ ,  $P(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{V}_k(\vec{r}, t)$ .

При цьому ентропія  $S$  та температура  $T$  задаються рівняннями стану, згідно з якими  $S = S(c_3, c_n, P)$  та  $T = T(c_3, c_n, P)$ . Рівняння стану визначаються якостями двокомпонентного газу, який розглядається, та передбачаються заданими.

При заданих початкових та граничних умовах рішення системи рівнянь (14) – (17) з урахуванням рівностей (18) – (20) дає змогу знайти концентрацію забруднювача  $\rho_3(\vec{r}, t)$  у будь-якій точці простору та у будь-який момент часу. Зміна концентрації забруднювача в просторі та в часі, згідно з системою рівнянь (14) – (17) та рівностей (18) – (20), визначається конвективним переносом забруднювача зі швидкістю  $\vec{V}_k$ , а також дифузією, термодифузією та бародифузією.

Загальне рішення такої задачі у теперішній час отримати неможливо. Розвиток сучасних комп'ютерних технологій дає змогу для кожного конкретного випадку одержати чисельне рішення для функції  $\rho_3(\vec{r}, t)$ . Між тим безсумнівні переваги мають аналітичні рішення задачі про розповсюдження забруднення, які можна отримати в умовах наявності низки припущень, що суттєво спрощують рівняння (14) – (20).

Аналітичні рішення не тільки дають точне рішення задачі при зробленій низці припущень, вони ще допомагають якісно описати розповсюдження забруднень у досить загальних випадках навіть тоді, коли зроблені припущення не реалізуються. Нижче наводиться низка таких аналітичних рішень.

Перше рішення впливає з рівностей (18) – (20), які дають змогу запропонувати термодифузійний спосіб розподілу забруднень. Нехай у початковий момент часу  $t = 0$  у якійсь області простору концентрація забруднювача буде однакою у всіх точках простору, тобто  $c_3$  не залежить від координати  $\vec{r}$ . Крім того, двокомпонентний газ покоїться, тобто  $\vec{V}_k = 0$ .

При цьому виникають задачі або зібрати забруднювач в якійсь області простору, де він буде утилізований, або очистити деяку область простору від забруднювача. Рішення цих задач впливає з рівностей (18) – (20).

Задля спрощення будемо вважати, що  $D_{II} = D_{\perp}$ ,  $K_T = \chi_T$  та тиск двокомпонентного газу постійний у всіх точках простору, який розглядається. Тоді з рівностей (18)–(20) впливає, що

$$\vec{i}_3 = D_{II} \rho_{\Sigma} \nabla \frac{\rho_3}{\rho_{\Sigma}} - K_T \nabla T. \quad (21)$$

Якщо у якійсь області  $c_3(t=0) = const$ , то перший доданок у правій частині рівності (21) дорівнює нулю. Помістимо у просторі тверде тіло, яке нагріте до деякої температури, що перевищує температуру навколишнього двокомпонентного газу. Тоді у просторі виникне градієнт температури, який, згідно з (21), приведе до руху забруднювача у просторі. Якщо температуру твердого тіла підтримувати постійною, то після деякого часу настане стаціонарний стан, при якому  $\vec{i}_3$  обернеться на нуль.

Згідно з (21) стаціонарний стан при заданому градієнті температури можливий тільки за умови, що є градієнт забруднювача. При цьому розподіл концентрації забруднювача  $\rho_3(\vec{r})$ , що виникає у просторі, впливає з (21), в якому слід  $\vec{i}_3$  покласти рівним нулю. Врешті-решт, маємо

$$D_{II} \rho_{\Sigma} \nabla \frac{\rho_3}{\rho_{\Sigma}} = -K_T \nabla T. \quad (22)$$

Якщо забруднювач такий, що  $K_T > 0$ , то область навкруги нагрітого твердого тіла очиститься від забруднювача. Якщо  $K_T < 0$ , то забруднювач буде сконцентрований навкруги нагрітого твердого тіла, де можна його дезактивувати. При дезактивації рівність (22) буде порушуватися. У цих умовах нові порції забруднювача будуть підходити до нагрітого твердого тіла, поблизу якого можна продовжувати його утилізацію (безумовно, замість нагрітого твердого тіла можна використати навіть багаття.)

Для термодифузійного розподілу забруднювача можна також використати охолоджене тверде тіло, або якусь область простору, в якій температура нижча за температуру навколишнього двокомпонентного газу. У цьому випадку, коли  $K_T > 0$ , забруднювач збереться навколо охолодженої області простору, а при  $K_T < 0$ , охолоджена область очиститься від забруднювача.

Потрібно, безумовно, враховувати, що градієнт температури може привести до конвективного руху двокомпонентного газу зі швидкістю  $\vec{V}_k$ . Наявність конвективного руху можна врахувати, але це вже інша задача.

Розглянемо рішення інших задач, виходячи з рівняння (14). На жаль, у загальному випадку рівняння (14) не можна вирішувати окремо від решти рівнянь повної системи, тому що поруч з  $\rho_3$  воно містить також швидкість  $\vec{V}_k$ , повну щільність  $\rho_{\Sigma}$ , тиск  $P$  та температуру  $T$ .

Між тим, якщо зробити низку припущень, які спрощують задачу, то рівняння (14) можна вирішувати, не враховуючи решту рівнянь повної системи. Перелічимо ці припущення:

1. Будемо вважати, що внесок термодифузії та бародифузії у зміну концентрації забруднювача  $\rho_3(\vec{r}, t)$  малий. Таке припущення виправдане, якщо температура та тиск постійні або досить слабо змінюються у просторі. Таке припущення виправдане також у випадку, коли  $K_T, \chi_T$  та  $K_P, \chi_P$  є малими. У цих випадках другий та третій доданки у правій частині рівності (18) – (20) будуть відсутні.

2. Не будемо враховувати залежність від координати  $\vec{r}$  сумарної щільності  $\rho_{\Sigma}$ .

Перше та друге припущення дадуть змогу записати рівності (18) – (20) у вигляді:

$$i_{xx} = -D_{II} \frac{\partial \rho_3}{\partial x}; \quad i_{yy} = -D_{II} \frac{\partial \rho_3}{\partial y}; \quad i_{zz} = -D_{\perp} \frac{\partial \rho_3}{\partial z}; \quad (23)$$

3. Швидкість конвективного руху  $\vec{V}_k$ , що міститься в (14), будемо вважати відомою. Це може бути, зокрема, швидкість вітру, що вимірюється незалежно.

Якщо підставити (23) у (14) та врахувати (11), то одержимо відносно шуканої концентрації забруднювача  $\rho_3(\vec{r}, t)$  рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \rho_3 \operatorname{div} \vec{V}_k + \vec{V}_k \nabla \rho_3 - \frac{\partial}{\partial x} D_{II} \frac{\partial \rho_3}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} D_{II} \frac{\partial \rho_3}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} D_{\perp} \frac{\partial \rho_3}{\partial z} = \\ = Q_{cm}(\vec{r}, t) + Q_{ож}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (24)$$

При отриманні рівняння (24) ми врахували, що

$$\operatorname{div} \rho_3 \vec{V}_k = \rho_3 \operatorname{div} \vec{V}_k + \vec{V}_k \nabla \rho_3, \quad (25)$$

щоб виділити внесок залежності швидкості  $\vec{V}_k$  від  $\vec{r}$  у зміну функції  $\rho_3(\vec{r}, t)$ . Цей внесок дає другий доданок у лівій частині рівняння (24).

Виходячи з рівняння (24), вирішимо низку задач, які реалізуються в практиці.

Розглянемо випадок, коли вітер відсутній, тобто  $\vec{V}_k = 0$ . Відсутні також джерела забруднення, тобто  $Q_{ож} = 0$ . Будемо вважати, що коефіцієнти вертикальної та горизонтальної дифузій однакові, тобто  $D_{II} = D_{\perp}$  та не залежать від координати. Будемо вважати також, що викиди забруднювача лінійно залежать від концентрації, тобто

$$Q_{cm} = -\sigma_{cm} \rho_3(\vec{r}, t), \quad (26)$$

де коефіцієнт пропорційності  $\sigma_{cm}$  передбачається постійним та позитивним.

Ці припущення дають змогу записати рівняння (24) у вигляді

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} = D_{II} \Delta \rho_3 - \sigma_{cm} \rho_3. \quad (27)$$

Рівняння (27) повинно бути доповнено початковими умовами, які задають розподіл концентрації забруднювача у початковий момент часу  $t = 0$ . Такий початковий розподіл задається функцією

$$\rho_3(\vec{r}, t = 0) = \rho_{03}(\vec{r}). \quad (28)$$

Рівняння (27) слід також доповнити граничними умовами на функцію  $\rho_3(\vec{r}, t)$ .

Для спрощення будемо вважати, що граничні умови відсутні. Таке передбачення виправдане, якщо об'єм газу, який досліджується, знаходиться досить далеко від границь, які впливають на зміни концентрації забруднювача у часі та у просторі.

Рішення рівняння (27) з початковою умовою (28) можна отримати, якщо функцію  $\rho_3(\vec{r}, t)$  подати у вигляді інтегралу Фур'є, тобто

$$\rho_3(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_k(t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3 K. \quad (29)$$

Підставлення (29) у (27) дає

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d\rho_k}{dt} + D_{II} K^2 \rho_k + \sigma_{cm} \rho_k \right\} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3 K. \quad (30)$$

З рівняння (30) випливає рівність

$$\frac{d\rho_k}{dt} + D_{II} K^2 \rho_k + \sigma_{cm} \rho_k = 0. \quad (31)$$

Рішення рівняння (31) запишемо у вигляді

$$\rho_{\kappa}(t) = \rho_0(\vec{K}) e^{-D_{II} K^2 t} e^{-\sigma_{cm} t}, \quad (32)$$

де  $\rho_0(\vec{K})$  вже не залежить від часу, але є функцією вектора  $\vec{K}$ .

Підставлення рішення (32) у (29) дає

$$\rho_3(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\vec{K}) e^{-D_{II} K^2 t} e^{-\sigma_{cm} t} e^{i\vec{K}\vec{r}} d^3 K. \quad (33)$$

Функція (33), очевидно, є рішенням рівняння (27). Треба підібрати таку функцію  $\rho_0(\vec{K})$  щоб задовольнялась початкова умова (28). Для цього покладемо у (33)  $t = 0$ . Після чого отримаємо

$$\rho_3(\vec{r}, t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\vec{K}) e^{i\vec{K}\vec{r}} d^3 K. \quad (34)$$

Згідно з (28) та (34), функція  $\rho_0(\vec{K})$  є функцією Фур'є – образ розподілення забруднення у початковий момент часу  $t = 0$ . Виходячи зі зворотного перетворення Фур'є, одержимо

$$\rho_0(\vec{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{03}(\vec{r}') e^{-i\vec{K}\vec{r}'} d^3 r'. \quad (35)$$

Підставляючи (29) у (33), отримаємо рішення, яке задовольняє рівняння (27) та початкову умову (28)

$$\rho_3(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\sigma_{cm} t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{03}(\vec{r}') e^{-D_{II} K^2 t} e^{i\vec{K}(\vec{r}-\vec{r}')} d^3 K d^3 r'. \quad (36)$$

Виконуючи у (36) інтегрування по  $\vec{K}$ , остаточно отримаємо

$$\rho_3(\vec{r}, t) = \frac{e^{-\sigma_{cm} t}}{8(\pi D_{II} t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{03}(\vec{r}') e^{\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4D_{II} t}} d^3 r'. \quad (37)$$

Результат (37) розв'язує поставлену задачу. З рішення (37) випливає, що концентрація забруднювача експоненціально зменшується. За час  $t_{cm} = \frac{1}{\sigma_{cm}}$  концентрація у кожній точці зменшується в  $e$  раз.

Подальше дослідження рішення (37) зручно провести в моделі простої початкової умови, коли в початковий момент часу маса забруднення  $M_0$  знаходиться у малому об'ємі, який міститься на початку координат. Така початкова умова апроксимується дельта-функцією з множником  $M_0$ , тобто

$$\rho_{03}(\vec{r}') = M_0 \delta(\vec{r}'). \quad (38)$$

Підставлення (38) у (37) дає

$$\rho_3(\vec{r}, t) = \frac{M_0}{8(\pi D_{II} t)^{3/2}} e^{-\sigma_{cm} t} e^{-\frac{r^2}{4D_{II} t}}. \quad (39)$$

Згідно з рішенням (39), в певний фіксований момент часу  $t$  характерна область, в якій буде помітна кількість забруднювача, що залишився, визначається розміром  $L_3$ , при якому показник другої експоненти порядку одиниці, тобто



$$\frac{L_3^2}{4D_{II}t} \approx 1 \text{ або } L_3 \approx 2\sqrt{D_{II}t}. \quad (40)$$

При цьому у всіх точках простору зменшення концентрації забруднювача за рахунок розпаду визначається множителем  $e^{-\sigma_{cm}t}$ .

**Висновок:** Рівняння (24) з заданими початковими та граничними умовами дає змогу прогнозувати розподіл концентрації забруднювача у просторі та у часі практично для всіляких можливих ситуацій. Низка рішень рівняння (24) з урахуванням деяких спрощувальних передумов наведена у відповідних публікаціях [9, 10].

#### Список літератури:

1. Ємець М.А. Особливості впливу гірничодобувних підприємств на довкілля і засновані на них принципи організації регіонального екологічного моніторингу // Екологія і природокористування. Зб. наук. праць ІППЕ НАН України. – Дніпропетровськ, 2010. – Вип. 13. – С. 164-176.
2. Копач П.І. Основні положення методології створення системи моніторингу навколишнього природного середовища гірничодобувних регіонів / П.І Копач, Н.В. Горобець, Т.Г. Данько, Л.В. Бондаренко // Екологія і природокористування : Зб. наук. праць ІППЕ НАН України. – Дніпропетровськ, 2009. – Вип. 12. – С. 181-187.
3. Волкова Т.П. Анализ выбросов загрязняющих веществ угледобывающих предприятий / Т.П. Волкова, В.В. Фалевич // Наук. праці ДонНТУ. Сер. гірничо-геологічна. – 2008. – Вип. 8 (136). – С. 44-50.
4. Информационный бюллетень за 2010 год. Состояние работ по прогнозу загрязнения воздуха в городах Украины, 2011. – 68 с.
5. Матеріали впровадження нового механізму регулювання викидів забруднюючих речовин в атмосферне повітря / за ред. С.С. Куруленка. – К.: ДЕІ Мінприроди України, 2007. – 216 с.
6. Дармофал Э.А. Моделирование распространения суммарного загрязнения воздуха при шахтной добыче полезных ископаемых / Библиотека ИВТН-2011. Информационно-вычислительные технологии в решении фундаментальных проблем и прикладных научных задач. // Сб. материалов. Москва, 2001. – с. 23-24 [www.ivtn.ru].
7. Дармофал Е. А., Адаменко Н. И. Техническое обслуживание систем наблюдения за экологически опасным влиянием шахтных выбросов на окружающую среду // Вестник ДГМА. – 2014. – № 1(32) – с. 39-42.
8. Екологія міста: Учебник. Под общ. ред. Ф.В.Стольберга – К.: Либра, 2000. – 464 с.
9. Захаренко О.В., Адаменко М.І., Клименко О.А. Підвищення безпеки життєдіяльності об'єктів хімічної промисловості шляхом моделювання заходів по локалізації надзвичайних ситуацій / О.В. Захаренко, М.І. Адаменко, О.А. Клименко // Системи озброєння і військова техніка. – Наук. Журнал. – № 2 (18). – Х.: Харків. ун-т Повітряних Сил, 2009. – С. 73 – 78.
10. Селіванов С.Є., Адаменко М.І. Проблеми забезпечення екологічної безпеки функціонування потенційно небезпечних об'єктів / С.Є. Селіванов, М.І. Адаменко // Збірник наукових праць ХНУ ім. Каразіна. – Х., 2010. – С.
11. Адаменко М.І. Зниження масштабів екологічного впливу аварій на потенційно небезпечних об'єктів шляхом їх своєчасного виявлення / М.І. Адаменко // Системи управління, навігації та зв'язку : Збірник наукових праць. – Вип. 4 (16). – К.: ДП «Центральний науково-дослідний інститут навігації і управління», 2010. – С. 240-243.
12. Адаменко М.І. Дослідження меж екологічного впливу хімічно небезпечних об'єктів на навколишнє середовище / М.І. Адаменко // Науковий вісник будівництва. – Вип. 35. – Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ, 2010. – С. 6-8.
13. Адаменко Н.И. Классификация чрезвычайных ситуаций по видам ресурсов, применяемых для их ликвидации / Н.И. Адаменко // Науковий вісник будівництва. – Вип.18 – Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ, 2002. – С. 11-13.

14. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы / М.Е. Берлянд. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 448 с.
15. Берлянд М.Е. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха / М.Е. Берлянд – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 163 с.
16. Вопросы ядерной метрологии / [ред. И. Л. Король, С. Т. Малахов] – М.: Госатомиздат, 1962. – 271 с.
17. Куценогий К.П. Рассеяние аэрозолей в приземном слое атмосферы / К.П. Куценогий // Прикладная механика и техническая физика. – 1970. – № 4. – С. 180-185.
18. Турбулентная диффузия в нижнем слое атмосферы : [ред. Н.Л. Вызова] – Л.: Гидрометеиздат, 1977. – Вып 15 (60). – 54 с.
19. Методы расчёта турбулентных течений : [ред. В. Кульман ; пер. с англ.] 1984. – 464 с.
20. Медников Е. П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей / Е.П. Медников. – М.: Наука, 1980. – 176 с.
21. Хинце И.О. Турбулентность, её механизм и теория / И.О. Хинце. – М.: Физматгиз, 1963. – 378 с.
22. Рабинович М.И. Регулярная и хаотическая динамика структур в течение жидкости / М.И. Рабинович, М.М. Сущик. – УФН, 1990. — Т. 160. – Вып 1. – С. 3-64.

