УДК 519.6

В. А. Третяк

ПРОБЛЕМА АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЛАЗЕРНОГО НАПЛАВЛЕННЯ

У статті досліджується проблема апроксимації результуючої функції в ході застосування адаптивних різницевих методів для розв'язування диференційного рівняння в частинних похідних, котре описує процес лазерного наплавлення порошкових матеріалів. Порівнюється метод інтерполяції Лагранжа та апроксимації раціональними кривими. Пропонується адаптивний метод вибору ваги точок каркасу раціональних кривих.

Ключові слова: *диференційне рівняння у частинних похідних, метод скінченних різниць, апроксимація, інтерполяційний поліном Лагранжа, раціональні криві*

1. Вступ

Лазерне наплавлення порошкових матеріалів є одним з провідних методів обробки поверхонь деталей [1]. Для дослідження цього процесу доцільно використовувати методи математичного та комп'ютерного моделювання. Математичною моделлю температурних полів при лазерному наплавленні є рівняння теплопровідності Фур'є [2]. Через такі особливості процесу, як високі градієнти температур, локальність впливу лазерного випромінювання й високу швидкість протікання процесів, виникає необхідність застосування адаптивних методів розв'язування диференційних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП).

2. Постановка проблеми

У роботі розглядається тривимірний випадок рівняння теплопровідності (1) з заданою початковою (2) і крайовими умовами, що моделюють взаємодію з середовищем (3) та нагрівання лазером (4):

$$\frac{\partial}{\partial t}C(U)U=\lambda\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

$$x\in[0,L_x],\ y\in[0,L_y],\ z\in[0,L_z],\ t\in[0,T_k], \quad (1)$$

$$U(x,y,z,0)=U_c\,, \quad (2)$$

$$\lambda\frac{\partial U}{\partial \overline{n}}+\alpha[U-U_c]=0\,, \quad (3)$$

$$\lambda\frac{\partial U(x,y,0,t)}{\partial z}+q(x,y)=0\,, \quad (4)$$

де C — коефіцієнт об'ємної теплоємності ($C=c\rho$); λ — коефіцієнт теплопровідності; L_x, L_y, L_z — ширина, довжина і глибина деталі, відповідно; T_k — час моделювання; U_c — температура оточуючого середовища; $\frac{\partial U}{\partial \overline{n}}$ — похідна температури за напрямком нормалі до границі деталі; α — коефіцієнт взаємодії з середовищем; $q(x,y)$ — функція розподілу потужності випромінювання.

Враховується залежність коефіцієнту об'ємної теплоємності від температури, що обумовлена фазовими переходами та композитною структурою порошку. Більш детально дана математична модель описана в роботі [3]. Для її розв'язання використовується метод скінченних різниць, що реалізується за шестиетапною схемою розщеплення по координатам, з адаптивною різницевою сіткою [4].

3. Основна частина

3.1. Аналіз літературних джерел по темі дослідження. У роботі [4] пропонуються і детально описуються методи побудови адаптивних різницевих сіток для розв'язання ДРЧП. У роботі [5] для моделювання лазерного наплавлення застосовуються наведені в [4] адаптивні методи побудови сітки з числовим сенсором, пропонується вдосконалення цього методу для розв'язання нелінійних нестаціонарних ДРЧП. Алгоритм розв'язання ДРЧП потребує дискретизації неперервної області визначення. Далі для переходу з поточного на наступний крок по часу необхідно виконати: апроксимацію шуканої функції на вузли нової різницевої сітки, побудову і розв'язання систем алгебричних рівнянь, оцінку похибки, адаптивне вдосконалення сітки.

3.2. Результати досліджень. У ході проведення чисельних експериментів було виявлено, що отримані значення температури навколо зони нагріву за деяких умов виявляються нижчими за температуру оточуючого середовища, що протирічить фізиці процесу. Було встановлено, що причиною таких аномальних значень є осциляції інтерполяційної функції Лагранжа. Очевидно, причиною осциляцій є високі градієнти функції температури.

Для більш детального вивчення цієї проблеми було розроблено програмне забезпечення для моделювання нагріву сталевого стержня, коефіцієнт теплоємності вважається сталим. Математичною моделлю процесу є одновимірне ДРЧП (5) з крайовими умовами і аналогічною (2) початковою умовою.

$$c\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right),\ x\in[0,L_x],\ t\in[0,T_k];$$

$$\lambda\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}+q=0;\ \lambda\frac{\partial U}{\partial x}+\alpha[U-U_c]=0, \qquad (5)$$

де c — коефіцієнт теплоємності; ρ — густина; інші параметри аналогічні описаним в формулах (1—4).

Варіюючи параметрами нагріву, вдалося отримати осциляції, подібні до тих, що спостерігалися при моделювання лазерного наплавлення (рис. 1).

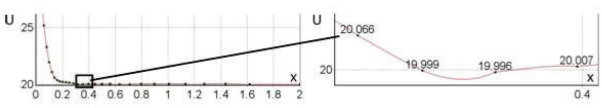

Рис. 1. Результати, отримані з використанням інтерполяції Лагранжа

Показані (рис. 1) результати були отримані під час моделювання нагріву стержня довжиною 2 см, параметри матеріалу стержня: c = 0.578e7 $\frac{\text{см}^2}{\text{с}^2\cdot{}^\circ\text{C}}$, ρ = 7.8e-3 $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, $\lambda = 4827$ $\frac{\text{кг}\cdot\text{см}}{\text{с}^3\cdot{}^\circ\text{C}}$, потужність лазера $q = 10^6$ $\frac{\text{кг}}{\text{с}^3}$. Використовувався метод інтерполяції Лагранжа 3-го порядку.

Для уникнення таких осциляцій пропонується застосовувати метод апроксимації раціональними кривими [6] третього порядку. Раціональні криві не дають перегинів результуючої функції, але у точках апроксимації апроксимована та апроксимуюча функції не співпадають. Для зменшення цього недоліку пропонується ітеративно підбирати ваги вузлів різницевої сітки таким чином, щоб крива не віддалялася від каркасу більше ніж на 10 %.

Розглянемо приклад результатів моделювання для таких самих геометричних та теплофізичних параметрів, але з використанням апроксимації раціональними кривими (рис. 2). Як видно з рисунку, при застосуванні цього методу апроксимації шукана температура не знижується нижче температури оточуючого середовища, і результуюча функція не має перегинів.

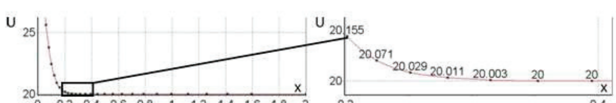

Рис. 2. Результати, отримані з використанням раціональних кривих

Висновки

Аналіз результатів моделювання процесу лазерного наплавлення виявив неправдоподібні значення температури, що виникли внаслідок перегинів інтерполюючої функції Лагранжа. Дослідження показали, що в середньому кількість вузлів неправдоподібними температурами при використанні методу інтерполяції Лагранжа складає для одновимірного випадку близько 20 % від загальної кількості вузлів, для тривимірного — 13 %. Застосування раціональних кривих дозволяє отримати достовірніші результати, хоча і потребує більшої кількості обчислювальних ресурсів і є складнішим для реалізації.

Література

1. Golovko L. F. Lia Handbook of Laser Materials Processing [Text] / L. F. Golovko [et. all]. — Orlando, USA : Laser Institute of America, 2001. — P. 249—258 (715 p.)
2. Incropera F. P. Fundamentals of Heat and Mass Transfer 6th ed [Text] / F. P. Incropera, D. P. DeWitt, T. L. Bergman. — New York, John Wiley&Sons, 2006. — 997 p.
3. Лазерні технології та комп'ютерне моделювання [Текст] / під ред. Л. Ф. Головка, С. О. Лук'яненка. — К. : Вістка, 2009. — 296 с.
4. Лук'яненко С. О. Адаптивні обчислювальні методи моделювання об'єктів з розподіленими параметрами [Текст] / С. О. Лук'яненко. — К. : ІВЦ Видавництво «Політехніка», 2004. — 236 с.
5. Головко Л. Ф. Моделирование адаптивным сеточным методом температурного поля при лазерной наплавке порошковых материалов [Текст] / Л. Ф. Головко [и др.] // Электронное моделирование. — 2009. — Т. 31, № 1. — С. 21—32.
6. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование [Текст] / Н. Н. Голованов. — М. : Издательство Физико-математической литературы, 2002. — 472 с.

ПРОБЛЕМА АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЛАЗЕРНОЙ НАПЛАВКИ

В. А. Третьяк

В статье исследуется проблема аппроксимации результирующей функции в процессе использования адаптивных разностных методов для решения дифференциального уравнения в частных производных, которое описывает процесс лазерной наплавки порошковых материалов. Сравнивается метод интерполяции Лагранжа и аппроксимации дробно-рациональными кривыми. Предлагается адаптивный метод выбора веса точек каркаса рациональных кривых.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, метод конечных разностей, аппроксимация, интерполяционный многочлен Лагранжа, рациональные кривые.

***Валерия Анатольевна Третьяк**, аспирант кафедры автоматизации проектирования энергетических процессов и систем Национального технического университета Украины «КПИ», **тел.: (050) 255-54-49, e-mail: valery.tretyak@gmail.com**.*

APPROXIMATION OF SOLUTION PROBLEM IN LASER MELTING SIMULATION

V. Tretyak

The article deals with approximation problem arising while partial differential equation solving using finite difference method with adaptive mesh refinement. The comparison of Lagrange polynomial interpolation and rational curves approximation is performed. An adaptive method of weight evaluation is suggested.

Keywords: partial differential equation, finite difference method, approximation, Lagrange polynomial interpolation, rational curves.

***Valery Tretyak**, Graduate student of Sub-department «Automation of projection of power processes and systems», National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», **tel.: (050) 255-54-49, e-mail: valery.tretyak@gmail.com**.*