УДК 517.9

О. О. Покутний

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

Отримано необхідну умову існування обмеженого на всій дійсній осі розв'язку сингулярно збуреної нелінійної системи за припущення, що відповідне варіаційне рівняння допускає експоненціальну дихотомію на півосях.

Ключові слова: *сингулярна система, експоненціальна дихотомія, нормально-розв'язний оператор.*

1. Вступ

Дослідження, про які йдеться у доповіді, відносяться до галузі прикладної математики та кібернетики. Вивчається умова існування обмеженого на всій осі розв'язку для слабко збуреної нелінійної системи спеціального вигляду. Системи такого вигляду використовуються для моделювання різного типу процесів. Серед них відзначимо задачі розповсюдження звуку, моделювання роботи серця та діяльності мозку, тощо. Дослідження в таких напрямках останнім часом стає все більш актуальним.

2. Постановка проблеми

Розглянемо систему диференціальних рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) + \varepsilon h_1(t,x,y), \ x \in R^n, & (1) \\ \dot{y} = g(x,y) + \varepsilon h_2(t,x,y), \ y \in R^m, & (2) \end{cases}$$

де $\varepsilon \geq 0$ — малий параметр, f, g, h_1, h_2 — двічі неперервно-диференційовні функції за сукупністю змінних. Будемо вважати, що виконано наступні припущення:

1. Існує така компактна множина

$S_1 \times S_2 \subset R^n \times R^m$,

що вироджена система

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ 0 = g(x,y), \end{cases}$$

має нетривіальний обмежений розв'язок $x = u(t)$, $y = v(t)$ в $S_1 \times S_2$.

2. Існує така константа $\delta > 0$, що модуль дійсних частин власних чисел матриці $g_y(u(t),v(t))$ розмірності $m \times m$ більше за δ.

Позначатимемо надалі $f_x(t) = f_x(u(t),v(t))$, $f_y(t)$, $g_x(t)$, $g_y(t)$ мають аналогічний сенс.

3. Варіаційна система

$$\dot{x} = (f_x(t) - f_y(t) g_y^{-1}(t) g_x(t)) x$$

є експоненціально-дихотомічною на півосях R_+, R_- з проекторами P, Q відповідно [1].

За виконання умов 1—3 треба знайти необхідну умову існування обмежених розв'язків системи (1), (2).

Зауважимо, що за припущення 2 для малого $\varepsilon > 0$ лінійна система

$$\varepsilon \dot{\eta} = g_y(t) \eta$$

є експоненціально дихотомічною на всій осі з проектором $P(\varepsilon)$ та фундаментальною матрицею $X(t,\varepsilon)$.

3. Основна частина

3.1. Аналіз літературних джерел по темі дослідження. В роботі Палмера [1] вперше поняття експоненціальної дихотомії було пов'язано з фредгольмовістю певного класу диференціальних систем. Це дало змогу дивитися на розв'язність різних класів задач по іншому. В фундаментальних монографіях [2], [3] результати такого сорту було розповсюджено на нетерові крайові задачі де для їх повного дослідження зручним виявився апарат псевдо обернених за Муром-Пенроузом матриць [4], [5]. Також відзначимо роботи [6], [7] в яких було узагальнено результати Палмера на нетеровий випадок та роботи [8], [9] в яких досліджуються нескінченновимірні диференціальні рівняння в просторі Банаха у найзагальнішому випадку, коли відповідний оператор є нормально-розв'язним.

Отриманий в даній роботі результат узагальнює відомі результати з теорії сингулярних диференціальних рівнянь, серед яких відзначимо роботу [9] (дивіться також бібліографію цієї роботи). Основний результат даного дослідження є більш загальним, ніж знайдений в [9] та отриманий при менш жорстких припущеннях. А саме, вдалося відмовитися від умови, що сума вимірів стійкого й нестійкого підпросторів дорівнює n. При цьому методика, яка використовується для його отримання дозволяє в декілька разів скоротити відповідне доведення. В [9] при отриманні основного результату використовувалася відома функція Мельникова, а при доведенні основного результату автором було використано так зване рівняння для породжуючих констант [8], що є більш загальним.

3.2. Результати досліджень. Основний результат сформулюємо у вигляді наступної теореми.

Теорема. Нехай для системи (1), (2) виконано умови 1—3. Тоді необхідною й достатньою умовою існування обмеженого на всій дійсній осі розв'язку для слабко збуреної нелінійної системи (1), (2) буде наступна умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{f_y(t)g_y^{-1}(t)[\dot{v}-h_2(t,u,v,0)]+h_1(t,u,v,0)\}dt=0$$

або умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t+\alpha)\{f_y(t+\alpha)g_y^{-1}(t+\alpha)[\dot{v}-h_2(t+\alpha,u,v,\alpha)]+h_1(t+\alpha,u,v,\alpha)\}dt=0$$

де α — довільне дійсне число,

$$H(t)=X(t,\varepsilon)P(\varepsilon)P_{N(D)},$$

$$D=P-I+Q.$$

Література

1. Palmer K. J. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points [Text] / K. J. Palmer // J. Differential Equations. — 1984. — vol. 55. — P. 225—256.
2. Бойчук А. А. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи [Текст] / **А. А. Бойчук**, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко. — К. : ІМ НАНУ, 1995. — 320 с.
3. Boichuk A. A. Generalized inverses and Fredholm BVP's [Text] / **A. A. Boichuk**, A. M. Samoilenko // VSP Utrecht-Boston, 2004. — 317 p.
4. Moore E. H. On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) [Text] / E. H. Moore // Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — vol. 26. — P. 394—395.
5. Penrose R. A Generalized Inverse for Matrices [Text] / R. Penrose // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1955. — vol. 51, № 3. — P. 406—413.
6. Бойчук А. А. Ограниченные на всей оси решения линейных слабовозмущённых систем [Текст] / А. М. Самойленко, **А. А. Бойчук** // Укр. матем. журнал. — 2002. — Т. 54, № 11. — С. 1517—1530.
7. Boichuk A. A. Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line [Text] / **A. A. Boichuk** // Nonlinear Oscillations. — 1999. — vol. 2, №1. — P. 3—10.
8. Бойчук О. А. Обмежені розв'язки слабконелінійних диференціальних рівнянь у банановому просторі [Текст] / **О. А. Бойчук**, О. О. Покутний // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 2. — С. 151—159.
9. Boichuk A. A. Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space [Text] / **A. A. Boichuk**, A. A. Pokutnyi // Tatra Mountains Mathematical Publications. — 2007. — Vol. 38. — P. 29—40.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

А. А. Покутный

Получено необходимое условие существования ограниченного на всей действительной оси решения сингулярно возмущенной нелинейной системы в предположении, что соответствующее вариационное уравнение допускает экспоненциальную дихотомию на полуосях.

Ключевые слова: сингулярная система, экспоненциальная дихотомия, нормально-разрешимый оператор.

Александр Алексеевич Покутный, *научный сотрудник лаборатории краевых задач теории дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Украины,* ***тел.: (099) 224-27-80, e-mail: lenasas@ukr.net***.

SYNGULARLY PERTURBED NONLINEAR SYSTEMS

O. Pokutnyi

Necessary condition for existence of bounded solution on the whole real axis of singular perturbed nonlinear system is obtained under assumption that variation equation admits exponential dichotomy on both semi-axes.

Keywords: singular system, exponential dichotomy, normally-resolvable operator.

Oleksander Pokutnyi, *research assistant, laboratory of boundary value problems of the theory of differential equations, Institute of mathematics of National Academy of Sciences,*
tel.: (099) 224-27-80, e-mail: lenasas@ukr.net.