**УДК 519.863+519.716.4**
**DOI: 10.15587/1729-4061.2020.195379**

# Розробка методу структурного функціонально-вартісного моделювання складної ієрархічної системи

**М. В. Коробчинський, М. Ю. Слонов, С. І. Цибульський, В. Н. Дереко, О. О. Марилів**

*Запропонований метод структурного функціонально-вартісного моделювання складної ієрархічної системи. Визначені вихідні дані для проведення розрахунків за безпосередньо функціонально-вартісною моделлю. Запропонований та обґрунтований вартісний опис складної системи та її складових за допомогою аналітичних апроксимуючих залежностей. Приклад функціонально-вартісного алгоритму із застосуванням методу множників Лагранжа наведений для складних систем з послідовним сполученням окремих її частин. Вирішенням прикладу є розподіл між бажаними ймовірностями ефективного функціонування окремих частин з точки зору мінімальної вартості. Отримання такого розподілу не потребує абсолютних значень вартості як частин, так і всієї системи. До питань, що вирішуються при вартісній раціоналізації, відносяться такі: забезпечення заданого рівня функціональної досконалості системи при її мінімальній вартості; визначення мінімально необхідного рівня функціональної досконалості однієї ланки при відомих рівнях функціональної досконалості системи та всіх інших ланок крім тої, що досліджується; визначення необхідної кількості паралельно діючих ланок однакового призначення; з'ясування необхідного рівня функціональної досконалості ланок (датчиків інформації, ланок обробки інформації, каналів зв'язку), що мають паралельне сполучення; структурне удосконалення складної системи за рахунок вибору ланки системи, для якої підвищення функціональної досконалості може здійснитися з мінімальною вартістю. Запропоновані правила структурної раціоналізації складної системи. Першим з них є правило раціональної структурної будови складної системи. Воно дозволяє отримати достатню користь від складної системи при мінімальних витратах. Другим є правило доцільності ускладнення складної системи. Згідно нього, ускладнення складної системи доцільне тільки у випадку, коли при цьому зростає функціональна досконалість всієї складної системи. Третє правило – правило правильної будови – показує, що у складній системі відсутні зайві ланки, тобто такі ланки, які не виконують функціонально необхідних для даної системи дій*

*Ключові слова: структурні функціонально-вартісні моделі, складні ієрархічні системи, функціонально-вартісні розрахунки, апроксимуючі функції*

## 1. Вступ

Створення, експлуатація та удосконалення складних людино-машинних ієрархічних структур є надзвичайно витратною та неоднозначною справою. Для обґрунтованого прийняття рішення на необхідні дії при вирішенні цих задач важливо хоча б приблизно уявляти собі особливості функціонування та узагальнені характеристики таких систем, їх складових на кожному з етапів робіт. Це дозволить прогнозувати потрібні людські, матеріальні, техніко-технологічні та фінансові ресурси на моделювання можливих варіантів подальшого функціонування конкретної системи.

Результати такого прогнозу дозволять своєчасно обирати найбільш ефективний варіант її будови щодо даних конкретних вимог та етапу робіт. На досягнення цього спрямовані існуючи методи функціонально-вартісного моделювання складної ієрархічної системи. Але суттєвим обмеженням існуючих методів є утруднення виходів на параметричний опис як самої складної системи, так і її складових. Це звужує можливості пошуку компромісних варіантів визначення значень функціональних параметрів та характеристик системи й її складових. Тому розробка методів і способів функціонально-вартісного аналізу, що дозволяють виходити на вимоги щодо уточнення раціональних значень параметрів та характеристик як системи, так і її складових є актуальними.

**2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми**

Найбільш повно підходи до оцінювання ефективності складних систем розглянуті у [1]. В роботах [2, 3] наведені сучасні варіанти підходів до одержання логічних висновків стосовно змісту та порядку функціонально-технологічного супроводження розробки складних систем. В них пропонується приймати рішення за результатами аналізу спеціально організованих масивів даних. Фізична різнорідність таких систем, залежність конкретних значень показників їх функціонування від великої кількості в тому числі і стохастичних впливових чинників змусили розробити методи імовірнісних оцінок ефективності [4]. Складнощі, а частіше неможливість аналітичної (алгоритмічної) формалізації функціонування складних систем, навели до поширення експертних методів оцінювання [5]. Сучасний варіант їх реалізації розглянутий у [6]. Але перехід до параметричного опису складної системи в таких методах неоднозначний.

Оскільки крім функціонального навантаження складні системи повинні відповідати вимогам щодо їх економічної обґрунтованості важливою часткою етапів роботи зі складною системою є розробка та використання її функціонально-вартісних моделей, як, наприклад, у [7]. Призначення таких моделей – пошук варіанта будови складної системи, при реалізації якого заданий рівень функціональності досягається за рахунок мінімальних вартісних витрат. Але як у роботі [7], так і інших, що аналізувалися авторами, увага приділяється удосконаленню вузько спеціалізованих складних систем [8, 9]. Узагальнюючі підходи, напрями їх удосконалення не розглядалися.

Варіантом подолання таких труднощів може бути застосування нейронних алгоритмів. Саме такий підхід використаний в роботах [10, 11]. Однак і в даному випадку вихід на параметричний опис складної системи в аналітичному вигляді не розглядається.

Зауважимо, що підвищення функціональності системи пов'язане, як правило, з підвищенням її вартості. Функціональність і вартість системи є її конкуруючими, суперечливими властивостями. Спроба знайти раціональний підхід до їх співвідношення реалізується при функціонально-вартісному моделюванні, як це здійснено у [12]. Але і в цій роботі розглянутий окремий випадок застосування функціонально-вартісної раціоналізації на прикладі удосконалення навчального процесу як складної системи.

Але обґрунтований підхід до визначення параметричного впливу окремої складової на узагальнені показники вартості складної системи за допомогою існуючих функціонально-вартісних методів утруднений. Це визначається майже неможливістю строго аналітично зв'язати вартість системи та її рівень функціональної досконалості. Крім того, комплексно не вирішуються наступні задачі: визначення складових системи, удосконалення яких найбільш раціональне з вартісної точки зору за умовою збереження заданого рівня її функціональності; висунення вимог до мінімально необхідного рівня функціональної досконалості складової, що планується до включення у систему, без зміни заданого рівня функціональної досконалості самої системи. І все це – за умовою мінімально можливої вартості системи або її складових.

Таким чином, можна стверджувати, що проведення дослідження з введенням поліноміальної апроксимуючої залежності вартості складної системи від рівня її досконалості є корисним. Це може дозволити більш обґрунтовано підходити до визначення параметричного впливу підсистеми на узагальнені показники функціональної досконалості та вартості всієї складної системи. Використання поліноміальних апроксимуючих залежностей переводить якісний рівень обґрунтування раціонального існування складної системи у кількісний аналіз. За наявністю статистичних даних він дозволяє максимально точне параметричне керування функціональною придатністю складної системи при мінімальній її вартості. За відсутністю таких даних він допомагає більш свідомо підійти до параметричного та структурного удосконалення складної системи.

Практичне застосування методу структурного функціонально-вартісного моделювання складної ієрархічної системи при поліноміальній апроксимуючій залежності вартості складних систем від рівня їх функціональної досконалості передбачає формалізацію механізмів його реалізації. Невирішеними проблемними складовими щодо застосування такого методу є особливості завдання рівня функціональної досконалості складної системи, її вартості та порядок структурних функціонально-вартісних розрахунків.

### 3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є розробка механізмів реалізації методу структурного функціонально-вартісного моделювання складної ієрархічної системи при поліноміальній апроксимації залежності вартості складної системи та її складових від рівня функціональної придатності системи. Це дасть можливість практичного застосування даного методу для функціонально-вартісного аналізу складних систем різного виду.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– сформулювати вихідні дані для проведення розрахунків за функціонально-вартісною моделлю складної системи при поліноміальній апроксимації залежності вартості складної системи та її складових від рівня функціональної придатності системи;

– розробити порядок структурних функціонально-вартісних розрахунків складної системи при поліноміальній апроксимації залежності вартості складної системи та її складових від рівня функціональної придатності системи для раціональної її будови.

**4. Вихідні дані для проведення розрахунків за безпосередньо функціонально-вартісною моделлю**

В якості вихідних даних для проведення розрахунків за функціонально-вартісною моделлю вважаємо наступне:

– аналіз типів функціонально-вартісних моделей;

– вибір узагальненого показника структурної функціональної досконалості системи;

– розробку підходу до поліноміальної апроксимації залежності вартості складної системи від узагальненого показника її функціональної досконалості.

**4. 1. Аналіз типів функціонально-вартісних моделей**

Класифікацію функціонально-вартісних моделей будемо проводити відповідно до способу включення інформації щодо вартості системи, її складових до критерію оцінки ефективності функціонування системи. Тобто це залишається тою самою оцінкою ефективності системи, але за умовою віднесення її вартості до важливішого обмежуючого часткового критерію. При цьому можна виділити три типи будови математичних функціонально-вартісних моделей: безпосередньо функціонально-вартісні моделі; відносні функціонально-вартісні моделі, комплексні функціонально-вартісні моделі (рис. 1).

Звернемо увагу на особливості їх опису.

До безпосередньо функціонально-вартісних моделей відносяться такі, що у якості узагальненого критерію використовують безпосередньо вартість системи, що досліджується. Основним припущенням при використанні цих моделей є адитивність вартості $C_i$ окремих частин системи відносно загальної вартості $C_\Sigma$ всієї системи [13]:

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} C_i, \qquad (1)$$

де $n$ – загальна кількість складових частин системи.

Вирішальним правилом будови системи з точки зору зменшення її вартості буде розглядатись вимога:

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} C_i = \min. \qquad (2)$$

Співвідношення (2) показує, що найбільш ефективна у вартісному плані проста ($n \to 0$) та дешева ($C_i \to 0$) система.

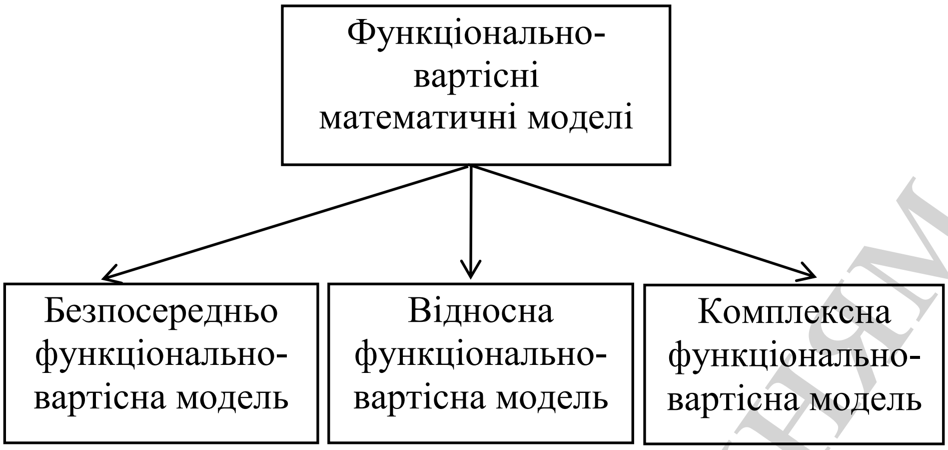


Рис. 1. Функціонально-вартісні математичні моделі

Але кожна система виконує певні функціональні завдання. Будучи достатньо дешевою така система може зовсім не задовольняти необхідному рівню функціонального призначення. Тому співвідношення (2) доповнюють умовою виконання функціональної досконалості $P$ системи. Оскільки між вартістю системи та її функціональною досконалістю є безумовна залежність, для оптимального випадку можна записати наступну вимогу:

$$P_\Sigma = P\left[C_i\right] \to \max,$$
$$C_\Sigma = \min.$$

В раціональному вигляді вона виглядатиме так [12]:

$$P_\Sigma = P\left[C_i\right] \geq P_{\text{зад}}, \;\; C_\Sigma = \min, \tag{3}$$

де $P_\Sigma$ є узагальненим показником функціональної досконалості системи, наприклад, її ефективність, функціональність, імовірність виконання завдання; $P[C_i]$ – функціонал, що показує залежність виконання системою завдання від вкладених в кожну її складову коштів; $P_{\text{зад}}$ – заданий рівень функціональної досконалості.

Співвідношення (3) можуть розглядатися як раціональна вартісна (функціонально-вартісна) математична модель системи, що досліджується. Для її використання необхідно визначитися з достатнім рівнем функціональної досконалості $P_{\text{зад}}$ системи. Він є нормативною або заданою величиною. Важливо з'ясувати залежність вартості кожної частини (ланки) системи від її параметрів та отримати існуючи чисельні оцінки вартості цих частин.

Відносна функціонально-вартісна модель є одним з варіантів використання узагальнених коефіцієнтів корисності $k_\Sigma$ [1]. Такий коефіцієнт $k_\Sigma$ вводиться як відношення критерію, що відповідає за функціональну досконалість $P_\Sigma$, до загальної вартості $C_\Sigma$. Узагальнений коефіцієнт корисності $k_\Sigma$ буде тім вище, чім вище функціональна досконалість системи, її ланки при менших вартісних витратах:

$$k_\Sigma = \frac{P_\Sigma}{C_\Sigma}. \tag{4}$$

Таким чином, правилом вартісної оптимізації системи за відносною функціонально-вартісною моделлю можна вважати співвідношення:

$$k_\Sigma = \frac{P_\Sigma}{C_\Sigma} = \max. \tag{5}$$

Необхідно звернути увагу на те, що значення коефіцієнту $k_\Sigma$ не мають узагальненого фізичного змісту та конкретних одиниць вимірювання. Якщо величини $P_\Sigma$ та $C_\Sigma$ нормовані, то значення коефіцієнту $k_\Sigma$ співвідносяться серед систем одного класу. При ненормованих коефіцієнтах $P_\Sigma$ та $C_\Sigma$ поточне значення $k_\Sigma$ характеризує рівень досконалості тільки системи, що досліджується.

Для оптимальної у вартісному відношенні системи необхідно знайти єдине співвідношення між критерієм функціональної досконалості системі та її вартістю, при якому воно достигає максимуму. Але реальні технологічні, організаційні, фізичні та інші обмеження не дозволяють безмежно збільшувати рівень функціональної досконалості системи. Тому більш доцільний раціональний підхід.

Прагматичний (раціональний) підхід до використання виразу (5) міститься у завданні необхідного рівня $P_{зад}$ та мінімізації витрат $C_\Sigma$. Саме раціональний підхід використовується на практиці. Вираз (5) перетворюється на правило раціоналізації:

$$k_\Sigma = \frac{P_{зад}}{C_\Sigma} = \max. \tag{6}$$

Використання співвідношення (6) передбачає попереднє складання алгоритмів розрахунку величин $P_{зад}$ та $C_\Sigma$. Розглянемо їх.

Величина $P_{зад}$ має імовірнісний характер. Це є слідством залежності остаточної функціональної ефективності кожної складної системи від достатньо великої кількості випадкових факторів. Тоді можна вважати:

$$P_\Sigma = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - P_j\right) \geq P_{зад}, \tag{7}$$

де $k$ є кількістю незалежних впливових факторів, що зменшують функціональну досконалість системи.

Чим більш повно вониураховані, тім більше величина $k$ та ближче до дійсності вираз (7). Імовірнісна характеристика $P_j$ оцінює вплив $j$-го фактору.

Звернемося до порядку завдання величини $C_\Sigma$. Витрати $C_\Sigma$ залежать від складності системи, яку можна характеризувати правильністю її будови, кількістю складових частин $n$, сполучень $l$ між ними, а також експлуатаційними витратами на підтримку життєдіяльності системи (в тому числі, і її утилізації).

Якщо $\Psi(n, l)$ – функція вартості сполучень між частинами системи та експлуатаційних витрат, то:

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} C_i + \Psi(n,l) = \sum_{i=1}^{n} C_i + \Psi_1(l) + \Psi_2(l+n), \tag{8}$$

де $\Psi_1(l)$ та $\Psi_2(l+n)$ є функціями вартості сполучень та експлуатаційних витрат відповідно.

Але, якщо сполучення між частинами системи вважати окремими елементами, можна записати:

$$\Psi_1(l) = \sum_{i=1}^{l} C_j. \tag{9}$$

Доцільно формалізувати і функцію $\Psi(l+n)$. Для цього, у простішому випадку, рівень витрат за одиницю часу експлуатації (в залежності від задачі, що розглядається, – день, рік, цикл чи період експлуатації та таке інше) вважатиме пропорційним вартості елементу. Тоді:

$$\Psi_2(l+n) = a\sum_{i=1}^{l+n} C_j, \tag{10}$$

де $a$ оцінює середньостатистичний коефіцієнт пропорційності.

Вираз (8) з урахуванням (9), (10) набуде вигляду:

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{l} C_i + \sum_{i=1}^{n} C_i + a\sum_{i=1}^{l+n} C_i = \sum_{i=1}^{l+n} C_i + a\sum_{i=1}^{l+n} C_i = (1+a)\sum_{i=1}^{l+n} C_i. \tag{11}$$

Таким чином, система співвідношень (5), (7), (11) є відносною функціонально-вартісною моделлю раціональної будови складної системи. Її узагальнений вид записується таким чином:

$$
\begin{cases}
k_{\Sigma} = \dfrac{P_{\Sigma}}{C_{\Sigma}} = \max, \\
P_{\Sigma} = \sum\limits_{j=1}^{k} \left(1 - P_j\right) \geq P_{\text{зад}}, \\
C_{\Sigma} = \left(1 + a\right) \sum\limits_{i=1}^{l+n} C_i.
\end{cases} \tag{12}
$$

Система (12) дозволяє крім операцій, що є характерними для безпосередньо функціонально-вартісної моделі, ще одну дію. Зміст її у наступному.

При правильній будові системи вкладання в неї додаткових коштів, зусиль повинно збільшити її функціональні можливості. Але зі збільшенням системи такі додатки приводять до все менших зростань функціональних можливостей. Тому перше рівняння системи (12) можна назвати рівнянням вартісної ефективності. Якщо при зростанні коштовних внесок при зростанні показника функціональної ефективності зростає і значення коефіцієнту $k_{\Sigma}$, то можна вважати такі вкладання доцільними. Якщо при зростанні вкладань в систему коефіцієнт $k_{\Sigma}$ не збільшується (величина $P_{\Sigma}$ зростає з меншою інтенсивністю порівняно з $C_{\Sigma}$ ), то такі внески не є доцільними.

Останній рівень розглянутої класифікації – комплексна функціонально-вартісна модель. Вона передбачає розгляд вартості системи як окремого часткового критерію серед низки інших критеріїв. Оцінювання вартісної ефективності системи при цьому реалізується у багатомірному просторі.

Кожна координата такого простору є частковим критерієм ефективності існування системи: вага, експлуатаційна надійність, габарити, обов'язкові імовірність виконання завдання та вартість, інші критерії, що важливі для даного випадку дослідження системи. Задача, що вирішується, зводиться до вибору найкращого варіанту існування системи з урахуванням впливу усіх часткових критеріїв (рис. 2).

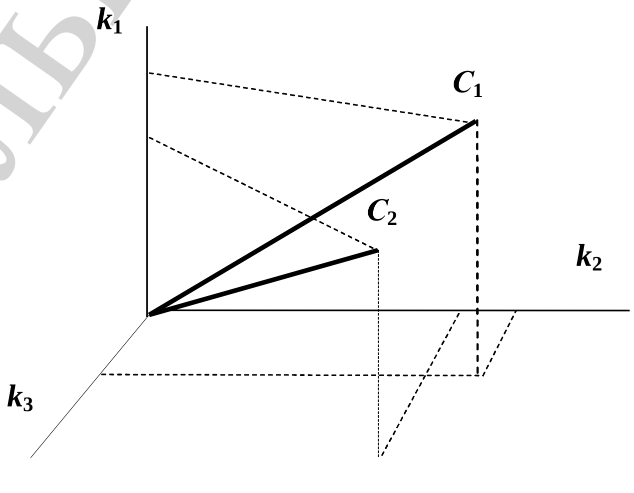


Рис. 2. Приклад тримірного простору існування систем $C_1$ та $C_2$ у координатах часткових критеріїв $k_1$, $k_2$ та $k_3$

Кожному варіанту існування системи у просторі координат відповідає одна точка. До неї можна провести з начала координат радіус-вектор, розмір якого буде еквівалентом загальної корисності варіанту будови системи, що розглядається. Цей розмір буде визначати величину узагальненого критерію ефективності системи.

Фізичного змісту узагальнений критерій не має. Порівнювати абсолютні значення узагальнених критеріїв можливо тільки для систем, що досліджуються в однакових системах координат та за однаковими алгоритмами.

Аналітично хід визначення узагальненого критерію $k_\Sigma$ наближається до попереднього випадку. Вважають, що для $j$-го варіанту будови системи він тім краще (вище), чим вище споживча вартість $\mathrm{СВ}_j$ такого варіанту системи при даному рівні витрат $\mathrm{В}_j$ на неї. Таким чином, $j$-й варіант побудови системи буде характеризуватися виразом:

$$k_\Sigma = \frac{\mathrm{СВ}_j}{\mathrm{В}_j} = \frac{f_j\left(k_k;\, k = 1,n\right)}{\varphi_j\left(k_k;\, k = 1,n\right)}, \tag{13}$$

де $\mathrm{СВ}_j = f_j(...)$, $\mathrm{В}_j = \varphi_j(...)$ розглядають як функціонали споживчої вартості та витрат відповідно щодо $n$ часткових критеріїв $k_k$.

Правилом оптимального вибору варіанту будови системи є умова:

$$k_\Sigma = \frac{\mathrm{СВ}_j}{\mathrm{В}_j} = \frac{f_j\left(k_k; k = 1,n\right)}{\phi_j\left(k_k; k = 1,n\right)} \to \max_{k_k \in Q,\, j=1,m}, \tag{14}$$

тобто досліджуються $m$ варіантів будови системи за умовою належності всіх часткових критеріїв до області $Q$ їх існування.

Рівняння (14) є кінцевою умовою в задачах математичного програмування. Точне його рішення передбачає знання аналітичних залежностей $f_j(...)$ та $\varphi_j(...)$. Але частковими критеріями є фізично та логічно різнорідні показники. Деякі з них просто важко формалізувати (наприклад, сучасність, ергономічність, експлуатаційна зручність та таке інше), а тим паче об'єднати в єдине співвідношення.

Спростити задачу вдається припущенням щодо адитивності узагальненого критерію відносно часткових. При такій передумові загальна вигода від правильно прийнятого рішення складається з вигод, що отримані по кожному частковому критерію.

Аналітично правило оптимальності вибору у цьому випадку описується основним рівнянням лінійного програмування:

$$k_\Sigma = \frac{\mathrm{СВ}_j}{\mathrm{В}_j} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} k_k \to \max_{k_k \in Q,\, j=1,m}, \tag{15}$$

де $\beta_{kj}$ – значущість часткового критерію $k_k$; $k_k$ – вже відносне значення часткового критерію.

Рівняння (15) вільне від низки обмежень. Відсутні необхідність погодження одиниць вимірювання його складових величин, воно дозволяє аналізувати внесок кожного часткового критерію у загальний, але вимагає у кожному конкретному випадку вирішувати наступні дві труднощі.

По-перше, це наявність альтернативної спрямованості раціональних значень часткових критеріїв. Деякі критерії покращуються разом із їх збільшенням (якість, надійність, імовірність виконання функціональної мети). Інші критерії, навпаки, для підняття їх раціональності необхідно зменшувати (вартість, трудомісткість, експлуатаційні витрати). Є критерії, у яких рівень раціональності визначається поставленою задачею (певні, задані вага, розмір, час виконання).

По-друге, це завдання значущості $\beta_{kj}$ часткових критеріїв. Їх можна задавати за результатами попередніх випробувань, перебором можливих варіантів, використанням деяких аналітичних засобів.

Цих недоліків не має експертний варіант комплексної функціонально-вартісної моделі [14]. Будова її заснована на методі попарного порівняння з визначенням пріоритетів між частковими критеріями та варіантами будови системи. Розрахунки при цьому проводяться не з конкретними фізичними значеннями критеріїв, а з призначеними для них експертами абстрактними чисельними значеннями, результатами порівнянь. Призначення абстрактних чисельних значень (порівняльних оцінок) відбувається при попарному порівнянні експертом таких величин (часткових критеріїв чи варіантів системи).

Відмітимо, що у цьому випадку йдеться річ вже не про оптимальний вибір, а тільки про раціональний, тобто наближений до оптимального вибір. Таке положення є слідством призначення пріоритетів окремими експертами, точка зору яких завжди суб'єктивна. У певній мірі це обмеження компенсується кваліфікованим відбором експертів-фахівців, а також статистичним підходом до обробки результатів порівняння.

Формально правило раціонального вибору в цьому випадку може бути записаним у виді, аналогічному (15). З урахуванням багатомірності існування узагальненого критерію та для спрощення математичної обробки результатів порівняння такий вираз записується у векторній формі:

$$k_{\Sigma} = \frac{CB_j}{B_j} = \beta_{kj} k_k \to \max_{k_k \in Q,\, j=\left(\overline{1,m}\right)}, \tag{16}$$

де $\beta_{kj}$ – пріоритет $j$-го варіанту системи по $k$-му критерію; $k_k$ – пріоритет $k$-го критерію.

Використання правила (16) до всіх $m$ моделей ставить у відповідність кожному варіанту будови системи, що досліджується, своє значення коефіцієнту $k_{\Sigma j}$. Перелік коефіцієнтів формує вектор $k_{\Sigma}$.

Багатокритеріальний підхід дозволяє у кожному випадку розглядати вартість не як домінанту будови системи, а зважити її між інших впливових факторів на існування системи [14]. При цьому з'являється можливість проаналізувати внесок кожного часткового критерію до критерію узагальненого. Таким чином, виявляються фактори, які вимагають найбільшої уваги з точки зору покращення рівня існування системи.

Механізми розрахунків порівняльних пріоритетів, як і в попередніх випадках, дозволяють досліджувати системи у параметричній області та розробляти засоби управління частковими критеріями.

Безпосередньо функціонально-вартісна модель ґрунтується на припущенні щодо прямої залежності між вартістю системи, що досліджується, та ступенем виконання нею функціонального призначення. Це стосується як системи в цілому, так і кожної її окремої частини. Тому процес функціонально-вартісної оптимізації в цьому випадку описується такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} C_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{m} C_j = \min, \\ P_{\Sigma} = P_{\Sigma}\left[C_j\right] = \max. \end{cases} \tag{17}$$

Рішення системи (17) можливо тільки у тому випадку, коли функції $P_{\Sigma}$ та $C_j$ аналітично задані і повністю адекватні фізичним, суспільним та іншим процесам, що супроводжують існування системи, що досліджується. Але точні вирази для таких рівнянь на практиці не використовуються з-за труднощів та неоднозначності їх алгоритмізації. Тому прийнято розробляти апроксимуючі алгоритми для опису функцій вартості та імовірнісної залежності функціональної досконалості системи та її складових. Це знов підкреслює, що розглядатиметься у кожному типі функціонально-вартісної моделі не оптимізація, а раціоналізація будови системи.

### 4. 2. Вибір узагальненого показника структурної функціональної досконалості системи

Перейдемо до вибору узагальненого показника структурної функціональної досконалості системи. Функціональна досконалість системи (фізична спрямованість, узагальнені якісні та кількісні вимоги) визначається відповідністю результатів її роботи очікуваним значенням, рівням. Для поширеної оцінки рівня функціональної досконалості системи розробляються якісні та кількісні показники, які затверджуються у нормативній та монографічній літературі. Для системи вищої освіти, наприклад, це можливість реалізації певних форм навчання у конкретному навчальному закладі. Для систем спостереження об'єктів – це певна глибина, обсяг інформації про об'єкт при урахуванні можливостей етапів планування, спостереження, обробки результатів та їх представлення.

Зі збільшенням будь-якої системи значно урізноманітнюється складність і кількість таких показників (а кожен з них залежить від декількох параметрів),важчає опис точного зв'язку між конкретними параметрами системи та її функціональними показниками. Тому при опису великих систем частіше застосовують імовірнісні показники, які, по-перше, надають можливість опису щодо впливу на функціональну придатність всіх параметрів системи, які формують її функціональну досконаліcть, по-друге, відображають стохастичність поведінки великої системи і, по-третє, дозволяють не шукати точні функціональні залежності, а виявляти тенденції таких залежностей [15].

Безумовною перевагою використання імовірнісних показників є можливість створення та відносна простота формування узагальненого критерію функціональної досконалості, який за змістом відповідає узагальненому критерію ефективності системи.

Під ним можна розглядати імовірність $P_{\Sigma}$ виконання системою поставленої задачі при поточному значенні її параметрів. Як правило, узагальнений критерій буде залежати від ряду інших імовірнісних показників нижчого рівня – часткових критеріїв $P_j$.

Вони визначаються імовірністю виконання складовими частинами системи своїх функціональних призначень. Часткові критерії в даному випадку відображають імовірність виконання системою окремих вимог узагальненого критерію.

Якщо часткові критерії $P_j$ відносно узагальненого критерію $P_{\Sigma}$ та один від одного можуть вважатися незалежними, то друге рівняння системи (17) при послідовному виконанні складовими частинами системи своїх функціональних призначень буде мати такий вигляд:

$$P_{\Sigma} = \prod_{j=1}^{k} P_j = \max, \tag{18}$$

де $k$ є кількістю часткових критеріїв.

В даному випадку часткові критерії оцінюють функціональну придатність окремих частин системи. Виконується рівність $k=m$: – кількість окремих ланок складної системи дорівнює кількості часткових критеріїв.

Рівняння (18) показує, що досконалість функціонування системи залежіть від якості її складових та їх організації у систему. Перелічені складові визначаються вартістю системи, тобто $P_j=P_j[C_j]$. Чим вище витрати (коштів, різноманітних засобів, зусиль) на існування системи, тім більш корисним повинен бути очікуваний результат функціонування системи. Того ж висновку можна дійти при розгляданні часткових критеріїв у вигляді складових узагальненого критерію.

Таким чином, вартість системи чи окремої її частини також є узагальненим критерієм. Але це справедливо тільки при правильній будові системи, коли збільшення коштів, (засобів, зусиль), що вкладені у існування системи, веде до підвищення імовірності виконання нею поставленої задачі.

Функціональна ефективність, вартісна ефективність – вони завжди конкуренти. Як правило, коли ми підвищуємо функціональну ефективність системи, її вартісну ефективність ми зменшуємо. За змістом саме функціональна ефективність формує ефективність вартісну, хоча остання параметрично описується своїми чинниками, параметрами: вартістю та кількістю деталей, вузлів системи, що досліджується, кількістю екземплярів системи в серії, потрібною кваліфікацією виробників та споживачів тощо. Такі параметри безпосередньо не залежать від параметрів функціональних – точність, достовірність, надійність, безперервність та ін.

Крім того, можна ввести ще і інші види ефективності, наприклад, ефективність ергономічна, ефективність експлуатаційна, екологічна тощо. Наведені поняття ефективності також складні, тобто визначаються своїми, безпосередньо незалежними групами параметрів. Але є у таких складових одна загальна властивість. Як правило, їх підвищення наводить до зменшення вартісної ефективності.

Імовірне, існує поняття загальної ефективності системи як функції всіх її незалежних складових. Раціоналізація загальної ефективності системи може проводитись паралельно за всіма складовими, що вкрай ускладнює і математичний, і технологічний процеси її реалізації. Може вона проводитись послідовно, наприклад, попарно: функціональна та вартісна, ергономічна та вартісна, екологічна та вартісна і так далі. Присутність вартісної ефективності на всіх етапах виправдовується іі залежністю від всіх інших складових загальної ефективності системи.

Важливе передбачити, щоб при такому послідовному підході наступний етап раціоналізації загальної ефективності не наводив до втрати добутків попередніх етапів. Для цього визначені раціональні значення ефективності попередніх етапів можна вважати обмеженням, початковими умовами для виконання всіх наступних етапів.

Бажаним рівнем функціональної ефективності системи буде $P_{\Sigma}=1$. Але імовірнісний підхід до опису узагальненого критерію дозволяє тільки орієнтуватися на бажане значення. Для діючих систем необхідний мінімальний рівень такого критерію задається величиною $P_{\text{зад}}$. Тому рівняння (18) переписують як раціональну умову:

$$P_{\Sigma} = \prod_{j=1}^{m} P_j \geq P_{\text{зад}}. \tag{19}$$

Умова (19) не тільки задає необхідний рівень ефективності всієї системи. За її допомогою можна визначати задовільний рівень ефективності окремої частини $P_{j,\text{зад}}$, якщо діючи ефективності інших частин системи відомі:

$$P_{\text{j,зад}} \geq \frac{P_{\text{зад}}}{P_1 P_2 \ldots P_{j1} P_{j+1} \ldots P_m}. \tag{20}$$

Вираз (20) необхідний при оцінюванні доцільності подальшого ускладнення системи. Її використання дає відповідь на питання: чи можлива реалізація частини системи із задовільним значенням $P_j$.

Звернемо ще раз увагу на те, що виявлення всіх значень $P_j$ дає змогу перейти до параметричного опису системи та її частин, тобто перейти від узагальнюючих її характеристик до конкретних параметрів окремих складових, ланок системи. Для кожної імовірності $P_j$ існує співвідношення, яке зв’язує її як критерій функціональної досконалості з параметрами та характеристиками всієї системи чи її частин. Таке співвідношення може бути визначено емпіричне або аналітичне.

Головних вимог до таких аналітичних або емпіричних співвідношень дві. По-перше, вони повинні змінюватися в діапазоні (0, 1). По-друге, в якості аргументів до них повинні входити всі технічні (технологічні) параметри, що суттєво впливатимуть на формування конкретного значення $P_j$.

У якості приклада приведемо співвідношення для імовірності $P_0$ виявляння об’єкту за його статичним зображенням при спостереженні. Воно має такий вигляд [16]:

$$P_0 = \exp\left[-\left(\frac{Bm'}{2LR\sqrt{\Delta D}}\right)^2\right], \tag{21}$$

де $B$ є коефіцієнт форми розпізнавальної ознаки з лінійним розміром $L$ та тоновим контрастом $\Delta D$ об’єкту.

Об’єкт спостерігається видовим засобом з роздільною здатністю $R$ при знаменнику масштабу $m'$. Імовірність $P_0$ може розглядатись як частковий критерій функціональної придатності великої системи, що вирішує завдання по складанню об'єктового зображення місцевості (наприклад, екологічний моніторинг, картографування) за результатами її видового спостереження. Іншими частковими критеріями відповідно цієї задачі будуть імовірність попадання засобу спостереження у район місцевості, на якій вона проводиться, імовірність спрацювання такого засобу, імовірність спрацювання апаратури обробки зображення, імовірність правильної обробки результатів дешифрування зображень, що отримані та таке інше.

Зауважимо, що кожна з наведених вище ймовірностей характеризує черговий етап (окрему частину великої системи) складання карти місцевості та є функцією параметрів такого етапу. Вихід на параметричні залежності переводить дослідження системи за імовірнісними показниками до конкретних її параметрів та умов застосування.

Так, наприклад, з виразу (21) можемо бачити, що для підвищення $P_0$ необхідно збільшувати роздільну здатність зображення (підвищувати якість засобу спостереження, витримувати необхідні його режими), тоновий контраст (обирати режими та параметри приймача відповідно контрастним характеристикам об’єкту, фону, середовища). Знаменник $m'$ необхідно зменшувати (обирати засіб спостереження з більшою фокусною відстанню чи зменшувати відстань спостереження).

Вирази типу (18), (19), (21) підтверджують можливість аналітичного підходу до оцінки імовірності функціональної досконалості окремої частини системи чи всієї системи разом та їх параметричного управління. Зосередимося на введенні параметру вартості в таке управління.

**4. 3. Розробка підходу до поліноміальної апроксимації залежності вартості складної системи від узагальненого показника її функціональної досконалості**

Вартість окремої частини (ланки) залежить від багатьох факторів – кількості та досконалості складових, технології їх поєднання, обслуговування тощо. Об'єднати всі ці чинники до однієї функціональної (аналітичної) залежності практично неможливо, а у багатьох випадках – і недоцільно (з точки зору необхідної точності розрахунків).

Вартісний опис системи можна зробити двома способами. Першим способом є табличне завдання такої залежності. При цьому кожному зі станів складної системи чи її ланки ставиться у відповідність її вартість або діапазон вартості. Такі дані можна представляти у вигляді таблиць, матриць. Недоліками способу будуть складність отримання точних вартісних даних та важкість прогнозування попередніх імовірних результатів.

Більш гнучким способом вартісного опису є використання апроксимуючих залежностей. Для вибору типу апроксимуючої вартісної функціональної залежності наведемо декілька загальних умов.

По-перше, вартість частини системи складається з "вартості" параметрів цієї частини – коштів, які витрачені на досягнення параметрами необхідного значення. Відповідно до рівняння (21) кожній комбінації параметрів буде відповідати своє значення імовірності $P_0$. Таким чином, можна стверджувати, що

$$C_j = C_j\left(P_j\right), \tag{22}$$

де $C_j$ є вартістю $j$-ї складової частини з рівнем досконалості $P_j$.

Вираз (22) є рішенням другого рівняння системи (17) відносно вартості системи чи вартості частки системи.

По-друге, правильна будова системи чи її частки передбачає зріст своєї функціональної досконалості (ефективності) при збільшенню коштів, що укладені в них. Як наслідок, рівняння вартості повинно відповідати таким обмеженням та умовам існування складних систем одного типу та призначення:

1. $C\left(P\right) \ge 0.$

2. $P_1 \ge P_2 \to C\left(P_1\right) \ge C\left(P_2\right).$

3. $\lim\limits_{P \to 0} C\left(P\right) = 0.$

4. $\lim\limits_{P \to 1} C\left(P\right) = \infty.$ (23)

Наведені у (23) аналітичні обмеження та умови є слідством можливості фізичної реалізації складної системи у випадку, коли її вартість – це сукупність суспільно вагомих витрат на досягнення певної мети. Перше рівняння характеризує поточне існування складної системи. Друге – підкреслює напрям його раціонального удосконалення. В третьому рівнянні формалізується початковий стан створення системи. У четвертому – перспективи її остаточного удосконалення. Окремо підкреслимо адитивну властивість загальної функції вартості $C_\Sigma$ відносно її складових $C_j$:

$$C_\Sigma = \prod_{j=1}^{m} C_j. \tag{24}$$

Вимогам (23) та зручності користування рівнянням (24) задовольняють, наприклад, таки співвідношення:

$$C_j\left(P\right) = A_j P \exp\left(\frac{B_j}{1-P}\right), \tag{25}$$

$$C_j\left(P\right) = \frac{A_j P^{B_j}}{\ln\left(\frac{1}{P}\right)}, \tag{26}$$

$$C_j\left(P\right) = \frac{A_j P}{1-P}, \tag{27}$$

в яких $A_j$ та $B_j$ є константами, що можуть бути підібрані емпірично.

Апроксимуючі вирази підбираються, виходячи з інтенсивності (пропорційності) зміни вартості системи разом зі зміною рівня її функціональної досконалості. Так, наприклад, для простішого випадку при використанні співвідношення (27) додаток вартості $\Delta C$ при збільшенні рівня функціональної придатності на $\Delta P$ буде складати:

$$\Delta C = A \frac{\Delta P}{\left(1-P\right)\left(1-P-\Delta P\right)}.$$

Наявність двох констант у співвідношеннях (25) та (26) дозволяє більш гнучко і точно за допомогою цих виразів описувати дійсні фізичні залежності. Коефіцієнт $A_j$ має розмірність вартості. Можна його трактувати як таку вартість, яку замовник ще може сплатити за виконання функції всієї системи чи окремої ланки.

Коефіцієнт $B_j$ характеризує інтенсивність наближення вартості системи до максимального значення при $P_j \to 1$. Вибір конкретного співвідношення залежить від потрібної точності розрахунків, наявності відповідних апріорних даних, вимог до аналітичного апарату. Приклади розрахунків по рівнянням (25)–(27) приведені на рис. 3.

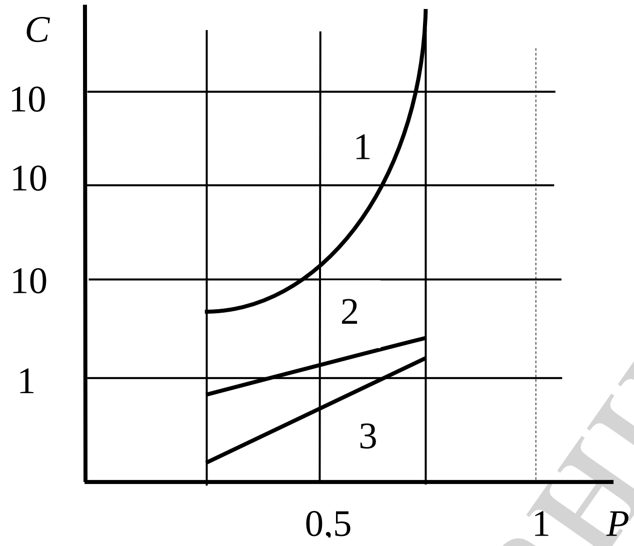


Рис. 3. Графіки розрахунків за рівняннями: 25 – 1; 26 – 2; 27 – 3

Для вибору найбільш відповідної залежності з (25)–(27) необхідний банк апріорних даних по кожній складовій частині системи, що досліджується. Наприклад, при $P=P_1$ вартість ланки була $C_1$, при $P=P_2$ вартість ланки змінилася на $C_2$. Причому, згідно рис. 3, важливе значення матиме не тільки обраний вигляд співвідношення, але і діапазон зміни імовірності $P$, в межах якого проводяться дослідження системи.

Такі статистичні дані виконують функції крапок на кривій, що апроксимує залежність $C(P)$ (по ним обираються коефіцієнти $A$ та $B$ чи тільки $A$). Обрана крива повинна максимально точно описувати реальні дані біля точки рішення. На інших інтервалах кривій такий збіг не потрібен, тому що в розрахунках вони не приймають участі.

Застосування співвідношень (25)–(27) у рівнянні (24) приводить до наступних виразів для сумарній вартості системи:

$$C_{\Sigma}\left(P_j\right)=\sum_{j=1}^{m} A_j P_j \exp\left(\frac{B_j}{1-P_j}\right), \tag{28}$$

$$C_{\Sigma}\left(P_j\right)=\sum_{j=1}^{m} \frac{A_j P_j^{B_j}}{\ln\left(\frac{1}{P_j}\right)}, \tag{29}$$

$$C_{\Sigma}\left(P_j\right)=\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{A_j P_j}{1-P_j}\right). \tag{30}$$

Якщо обмежитися апроксимуючими вартісними функціональними залежностями типу (25)–(27), всі три рівняння в (28)–(30) можуть бути зведені до одного:

$$C_{\Sigma}\left(P_j\right)=\sum_{j=1}^{m}A_jP_j\exp\left(\frac{B_j}{1-P_j}\right)+\sum_{j=m+1}^{n}\frac{A_jP_j^{B_j}}{\ln\left(\frac{1}{P_j}\right)}+\sum_{j=n+1}^{k}\frac{A_jP_j}{1-P_j}, \tag{27}$$

де $m$ – кількість ланок системи з апроксимацією вартісної залежності рівнянням (25); ($n$–$m$) – кількість ланок системи з апроксимацією вартісної залежності рівнянням (26); ($k$–$n$) – кількість ланок системи з апроксимацією вартісної залежності рівнянням (27); $k$ – загальна кількість ланок у системі.

Вирази (28)–(30) можуть використовуватися у системі вартісної раціоналізації (17). З урахуванням попередньої умови (19) щодо використання рівняння функціональної відповідності системи чи її частки та виразу для сумарної вартості, наприклад, (30) співвідношення (17) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} C_{\Sigma}\left(P_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{m}C_j\left(P_j\right)= \\ =\sum\limits_{j=1}^{m}A_jP_j\exp\left(\dfrac{B_j}{1-P_j}\right)=\min\limits_{0\le P_j\le 1}, \\ P_{\Sigma}=\prod\limits_{j=1}^{m}P_j\ge P_{зад}. \end{cases} \tag{32}$$

Система рівнянь типу (32) може бути використана для чисельної вартісної раціоналізації складних систем. Правило раціоналізації при цьому буде формулюватися таким чином: складна система повинна забезпечувати заданий рівень функціональної досконалості $P_{зад}$ при мінімальній її сумарній вартості $C_{\Sigma}$.

Розглянемо порядок використання системи рівнянь (32) для функціонально-вартісного дослідження складної системи при послідовному сполученні її окремих частин.

### 5. Порядок структурних функціонально-вартісних розрахунків при послідовному сполученні окремих частин

Простішою структурою є послідовне сполучення окремих частин складної системи. Такому випадку відповідають системи, у яких кінцева ціль (мета) досягається послідовним виконанням логічно пов’язаних окремих завдань. Таким чином, вихідна величина попередньої частини при цьому є вхідною величиною наступної частини.

Розглянемо систему з трьох послідовних елементів (рис. 4).


Рис. 4. Складна система з трьох послідовних елементів

Якщо вартісна залежність для всіх трьох частин може бути описана за допомогою співвідношень типу (27), а сумарна вартість складається відповідно виразу (28), то система рівнянь (32) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} C_\Sigma\left(P_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{3}\left(\dfrac{A_j P_j}{1-P_j}\right) = \min\limits_{0\le P_j\le 1}, \\ P_\Sigma = \prod\limits_{j=1}^{3} P_j \ge P_{зад}. \end{cases} \tag{33}$$

Рішення системи (33) означає знаходження екстремуму (мінімуму) її першого рівняння при виконанні умов відносно $P_\Sigma$ та $P_j$.

Класичним методом для пошуку умовного екстремуму є метод множників Лагранжа. Для цього обирається функція Лагранжа у вигляді [17]:

$$f\left(P_j,\lambda\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{A_j P_j}{1-P_j}\right) + \lambda\left(\prod_{j=1}^{m}\left(P_j - P_{зад}\right)\right), \tag{34}$$

де λ – множник Лагранжу.

Після знаходження часткових похідних щодо змінних $P_j$, прирівнювання їх до нуля та виключення проміжних змінних отримуємо таку систему простих алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{A_1P_1}{1-P_1} = \dfrac{A_2P_2}{1-P_2}, \\ \dfrac{A_1P_1}{1-P_1} = \dfrac{A_3P_3}{1-P_3}, \\ P_\Sigma = P_1P_2P_3 \ge P_{зад}. \end{cases} \tag{35}$$

До системи (35) входять три алгебраїчних рівняння та три змінних: $P_1$, $P_2$, $P_3$. Така система має однозначне рішення. При невеликих $m$ (у даному випадку $m=3$) рішення знаходиться безпосередньою підстановкою, зі збільшенням $m$

($m$>4) система (35) вирішується чисельними методами за допомогою обчислювальної техніки.

Рішення системи (35) дає розподіл між бажаними ймовірностями ефективного функціонування окремих частин з точки зору мінімальної вартості. Воно не потребує значень вартості як частин, так і всієї системи.

Але попередня інформація щодо вартості існуючих аналогів системи та її частин вкрай необхідна. Тільки її наявність дозволить вибрати обґрунтовані значення коефіцієнтів $A_j$. Чим точніше будуть вони визначені, тім більш вагомі будуть рекомендації щодо розподілу значень $P_1$, $P_2$, $P_3$. Можна ще раз наголосити про те, що в даному випадку вартість – це не обов'язково гроші. Це може бути умовні одиниці (бали, оцінки, чисельні судження). Важливе тільки їх співвідношення, наприклад: $A_j$ в стільки-то разів (на стільки то відсотків) доцільніше (коштовніше) за $A_{j+1}$.

Розроблений порядок структурних функціонально-вартісних розрахунків перевірений при визначенні перспективних напрямків удосконалення навчального процесу (НП) у вищому навчальному закладі. В якості складових розглядалися існуючи організаційні форми опанування навчальним матеріалом: навчальні заняття (НЗ), самостійна робота студентів (СР), практична підготовка (ПП), контрольні заходи (КЗ). Відповідно, НП як складна система містить чотири послідовних ланки, кожна з яких характеризується своєю функціональною відповідністю $P_i$ та умовною вартістю $C_i$.

Загальну структурну схему такої системи наведено на рис. 5.

НЗ: $P_1$, $C_1$ → СР: $P_2$, $C_2$ → ПП: $P_3$, $C_3$ → КЗ: $P_4$, $C_4$

Рис. 5. Структурна схема форм навчального процесу

Визначимо розподіл рівнів функціональної відповідності між окремими ланками за умовою досягнення мети НП при його мінімальній умовній вартості.

В якості апроксимуючій залежності між вартістю окремої ланки $C_i$ та імовірністю $P_i$ виконання покладених на неї функцій обираємо вираз (27). Такий вибір зумовлений відсутністю статистичних даних щодо їх взаємозалежності. Розподіл рівнів функціональної відповідності буде рішенням наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_\Sigma\left(P_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{A_i P_i}{1\ P_i}\right) = \min\limits_{0\le P_i\le 1}, \\ P_\Sigma = \prod\limits_{i=1}^{4} P_i \ge P_{\text{зад}}, \end{cases} \qquad (36)$$

де $P_\Sigma$ – імовірність відповідності випускників нормативним вимогам; $C_\Sigma$ – умовна вартість НП (створення, розробки); $A_i$ – емпірична константа.

Рішення системи (36) означає знаходження екстремуму (мінімуму) її першого рівняння при виконанні умов відносно $P_{\Sigma}$ та $P_i$. Для його отримання необхідно виконати три умови. Це визначення величин емпіричних констант $A_i$, заданої імовірності виконання задачі $P_{\Sigma}$, а також безпосереднього вирішення системи рівнянь.

1. Визначення величин емпіричних констант $A_i$. При відсутності статистичних даних щодо їх значень можна користуватися експертне визначеними пріоритетами при попарному їх порівнянні [14]. Матриця суміжності складатиметься за горизонталлю та вертикаллю саме з результатів $A_i$ порівняння $A_{ik}$ з $A_{ki}$ за правилом:

$$A_{ik} = \begin{cases} 10, \ A_{ik} = A_{ki}, \\ 15, \ A_{ik} > A_{ki}, \\ 5, \ A_{ik} < A_{ki}, \end{cases} \rightarrow A_i = \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik}.$$

Зважаючи на категорії виконавців кожної ланки НП, можна стверджувати про різну умовну вартість їх функціональної відповідності. Імовірності $P_1$ можна призначити найбільшу вартість і надати коефіцієнту $A_1$ значення, наприклад, 50 умовних одиниць. Контрольним заходам можна призначити $A_2 = 40$ умовних одиниць, практичній спрямованості – $A_3 = 20$ одиниць, заходам з реалізації самостійної роботи слухача $A_4 = 10$ одиниць, як таким, що майже повністю формуються тільки науково-педагогічним складом профільної кафедри.

2. Бажаними значеннями ймовірностей функціональної відповідності $P_1, \ldots, P_4$ та, відповідно, $P_{зад}$ є їх максимальне наближення до 1:

$$P_1 \approx P_2 \approx P_3 \approx P_4 \approx 1 \approx P_{зад}.$$

Але достатнім рівнем функціональної ефективності можна вважати $P_{зад}$=0,85. Таке твердження базується на передбаченні щодо нормального закону розподілення щільності імовірності виконання НП свого функціонального призначення від великої кількості впливових чинників.

3. Рішення системи (36) та визначення конкретних числових даних розподілу $P_1, \ldots P_4$ здійснимо за допомогою метода множників Лагранжа, вираз (34) при $m$=4.

Її часткові похідні за змінними $P_i$ та часткові екстремуми визначаються наступним рівнянням:

$$\frac{\partial f}{\partial P_i} = \frac{A_i}{\left(1 - P_i\right)^2} + \frac{\lambda}{P_i} \prod_{i=1}^{4} P = 0.$$

Його можна записати в такому вигляді:

$$\frac{A_i P_i}{\left(1-P_i\right)^2} = -\lambda \prod_{i=1}^{4} P_i = -\lambda P_{\text{зад}}..$$

Оскільки для кожного $i$=1, 2, 3, 4 права частина попереднього рівняння зберігається постійною, можна стверджувати наступне:

$$\frac{A_1 P_1}{\left(1-P_1\right)^2} = \frac{A_i P_i}{\left(1-P_i\right)^2},\ i = 2,3,4. \tag{37}$$

Таким чином, застосування методу множників Лагранжа наводить до системи чотирьох рівнянь, причому з них три рівняння типу (37) з чотирма змінними:

$$\begin{cases} P_1 P_2 P_3 P_4 \geq 0{,}85, \\ \dfrac{50P_1}{\left(1-P_1\right)^2} = \dfrac{10P_2}{\left(1-P_2\right)^2}, \\ \dfrac{50P_1}{\left(1-P_1\right)^2} = \dfrac{30P_3}{\left(1-P_3\right)^2}, \\ \dfrac{50P_1}{\left(1-P_1\right)^2} = \dfrac{40P_4}{\left(1-P_4\right)^2}. \end{cases} \tag{38}$$

Такі системи вирішують ітераційне. Порядок проведення ітерацій наступний. Знаходимо перше наближення змінної $P_1$ таким чином:

$$P_1^1 = \sqrt[4]{P_{\text{зад}}} = 0{,}96.$$

Значення перших наближень функціональної досконалості $P_2^{(1)}$, $P_3^{(1)}$, $P_4^{(1)}$ розраховуємо за нижчими рівняннями системи (38). Перевірка отриманих значень через рівняння функціональної відповідності – перше рівняння системи (38) – надає суттєве перебільшення межі у 0,85. Проводимо ще дві ітерації. Результати трьох ітерацій наведено у табл. 1.

Таблиця 1
Результати ітераційних розрахунків функціональної відповідності ланок НП

| $P_i^{(j)}$ | $P_1^{j}$ | $P_2^{j}$ | $P_3^{j}$ | $P_4^{j}$ | $\Pi P_i^{j}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_i^{(1)}$ | 0,96 | 0,982 | 0,969 | 0,964 | 0,881 |
| $P_i^{(2)}$ | 0,94 | 0,974 | 0,952 | 0,946 | 0,824 |
| $P_i^{(3)}$ | 0,95 | 0,977 | 0,961 | 0,955 | 0,851 |

Точність проведених розрахунків доведено до 0,001 і третя ітерація буде останньою.

Результатом розрахунків є вартісний раціональний розподіл між рівнями функціональної відповідності ланок НП. Згідно даним табл. 1, найвищі вимоги функціональної відповідності висуваються до величини $P_2$ – імовірності раціональної організації самостійної підготовки студентів.

Як наслідок, найменш суспільно вартісний шлях підвищення якості, ефективності НП в навчальному закладі міститься в удосконаленні самостійної підготовки студентів. Напрямів такої роботи два. По-перше, це підвищення ролі та відповідальності профільних кафедр за навчально-методичне забезпечення самостійної роботи, а також керівництва відповідного факультету – за організацію та якість її проведення.

По-друге, це покращення матеріально-технічного забезпечення самостійної підготовки студентів (доступність матеріально-технічної бази кафедр для самостійного опанування студентами необхідних знань, а також створення підрозділами забезпечення навчального закладу сприятливих умов для здійснення такого виду діяльності).

Є й інший висновок. Неналежна організація самостійної підготовки студентів блокуватиме будь які інші удосконалення НП.

**6. Обговорення результатів розробки методу структурного функціонально-вартісного моделювання складної ієрархічної системи**

Таким чином, введення поліноміальної апроксимації залежності вартості складної ієрархічної системи від її функціональної придатності при структурному функціонально-вартісному моделюванні дозволяє відносно просто вирішити низку питань. До них відносяться такі:

– можливість кількісної оцінки рекомендацій стосовно подальших напрямів удосконалення системи, що досліджується, на параметричному рівні;

– визначення складових системи, удосконалення яких найбільш раціональне з вартісної точки зору за умовою збереження заданого рівня її функціональності;

– висунення вимог до мінімально необхідного рівня функціональної досконалості складової, що планується до включення у систему, без зміни заданого рівня функціональної досконалості самої системи.

Це можна зробити, наприклад, з аналізу виразу (34) відносно граничних значень апроксимуючих коефіцієнтів $A_j$ [12]. По-перше, у випадку дослідження системи з однаковими по вартості частинами, коли $A_1$=$A_2$=$A_3$, буде справедливою рівність $C_j$=$C$ та

$$P_1 = P_2 = P_3 = \sqrt[3]{P_{\text{зад}}}. \tag{39}$$

Вартісної досконалості такої системи відповідає необхідність рівнозваженого поліпшення кожної із її частин.

Можливий випадок, коли $A_1$=$A_2$=$A_3$=$A$, а $C_1$≠$C_2$≠$C_3$, що свідчить про наявність послідовного сполучення однотипних (однаково організованих) чи однакових, але не однаково функціонально гідних частин. Користувач (замовник) системи готовий умовно сплачувати за кожну ланку однакову ціну: всі ланки однаково цінні, але мають різну функціональну готовність. У цьому випадку:

$$\begin{cases} C_\Sigma = \sum_{j=1}^{m} \left( \dfrac{A_j P_j}{1 - P_j} \right) = A \sum_{j=1}^{3} \left( \dfrac{P_j}{1 - P_j} \right), \\ P_\Sigma = \prod_{j=1}^{m} P_j = P_1 P_2 P_3 \geq P_{\text{зад}}. \end{cases}$$

Вартісної раціоналізації буде відповідати рішення системи (34) при $A_1 = A_2 = A_3 = A$:

$$\begin{cases} P_\Sigma = P_1 P_2 P_3 \geq P_{\text{зад}}, \\ \dfrac{P_1}{1 - P_1} = \dfrac{P_2}{1 - P_2}, \\ \dfrac{P_1}{1 - P_1} = \dfrac{P_3}{1 - P_3}. \end{cases}$$

Отримана система має рішення при:

$$P_1 = P_2 = P, \cdot P_3 = \frac{P_{\text{зад}}}{P_1 P_2} = \frac{P_{\text{зад}}}{P^2}.$$

Завдання дослідника – виявити дві складових, що найпростіше спрямовуються за їх функціональною досконалістю до 1, а для третьої частини за наведеним рівнянням визначити мінімально допустиме значення.

Необхідною умовою використання таких співвідношень є виконання нерівності $P_j > P_{\text{зад}}$, оскільки, у противному разі, імовірність $P_3$ повинна бути більше одиниці, що фізично неможливо.

Другим крайнім випадком буде ситуація, коли коефіцієнти $A_j$ в значній ступені відрізняються один від одного, наприклад $A_1 >> A_2$, $A_3$. Перед тим, як зробити висновки, розглянемо з початку друге рівняння системи (34). Після перегрупування можна стверджувати наступне:

$$A_1 P_1 - A_2 P_2 = \left( A_1 - A_2 \right) P_2 P_1 \approx A_1 P_1 P_2. \quad (40)$$

Оскільки $A_1 >> A_2$, а імовірності $P_1$, $P_2 \rightarrow 1$, що є слідством необхідності постійного підвищення рівня функціональної досконалості системи та її частин, можна допустити таке:

$$A_1P_1 >> A_2P_2. \quad (41)$$

Тоді вираз (10) спрощується:

$$A_1P_1 \approx A_1P_1P_2, \quad (42)$$

що можливо тільки при

$$P_2 \approx 1. \quad (43)$$

Якщо аналогічні висновки зробити при виконанні умови $A_1$>>$A_3$, то випадку $A_1$>>$A_2$, $A_3$, будуть відповідати вимоги:

$$P_1 \approx P_{\text{зад}}; \cdot P_2, P_3 \approx 1. \quad (44)$$

Таким чином, співвідношення (40) показують, що відносно дешеві частини системи з точки зору її вартісної раціоналізації завжди повинні мати максимально доступний рівень функціональної досконалості. Відносно дорогі частини системи, на які витрачаються основні кошти щодо існування системи, можуть функціонувати в такому випадку тільки на рівні заданої ефективності.

Досвід виконання завдань дослідження дозволяє сформульовані такі правила раціонального структурного удосконалення складної системи.

*Правило 1.* Раціональна структура складної системи (кількість ланок *i* та сполучень *k* між ними) повинна бути такою, щоб забезпечити заданий рівень функціональної досконалості $P_{\text{зад}}$.

Відповідно до структурної раціоналізації дане правило наголошує про те, що кількість ланок *i* та сполучень *k* між ними не повинно бути надлишковим. Цю умову можна записати таким чином:

$$P = P_{\text{зад}} \to i + k = \min.$$

Тільки в цьому випадку вартість такої системи буде мінімальна, тобто поняття раціональності спрямоване саме на отримання достатньої користі від складної системи при мінімальних витратах. Правило можна назвати правилом раціональної структурної будови складної системи.

*Правило 2.* Будь яке ускладнення системи (підвищення її вартості на величину $\Delta C$) повинне приводити до максимального збільшення функціональної придатності $\Delta P$.

З урахуванням введених позначок можна записати його як таку умову:

$$C_{\Sigma+1} - C_{\Sigma} = \Delta C = \min \to P_{\Sigma+1} - P_{\Sigma} = \Delta P = \max.$$

Це правило раціонального удосконалення складної системи. Дотримання цього правила приведе до того, що з усіх можливих ускладнень системи необхідно буде обирати таке, що приводить до найбільшого підвищення рівня функціональної досконалості системи. Можна його прочитати і наступним чином: ускладнення складної системи доцільне тільки у випадку, коли при цьому зростає функціональна досконалість всієї складної системи.

*Правило 3.* Система побудована правильно, якщо зменшення ($n \to (n-1)$) чи збільшення ($n \to (n+1)$) її на будь яку складову (ланку) веде до, відповідно, зменшення ($-\Delta C$) чи збільшення ($+\Delta C$) вартості системи:

$$n \to (n+1): \Delta C \geq 0,$$

$$n \to (n-1): \Delta C \leq 0.$$

Правило правильної будови показує, що у складній системі відсутні зайві ланки, тобто такі ланки, які не виконують функціонально необхідних для даної системи дій.

Наведені у статті результати досліджень методу структурного функціонально-вартісного моделювання складної ієрархічної системи при поліноміальній апроксимуючій залежності вартості складних систем від рівня їх функціональної досконалості підтверджують наступне:

– розроблений метод функціонально-вартісного аналізу складної системи, який за наявністю статистичних даних дозволяє максимально точне параметричне керування функціональною придатністю складної системи при мінімальній її вартості. За відсутністю таких даних він допомагає більш свідомо підійти до параметричного та структурного удосконалення складної системи;

– даний метод може застосовуватися для дослідження складної системи на всіх етапах її існування: розробки, експлуатації, утилізації;

– він може застосовуватися для дослідження слабоформалізуємих та неформалізуємих складних систем, тобто дозволяє якісний аналіз складної системи перевести у кількісний.

Але наведені у статті результати досліджень не в повній мірі висвітлюють особливості застосування запропонованого методу функціонально-вартісного дослідження. Це стосується аналізу як структурних особливостей будови складної системи (паралельні, змішані сполучення складових системи в статті не розглядалися), так і обмеженості у типах математичних моделей, з якими працювали автори. Розгалуження таких напрямків є пріоритетним у подальшій роботі з удосконалення можливостей розробленого методу.

Однак, слід відмітити обмеженість застосування запропонованого методу. Він доцільний за наявністю або відпрацьованістю формального зв'язку між імовірністю виконання завдання та параметрами системи, а також можливостю обґрунтувати значення коефіцієнтів $A_i$, $B$ поліноміальних складових. Крім того, використання розроблених алгоритмів спрямоване не на отримання конкретних, фізично та математично обґрунтованих значень і вартостей, і рівнів функціональної досконалості.

Скоріше такі будови та розрахунки допомагають усвідомити слабкі міста, ланки складної системи, виявити необхідні чи зайві зв'язки між ланками. Узагальнюючі – більш свідомо підійти до будови структури складної системи.

У значній мірі наведені обмеження можна зняти при індивідуалізації особливостей застосування розробленого методу для складних систем певного складу, наприклад, соціальні, адміністративні, технічні, комплексні системи. Може більш доцільною буде їх класифікація за напрямом застосування: промислові, навчальні, громадські тощо. Крім того, для підвищення точності у прогностичних висновках з результатів застосування даного методу мають залучатися дані щодо попередніх досліджень аналогічних складних систем.

**7. Висновки**

1. Розроблений метод структурного функціонально-вартісного моделювання складної ієрархічної системи при поліноміальній апроксимуючій залежності вартості складних систем від рівня їх функціональної досконалості, який дозволяє параметричне керування функціональною придатністю складної системи при мінімальній її вартості. Даний метод адаптований до застосування при різних рівнях апріорної невизначеності вихідних даних та може застосовуватися на всіх етапах існування складної системи: розробки, експлуатації, утилізації. Крім того, він є корисним для дослідження слабоформалізуємих та неформалізуємих складних систем, тобто дозволяє якісний аналіз складної системи перевести у кількісний.

2. Вихідні дані для проведення розрахунків за розробленим методом складаються з вибору узагальненого показника структурної функціональної досконалості системи та складових, а також її вартості. Вибір в якості узагальненого показника імовірності виконання функціонального призначення ураховує стохастичність існування складної системи, дозволяє перейти до параметричного керування рівнем функціональної досконалості системи та використовувати нормативні вимоги до таких показників. Введення поліноміальної апроксимації залежності вартості складної системи від узагальненого показника функціональної досконалості відбиває конкуруючий взаємозв'язок між ними та дозволяє проводити функціональне удосконалення складної системи за умовою мінімальної вартості такого удосконалення. Розроблений порядок структурних функціонально-вартісних розрахунків складної системи з послідовним сполученням окремих частин для раціоналізації її будови. Це дозволило запропонувати типове рішення системи рівнянь функціонально-вартісної раціоналізації складної системи на основі методу множників Лагранжу.

**References**


1. Good, H., Machol, R. (1957). System Engineering. An introduction to the design of large-scale systems. McGraw-Hill, 512.

2. Lee, J., Kim, J., Ko, W. (2019). Day-Ahead Electric Load Forecasting for the Residential Building with a Small-Size Dataset Based on a Self-Organizing Map and a Stacking Ensemble Learning Method. Applied Sciences, 9 (6), 1231. doi: https://doi.org/10.3390/app9061231

3. Senyel, M., Guldmann, J.-M. (2018). Joint Costs in Electricity and Natural Gas Distribution Infrastructures: The Role of Urban Factors. Urban Science, 2 (2), 35. doi: https://doi.org/10.3390/urbansci2020035

4. Beavers, D. P., Stamey, J. D. (2018). Bayesian sample size determination for cost-effectiveness studies with censored data. PLOS ONE, 13 (1), e0190422. doi: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0190422

5. Saaty, T. L. (1979). The U.S.-OPEC energy conflict the payoff matrix by the Analytic Hierarchy Process. International Journal of Game Theory, 8 (4), 225–234. doi: https://doi.org/10.1007/bf01766708

6. Pelin, A., Munteanu, V., Pantea, M., Gligor, D. (2009). Methodological approaches in realizing and applying cost-benefit analysis for the investment projects. Annals of the University of Oradea: Economic Science, 2 (1), 156–162.

7. Sobamowo, G. M., Ojolo, S. J. (2018). Techno-Economic Analysis of Biomass Energy Utilization through Gasification Technology for Sustainable Energy Production and Economic Development in Nigeria. Journal of Energy, 2018, 1–16. doi: https://doi.org/10.1155/2018/4860252

8. Anghelache, C., Manole, A., Anghel, M. (2017). Using the input-output model in macroeconomic analysis and forecasting studies. Theoretical and Applied Economics, XXIV (2), 21–32.

9. Liu, R., Wu, Z. (2018). Well-posedness of a class of two-point boundary value problems associated with ordinary differential equations. Advances in Difference Equations, 2018 (1). doi: https://doi.org/10.1186/s13662-018-1510-5

10. Babichev, S., Korobchynskyi, M., Lahodynskyi, O., Korchomnyi, O., Basanets, V., Borynskyi, V. (2018). Development of a technique for the reconstruction and validation of gene network models based on gene expression profiles. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 1 (4 (91)), 19–32. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.123634

11. Abd Elrehim, M. Z., Eid, M. A., Sayed, M. G. (2019). Structural optimization of concrete arch bridges using Genetic Algorithms. Ain Shams Engineering Journal, 10 (3), 507–516. doi: https://doi.org/10.1016/j.asej.2019.01.005

12. Слонов, М. Ю. (2019). Функціонально-вартісний підхід до структурного удосконалення складної системи: навчальний процес. Вчені записки Таврійського національного університету ім. В. І. Вернадського, 30 (4), 124–128. doi: https://doi.org/10.32838/2663-5941/2019.4-1/22

13. Oughton, F., Pitman, F. (1989). Value analysis and value engineering. London, 118.

14. Saaty, T. L. (1987). Rank generation, preservation, and reversal in the analytic hierarchy decision process. Decision Sciences, 18 (2), 157–177. doi: https://doi.org/10.1111/j.1540-5915.1987.tb01514.x

15. Apollo configuration management manual (1970). Washington, 308.

16. Leachtenauer, J. C. (2003). Resolution requirements and the Johnson criteria revisited. Infrared Imaging Systems: Design, Analysis, Modeling, and Testing XIV. doi: https://doi.org/10.1117/12.497896

17. Bertsekas, D. (1982). Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Academic Press, 412. doi: https://doi.org/10.1016/c2013-0-10366-2