УДК 621.165
DOI: 10.15587/1729-4061.2020.193470

Вычисление функции грина краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

И. Н. Беляева, И. К. Кириченко, О. Д. Пташный, Н. А. Чеканов, Н. Н. Чеканова, Т. А. Ярхо

Функція Гріна знаходить широке застосування при розв’язку крайових задач для диференціальних рівнянь, до яких зводяться багато математичних і фізичних задач. Зокрема, розв’язки диференціальних рівнянь з частинними похідними методом Фур’є зводяться до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. За допомогою функції Гріна для однорідної задачі можна знайти розв’язок неоднорідного диференціального рівняння. Знання функції Гріна дає можливість розв’язувати цілий клас задач з знаходження власних значень в квантовій теорії поля.

Описана розроблена побудова функції Гріна крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь. Представлені алгоритм і програма в системі Maple для обчислення функції Гріна крайових задач для диференціальних рівнянь другого та третього порядків в явному аналітичному вигляді. Наведені приклади обчислення функції Гріна для конкретних крайових задач. Необхідна для побудови функції Гріна фундаментальна система розв’язків звичайних диференціальних рівнянь з особливими точками обчислюється в вигляді узагальнених степеневих рядів за допомогою розроблених програм в середовищі Maple. Розроблено алгоритм побудови функції Гріна в вигляді степеневих рядів для диференціального рівняння другого та третього порядків з заданими крайовими умовами. Складено робочі програми в середовищі Maple для обчислення функції Гріна довільних крайових задач для диференціальних рівнянь другого та третього порядків. Наведено розрахунки функції Гріна для конкретних крайових задач третього порядку за допомогою розробленої програми. Проведено порівняння отриманої наближеної функції Гріна з відомими виразами точної функції Гріна і отримана дуже гарна згода.

Ключові слова: функція Гріна, звичайні диференціальні рівняння, степеневі ряди, узагальнені степеневі ряди, крайові задачі.

1. Введение

Функция Грина находит широкое применение при решении краевых задач для дифференциальных уравнений, к которым сводятся многие математические и физические задачи. В частности, решения дифференциальных уравнений с частными производными методом Фурье сводятся к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим, что при помощи функции Грина для однородной задачи можно вычислить решение неоднородного дифференциального уравнения. Также с помощью функции Грина можно решать задачи нахождения собственных значений, которые являются очень актуальными в квантовой теории поля.

Актуальными и важными в математических исследованиях являются задачи интегрирования линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, а также построения на их основе функции Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка.

2. Анализ последних исследований и постановка проблемы

Функция Грина по одной переменной величине должна удовлетворять исходному дифференциальному уравнению любой краевой задачи. Поэтому сама функция Грина может быть представлена в виде линейной комбинации линейно независимых решений (фундаментальная система решений) исходного дифференциального уравнения. Проблема нахождения линейно независимых решений исходного дифференциального уравнения подробно рассмотрена в работе [1]. Проблема решения исходного дифференциального уравнения при изучении свойств гармонического осциллятора в электромагнитном поле рассмотрена в работе [2]. Проблема нахождения решений дифференциального уравнения в квантовой механике рассмотрена в работах [3,4] при нахождении потенциала поля в уравнении Шредингера. Нахождение решений неоднородных дифференциальных уравнений при степенной зависимости неоднородности подробно рассмотрена в работе [5]. Проблема нахождения условий интегрируемости дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрена в работе [6]. Однако нахождение фундаментальной системы решений составляет достаточно сложную, фактически не исследованную на данный момент времени математическую задачу. Таким образом, исследователи данной области пришли к выводу о необходимости использования функции Грина для нахождения решений дифференциальных уравнений. Эта проблема подробно рассмотрена в работах [7–9], но она не была решена из-за нелинейности систем дифференциальных уравнений. Авторам данной статьи удалось частично решить эту проблему, используя компьютерную систему MAPLE при расчете собственных значений и собственных функций уравнения Матье [10]. Авторы данной статьи использовали также компьютерную систему MAPLE при исследовании нелинейной гамильтоновой системы методом Биркгофа-Густавсона [11]. Необходимость получения функции Грина для решения дифференциальных уравнений в аналитическом виде показана в работах [12–14]. В работе [15] рассмотрена проблема нелинейности системы решений дифференциальных уравнений, что не дает возможности получения функции Грина в аналитическом виде. Кроме того, поиск фундаментальной системы решений ещё более усложняется, если дифференциальное уравнение имеет особые точки.

Эту трудность можно преодолеть, если решения дифференциальных уравнений искать в виде степенных рядов, а при наличии особых точек искать в виде обобщенных степенных рядов, например, по методу Фробениуса. Однако при этом возникают трудоемкие задачи, такие как подстановки рядов в ряды, их дифференцирование, сравнение коэффициентов при одинаковых степенях, Кроме того, при построении функции Грина возникают задачи решения систем алгебраических уравнений высокого порядка. Поэтому для успешного и точного решения таких задач применяется известная компьютерная система символьно-численных преобразований Maple, которая позволяет в аналитическом виде производить такие необходимые преобразования с достаточной точностью и скоростью.

Поэтому вполне обоснованной является разработка алгоритмов и составление программ в системе Maple для вычисления в явном виде функций Грина и проверки работы этих программ для конкретных краевых задач. Основные свойства и методы построения функции Грина, которую обозначим как $G(x, \xi)$, а также широкий спектр различного класса прикладных задач, при решении которых может быть использована функция Грина, изложены во многих классических учебниках по дифференциальным уравнениям, а также в специальных пособиях [16] и монографиях [17] по функциям Грина.

3. Цель и задачи исследования

Целью настоящей работы является вычисление функции Грина краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений, линейно независимые решения которых и при наличии особых точек эффективно могут быть вычислены при помощи программ с применением компьютерных систем символьно-численных вычислений Maple.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

– разработать алгоритм построения функции Грина краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков;

– разработать алгоритм нахождения фундаментальной системы решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков;

– провести расчеты функции Грина для конкретных краевых задач.

4. Метод вычисления функции Грина

Введем дифференциальный оператор

$$\hat{L} \equiv p_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n(x). \tag{1}$$

На отрезке $x \in [a, b]$ рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\hat{L}\{y(x)\} = 0 \tag{2}$$

с однородными граничными условиями:

$$U_\mu(y) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{\mu k} \cdot y^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{\mu k} \cdot y^{(k)}(b) = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \tag{3}$$

Здесь $y^{(k)}(x)$ есть k–я производная функции $y(x)$, причем $y^{(0)}(x) \equiv y(x)$, α_{ik} и β_{ik} – числовые коэффициенты, которые одновременно не равны нулю, т. е. $\alpha_{ik}^2 + \beta_{ik}^2 \neq 0$, $i,k = 0,1,2,3$.

Для удобства краевые условия (3) кратко запишем в виде

$$U_\mu(y) \equiv U_{\mu a}(y) + U_{\mu b}(y) = 0. \tag{4}$$

Приведем основные свойства функции Грина $G(x, \xi)$.

1) функция непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n$-$2)$–порядка включительно для всех значений x и ξ из интервала $[a, b]$;

2) производная $(n$-$1)$–порядка имеет при $x = \xi$ скачок равный $1/p_0(\xi)$, т. е.

$$\frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} G(\xi+0,\xi) - \frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} G(\xi-0,\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)};$$

3) в каждом из интервалов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$ функция $G(x, \xi)$ по переменной x удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевым условиям $U_\mu(G) \equiv 0$, $\mu = 1,2,3,4$. Функция $G(x, \xi)$ называется функцией Грина или функцией влияния для данной краевой задачи.

В теории дифференциальных уравнений доказывается теорема: “Если краевая задача $\hat{L}(y) = 0$ имеет лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, то оператор $\hat{L}$, т. е. краевая задача, имеет одну и только одну функцию Грина. Это равносильно также, что число $\lambda \equiv 0$ является собственным значением оператора $\hat{L}$”.

Используя свойства функции Грина, представим общие формулы для её вычисления. Для применения компьютерных вычислений функцию Грина удобно искать в виде [15]:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_L(x,\xi), & a \le x \le \xi \le b, \\ G_R(x,\xi), & a \le \xi \le x \le b, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} G_L(x,\xi) &= \sum_{k=1}^{n} \left[A_k(\xi) + B_k(\xi) \right] y_k(x), \\ G_R(x,\xi) &= \sum_{k=1}^{n} \left[A_k(\xi) - B_k(\xi) \right] y_k(x), \end{aligned} \tag{6}$$

а $y_{(k)}(x)$ есть линейно независимые решения дифференциального уравнения (2).

Условия непрерывности функции Грина (свойство 1) запишутся в виде двух уравнений

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{k=1}^{n} B_k(x)\, y_k(x) = 0, \\
\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k(x) \dfrac{dy_k(x)}{x} = 0,
\end{cases}
\tag{7}
$$

а свойство 3) – скачок (n–1)-й производной в точке $x \equiv \xi$ запишется в виде следующего уравнения

$$
\sum_{k=1}^{n} B_k(\xi)\, y_k^{(n-1)}(\xi) = -\frac{1}{p_0(\xi)}. \tag{8}
$$

В результате получаем линейную систему алгебраических уравнений относительно функций $B_k(\xi)$:

$$
\begin{cases}
B_1 \cdot y_1(\xi) + B_2 \cdot y_2(\xi) + B_3 \cdot y_3(\xi) + B_4 \cdot y_4(\xi) + \cdots + B_n \cdot y_n(\xi) = 0, \\
B_1 \cdot y_1^{(1)}(\xi) + B_2 \cdot y_2^{(1)}(\xi) + B_3 \cdot y_3^{(1)}(\xi) + B_4 \cdot y_4^{(1)}(\xi) + \cdots + B_n \cdot y_n^{(1)}(\xi) = 0, \\
B_1 \cdot y_1^{(2)}(\xi) + B_2 \cdot y_2^{(2)}(\xi) + B_3 \cdot y_3^{(2)}(\xi) + B_4 \cdot y_4^{(2)}(\xi) + \cdots + B_n \cdot y_n^{(2)}(\xi) = 0, \\
B_1 \cdot y_1^{(n-1)}(\xi) + B_2 \cdot y_2^{(n-1)}(\xi) + B_3 \cdot y_3^{(n-1)}(\xi) + \\
+B_4 \cdot y_4^{(n-1)}(\xi) + \ldots + B_n \cdot y_n^{(n-1)}(\xi) = -\dfrac{1}{2 p_0(\xi)}.
\end{cases}
\tag{9}
$$

Так как определитель этой системы равен вронскиану линейно независимых решений $y_k(\xi)$, k = 1,2,3,4, который не равен нулю, то система (9) определена и имеет единственное решение $B_k(\xi)$, k = 1,2,3,4. Для нахождения функций $A_k(\xi)$, k = 1,2,3,4 воспользуемся граничными условиями (3):

$$
\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{\mu k} y^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{\mu k} y^{(k)}(b) = 0, \ (\mu = 1, \ldots, n). \tag{10}
$$

Из этой системы при известных $B_k(\xi)$ находим решения $A_k(\xi)$, зная которые вычисляем функцию Грина согласно выражениям (5), (6).

Если же определитель системы (10) равен нулю, то полученное уравнение для этого определителя

$$
\det\left(U_\mu\left(y_i(x,\lambda)\right)\right) = 0
$$

будет определять собственные значения λ при решении задачи на собственные значения оператора (1).

Как следует из описанной выше общей схемы построения функции Грина, необходимо вычислять фундаментальную систему решений для дифференциального уравнения (2). Разработаны алгоритмы и составлены программы в среде MAPLE для вычисления всех линейно независимых решений дифференциальных уравнений типа (2) в виде обобщенных степенных рядов [18, 19].

Согласно общей схеме вычисления функции Грина, также разработан алгоритм, основные шаги которого представим ниже, и составлены соответствующие программы с применением системы программирования MAPLE для построения функции Грина некоторых краевых задач [20, 21].

5. Алгоритм построения функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядка

Описание алгоритма [20]:

Ввод:

$P_k(x)$, $k = 0,1,\ldots$ – коэффициенты-функции заданного дифференциального уравнения; n – максимальный показатель степени используемых степенных рядов; x_0 – особая точка уравнения (2), если таковая имеется; α_{ik} и β_{ik} – коэффициенты граничных условий (3); a, b – граничные точки отрезка $[a, b]$;

Вывод:

$y_k(x)$ – фундаментальная система решений заданного дифференциального уравнения (2); $G\_left(x, \xi)$ – функция Грина на отрезке $a \le x \le \xi \le b$; $G\_right(x, \xi)$ – функция Грина на отрезке $a \le \xi \le x \le b$.

Описание шагов алгоритма:

1) вычисление линейно независимых решений $y_k(x)$ в виде степенных рядов для дифференциального уравнения (2);

2) проверка найденных решений путем подстановки;

3) вычисление коэффициентов $B_k(\xi)$ из системы уравнений (9);

4) проверка найденных решений этой системы;

5) составление системы уравнений (10), нахождение её решений $A_k(\xi)$ и проверка этих решений;

6) построение функций $G_L(x, \xi)$, $G_R(x, \xi)$, $G(x, \xi)$ согласно выражениям (5), (6);

7) проверка основных свойств функции Грина $G(x, \xi)$.

6. Примеры вычислений функций Грина краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Приведем результаты расчета функции Грина краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка по программе [20]:

Пример 1.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' - xy' + y = x^2 \ln x + x \tag{11}$$

с краевыми условиями

$$y(1)=0\,,\quad y'(1)+y'(2)=0\,.$$

При помощи программы [20] для соответствующего однородного дифференциального уравнения получена функция Грина в виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}G_L(x,\xi), & 1\le x\le \xi\le 2,\\ G_R(x,\xi), & 1\le \xi\le x\le 2,\end{cases} \tag{12}$$

где

$$G_L(x,\xi)=\frac{(\ln\xi-\ln 2-1)\,x\ln x}{\xi^2(2+\ln 2)}\,,$$

$$G_R(x,\xi)=\frac{x(\ln x\ln\xi-2\ln\xi-\ln 2\ln\xi+\ln x)}{\xi^2(2+\ln 2)}\,.$$

Зная функцию Грина (12) для однородного дифференциального уравнения, которое соответствует неоднородному дифференциальному уравнению (11), по формуле

$$y(x)=\int_1^2 G(x,\xi)\left(\xi^2\ln\xi+\xi\right)d\xi$$

получаем решение неоднородного уравнения

$$y(x)=\frac{x}{(4+2\ln 2)}\cdot\left[\begin{array}{c}2\ln^2 x+2x\ln 2\ln x+\ln 2\ln^2 x+4x\ln x-\\ -10\ln 2\ln x+10\ln x-\ln^2 2\ln x-8x-4x\ln 2+4\ln 2+8\end{array}\right].$$

Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения найдено в аналитическом виде.

Пример 2.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^2y''-3xy'+5y=3x^2$$

с краевыми условиями

$$2y(1)+5y'(1)+y(2)-3y'(2)=0,$$
$$y(1)-5y'(1)-y(2)+3y'(2)=0.$$

Для соответствующего однородного уравнения с теми же граничными условиями по программе [20] получена функция Грина

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_L(x,\xi), & 1\le x\le \xi\le 2,\\ G_R(x,\xi), & 1\le \xi\le x\le 2,\end{cases}$$

где

$$G_L(x,\xi)=\frac{2x^2\sin(\ln x)\{3\cos[\ln(\xi/2)]-4\sin[\ln(\xi/2)]\}}{\xi^3[5-8\sin(\ln 2)-6\cos(\ln 2)]},$$

$$G_R(x,\xi)=$$
$$=\frac{x^2\{5\sin[\ln(\xi/2)]+6\sin[\ln\xi]\cos[\ln(x/2)]-8\sin[\ln(\xi)]\sin[\ln(x/2)]\}}{\xi^3[5-8\sin[\ln 2]-6\cos(\ln 2)]}.$$

Таким образом, для исходного дифференциального уравнения вычислена функция Грина.

Пример 3.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''-2y/x^2=3x^3\sin x+\ln x$$

с краевыми условиями

$$y(1)=0,\ \ y(2)+y'(2)=0.$$

Получена следующая функция Грина:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_L(x,\xi), & 1\le x\le \xi\le 2,\\ G_R(x,\xi), & 1\le \xi\le x\le 2,\end{cases}$$

где

$$G_L(x,\xi)=\frac{(1-x)(x^2+x+1)}{3x\xi},\quad 1\le x\le\xi\le 2,$$

$$G_R(x,\xi)=\frac{(1-\xi)(\xi^2+\xi+1)}{3x\xi},\quad 1\le x\le\xi\le 2.$$

Аналогично предыдущим примерам, из данных значений функции Грина находим

$$y(x) = 60x\sin x + 120\cos x - 3x^3 \sin x + 1/6\ln^2 x - 1/9\ln x\,.$$

Таким образом, получено решение данного неоднородного дифференциального уравнения:

Пример 4.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{m}{x^2}y = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = 0\,.$$

Получена следующая функция Грина:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_L(x,\xi), & 0 \le x \le \xi \le 1, \\ G_R(x,\xi), & 0 \le \xi \le x \le 1, \end{cases}$$

где

$$G_L(x,\xi) = \frac{x^m\left(\xi^{-m} - \xi^m\right)}{2m},$$
$$G_R(x,\xi) = \frac{\xi^m\left(x^{-m} - x^m\right)}{2m},$$

которая совпадает с известным результатом [22].

Пример 5.

Рассмотрим следующую краевую задачу [23]

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}\left\{(1+\alpha x)^4 \frac{dy}{dx}\right\} + \lambda^2 y = 0\,, \\ y(0) = y(L) = 0\,. \end{gathered} \tag{13}$$

Эта задача есть задача на собственные значения, которая возникает при исследовании на устойчивость конусообразного стержня под действием внешней продольной силы. Параметр α определяет геометрическую конфигурацию усеченного конуса. В данной задаче критическая сила, при которой стержень теряет устойчивость, равна произведению модуля Юнга на наименьшее собственное число λ.

Уравнение (13) имеет следующие линейно независимые решения:

$$y_1(x) = \alpha \cos\left[\frac{\lambda}{\alpha(1+\alpha x)}\right] + \left(\frac{\lambda}{(1+\alpha x)}\right)\sin\left[\frac{\lambda}{\alpha(1+\alpha x)}\right],$$

$$y_1(x) = -\alpha \sin\left[\frac{\lambda}{\alpha(1+\alpha x)}\right] + \left(\frac{\lambda}{(1+\alpha x)}\right)\cos\left[\frac{\lambda}{\alpha(1+\alpha x)}\right].$$

Собственные значения находятся из уравнения

$$\det\Big(U_\mu\big(y_i(x,\lambda)\big)\Big) = 0\,,$$

которое приводит к следующему трансцендентному уравнению

$$\lambda^2 - \alpha^2 L ctg\left[\frac{\lambda L}{1+\alpha L}\right]\cdot\lambda + \alpha^2 + \alpha^3 L = 0\,. \tag{14}$$

Значение λ, полученное по формуле (14), отличается менее чем на 2 % от этой же величины, полученной в работе [23] другим способом.

Приведенные примеры решения краевых задач в этом разделе были использованы авторами при решении уравнений теплопроводности и колебаний с частными производными.

7. Примеры вычислений функций Грина некоторых краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка

Приведем результаты расчета функции Грина краевых задач для дифференциальных уравнений третьего порядка по программе [20].

Пример 1.

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$y''' = x\sin x + 2x^2\cos x + 3x^3$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0\,,\;\; y(1) = 0\,,\;\; y'(0) - y'(1) = 0\,.$$

Для данного однородного дифференциального уравнения получена функция Грина в виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_L(x,\xi), & 1\le x\le\xi\le 2,\\ G_R(x,\xi), & 1\le\xi\le x\le 2,\end{cases}$$

где

$$G_L(x,\xi)=\frac{1}{2}x(\xi-1)(x-\xi),$$

$$G_R(x,\xi)=-\frac{1}{2}\xi(x-1)(\xi-x).$$

Далее получено решение неоднородного уравнения:

$$y(x)=\frac{1}{40}x^6+\frac{197}{40}x^2-\frac{99}{20}x-2x^2\sin(x)-\frac{7}{2}x^2\sin(1)-4x^2\cos(1)-$$

$$-11x\cos(x)+21\sin(x)+15x\cos(1)-\frac{31}{2}x\sin(1).$$

Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения найдено в аналитическом виде.

Пример 2.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'''=0$$

с граничными условиями

$$y(0)=0,\ \ y(1)=0,\ \ y'(0)=y'(1).$$

С помощью разработанной программы получена функция Грина:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_L(x,\xi), & 0\le x\le\xi\le 1,\\ G_R(x,\xi), & 0\le\xi\le x\le 1,\end{cases}$$

где

$$G_L=\frac{1}{2}\left(x^2\xi-x\xi^2-x^2+x\xi\right),$$

$$G_R=\frac{1}{2}\left(x^2\xi-x\xi^2-x\xi+\xi^2\right).$$

Полученное выражение совпадает с точным выражением и является анти-самосопряженным.

Пример 3.

Для дифференциального уравнения

$$y'''(x) + y'(x) = x\cos^2(x)$$

с однородными краевыми условиями

$$y(0) = 0\,,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ \text{ и } \ y'(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

найдена функция Грина в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_L(x,\xi), & 0 \le x \le \xi \le 1, \\ G_R(x,\xi), & 0 \le \xi \le x \le 1, \end{cases}$$

где

$$G_L(x,\xi) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos x - \sin x + \cos x\cos\xi - \cos x\sin\xi + \\ +\sin x\cos\xi + \sin x\sin\xi - \cos\xi + \sin\xi - 1 \end{bmatrix},$$

$$G_R(x,\xi) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos x - \sin x - \cos x\cos\xi - \cos x\sin\xi + \\ +\sin x\cos\xi - \sin x\sin\xi - \cos\xi + \sin\xi + 1 \end{bmatrix},$$

откуда находим:

$$y(x) = -\frac{\pi^2}{32}\sin x - \frac{11}{72}\sin x + \frac{\pi}{6}\sin x - \frac{x}{6}\cos x\sin x + \frac{\pi^2}{32}\cos x -$$
$$-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi^2}{32} + \frac{11}{72} + \frac{x^2}{4} - \frac{11}{36}\cos^2 x + \frac{\pi}{6}\cos x + \frac{11}{72}\cos x.$$

Таким образом, получено решение исходного неоднородного дифференциального уравнения в аналитическом виде.

8. Построение функции Грина для дифференциальных уравнений третьего порядка в виде степенных рядов

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$p_0(x)y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0 \tag{15}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1,0}y(a)+\alpha_{1,1}y'(a)+\alpha_{1,2}y''(a)+\beta_{1,0}y(b)+\beta_{1,1}y'(b)+\beta_{1,2}y''(b)=0\,,\\
&\alpha_{2,0}y(a)+\alpha_{2,1}y'(a)+\alpha_{2,2}y''(a)+\beta_{2,0}y(b)+\beta_{2,1}y'(b)+\beta_{2,2}y''(b)=0\,,\\
&\alpha_{3,0}y(a)+\alpha_{3,1}y'(a)+\alpha_{3,2}y''(a)+\beta_{3,0}y(b)+\beta_{3,1}y'(b)+\beta_{3,2}y''(b)=0\,,
\end{aligned} \tag{16}$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ есть непрерывные функции вместе с непрерывными производными первого и второго порядков на отрезке $[a, b]$, $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,0}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\beta_{1,0}$, $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{2,1}$, $\beta_{2,2}$, $\beta_{3,0}$, $\beta_{3,1}$, $\beta_{3,2}$ – коэффициенты в граничных условиях (16) для конкретной краевой задачи, $\sum\limits_i\sum\limits_k \alpha_{ik}^2 \neq 0$, $\sum\limits_i\sum\limits_k \beta_{ik}^2 \neq 0$, $i = 1,2,3$, $k = 0,1,2$.

Для построения функции Грина краевой задачи (15), (16) вначале решаем задачу Коши в точке x_0, находим линейно независимые решения для уравнения (15) в виде рядов:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k^{(1)} \cdot (x - x_0)^k\,, \tag{17}$$

$$y_2(x) = (x - x_0) + \sum_{k=3}^{\infty} c_k^{(2)} \cdot (x - x_0)^k\,, \tag{18}$$

$$y_3(x) = (x - x_0)^2 / 2 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k^{(3)} \cdot (x - x_0)^k\,, \tag{19}$$

где $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, $c_k^{(3)}$ – числовые коэффициенты.

Функцию Грина ищем в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_L(x,\xi), & a \le x \le \xi \le b\,, \\ G_R(x,\xi), & a \le \xi \le x \le b\,, \end{cases}$$

где

$$G_L(x,\xi) = \sum_{k=1}^{3}\left[A_k(\xi) + B_k(\xi)\right]\cdot y_k(x)\,,$$

$$G_R(x,\xi) = \sum_{k=1}^{3}\left[A_k(\xi) - B_k(\xi)\right]\cdot y_k(x)\,.$$

Используя свойства функции Грина, приведенные выше, находим коэффициенты-функции $A_k(\xi)$, $B_k(\xi)$ и с их помощью строим функцию Грина по формулам (17)–(19). Так как линейно независимые решения представлены степенными рядами, то и функция Грина также находится в виде степенных рядов.

В соответствии с приведенными выше формулами разработан алгоритм построения функции Грина в виде степенных рядов для краевой задачи (15) в среде Maple.

9. Алгоритм построения функции Грина для уравнений третьего порядка в виде степенных рядов.

Используя три линейно независимых решения, найденные в виде степенных рядов, построена функция Грина на основе разработанного алгоритма и программы её вычисления.

Ввод:

n – желаемый максимальный порядок степенного ряда;

$P0(x) \neq 0$, $P1(x)$, $P2(x)$, $P3(x)$ – в общем, коэффициенты-функции в заданном дифференциальном уравнении третьего порядка (15);

a, b – граничные точки отрезка $[a, b]$, на котором ищется функция Грина;

$\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,0}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\beta_{1,0}$, $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{2,1}$, $\beta_{2,2}$, $\beta_{3,0}$, $\beta_{3,1}$, $\beta_{3,2}$ – коэффициенты в граничных условиях (16) для конкретной краевой задачи.

Вывод:

$y1(x)$, $y2(x)$, $y3(x)$ – фундаментальная система решений для заданного дифференциального уравнения третьего порядка (15);

$G\_L(x, \xi)$ – функция Грина на отрезке $a \le x \le \xi \le b$;

$G\_R(x, \xi)$ – функция Грина на отрезке $a \le \xi \le x \le b$.

Описание шагов алгоритма:

1) процедура вычисления линейно независимых решений дифференциального уравнения третьего порядка в виде степенных рядов;

2) проверка найденных решений;

3) вычисление коэффициентов-функций $B1(\xi)$, $B2(\xi)$, $B3(\xi)$ для функции Грина $G(x, \xi)$;

4) проверка вычисленных коэффициентов-функций $B1(\xi)$, $B2(\xi)$, $B3(\xi)$;

5) задание частных краевых условий на отрезке $[a, b]$;

6) решение системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов-функций $A1(\xi)$, $A2(\xi)$, $A3(\xi)$;

7) проверка вычисленных коэффициентов-функций $A1(\xi)$, $A2(\xi)$, $A3(\xi)$;

8) построение функции Грина $G\_L(x, \xi)$, $(a \le x \le \xi \le b)$ и $G\_R(x, \xi)$, $(a \le \xi \le x \le b)$;

9) проверка всех свойств функции Грина $G(x, \xi)$.

10. Примеры построения функции Грина обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка в виде степенных рядов.

Пример 1.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \tag{20}$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \; y(1) = 0, \; y''(0) = 0. \tag{21}$$

Для дифференциального уравнения (20) решения

$$y_1 = e^x, \; y_2 = e^{2x}, \; y_3 = e^{3x} \tag{22}$$

составляют фундаментальную систему решений. Согласно сказанному выше, функция Грина $G(x, \xi)$ может быть построена из общих решений (22) по формулам:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_L(x,\xi), & a \le x \le \xi \le b, \\ G_R(x,\xi), & a \le \xi \le x \le b, \end{cases}$$

где

$$G_L(x,\xi) = \sum_{k=1}^{3} \left[A(\xi) + B(\xi) \right] y_k(x),$$

$$G_R(x,\xi) = \sum_{k=1}^{3} \left[A(\xi) - B(\xi) \right] y_k(x).$$

Из условий непрерывности функции Грина, её первой производной, а также скачка второй производной получаем систему для определения коэффициентов функций $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$, $B_3(\xi)$:

$$\begin{cases} B_1(\xi) y_1(\xi) + B_2(\xi) y_2(\xi) + B_3(\xi) y_3(\xi) = 0, \\ B_1(\xi) y_1'(\xi) + B_2(\xi) y_2'(\xi) + B_3(\xi) y_3'(\xi) = 0, \\ B_1(\xi) y_1''(\xi) + B_2(\xi) y_2''(\xi) + B_3(\xi) y_3''(\xi) = -1/\left(2P_0(\xi)\right). \end{cases} \tag{23}$$

Система (23) всегда разрешима и имеет единственное решение, т.к. $P_0(\xi) \neq 0$, а, следовательно, главный определитель этой системы есть вронскиан $W[y_1, y_2, y_3]$, который не равен нулю.

Из системы (23) находим решения:

$$B_1(\xi) = -\frac{1}{4} e^{-\xi}, \; B_2(\xi) = \frac{1}{2} e^{-2\xi}, \; B_3(\xi) = -\frac{1}{4} e^{-3\xi}.$$

Для нахождения коэффициентов-функций $A_i(\xi)$, $(i = 1,2,3)$, воспользуемся граничными условиями (21) и в результате получаем систему

$$\begin{cases} A_1(\xi)+A_2(\xi)+A_3(\xi)=-B_1(\xi)-B_2(\xi)-B_3(\xi), \\ A_1(\xi)+4A_2(\xi)+9A_3(\xi)=-B_1(\xi)-4B_2(\xi)-9B_3(\xi), \\ A_1(\xi)+eA_2(\xi)+e^2A_3(\xi)=B_1(\xi)+eB_2(\xi)+e^2B_3(\xi). \end{cases}$$

Из этой системы находим решения:

$$A_1(\xi)=-\frac{1}{4\left(3\mathrm{e}^2-8\mathrm{e}+5\right)}\left(-20\mathrm{e}^{1+\xi}+5\mathrm{e}^{2\xi}+10\mathrm{e}^2+8\mathrm{e}^{1-2\xi}-3\mathrm{e}^{2+2\xi}\right)\mathrm{e}^{-3\xi},$$

$$A_2(\xi)=\frac{1}{2\left(3\mathrm{e}^2-8\mathrm{e}+5\right)}\left(-8\mathrm{e}^{1+\xi}+8\mathrm{e}^{2\xi}+8\mathrm{e}^2-5\mathrm{e}^{\xi}-3\mathrm{e}^{2+\xi}\right)\mathrm{e}^{-3\xi},$$

$$A_3(\xi)=-\frac{1}{4\left(3\mathrm{e}^2-8\mathrm{e}+5\right)}\left(-12\mathrm{e}^{1+\xi}-5+6\mathrm{e}^{2\xi}+3\mathrm{e}^2+8\mathrm{e}\right)\mathrm{e}^{-3\xi}.$$

Используя найденные выражения для $A_k(\xi)$, $B_k(\xi)$, $(k = 1,2,3)$, находим точную функцию Грина для краевой задачи (20), (21) в виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_L(x,\xi), & 0\le x\le\xi\le 1, \\ G_R(x,\xi), & 0\le\xi\le x\le 1, \end{cases}$$

где

$$G_L(x,\xi)=\frac{\mathrm{e}^{x}\left(-5/2\mathrm{e}^{-\xi}+5\mathrm{e}^{1-2\xi}-5/2\mathrm{e}^{2-3\xi}\right)}{3\mathrm{e}^2-8\mathrm{e}+5}+ \\ +\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(4\mathrm{e}^{-\xi}-8\mathrm{e}^{1-2\xi}+4\mathrm{e}^{2-3\xi}\right)}{3\mathrm{e}^2-8\mathrm{e}+5}+\frac{\mathrm{e}^{3x}\left(-3/2\mathrm{e}^{-\xi}+3\mathrm{e}^{1-2\xi}-3/2\mathrm{e}^{2-3\xi}\right)}{3\mathrm{e}^2-8\mathrm{e}+5}, \qquad (24)$$

$$
\begin{aligned}
G_R(x,\xi) = {} & \frac{\mathrm{e}^{x}\left(3/2\mathrm{e}^{2-\xi}-4\mathrm{e}^{1-\xi}+5\mathrm{e}^{1-2\xi}-5/2\mathrm{e}^{2-3\xi}\right)}{3\mathrm{e}^{2}-8\mathrm{e}+5}+ \\
& +\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(4\mathrm{e}^{-\xi}-3\mathrm{e}^{2-2\xi}-5\mathrm{e}^{-2\xi}+4\mathrm{e}^{2-3\xi}\right)}{3\mathrm{e}^{2}-8\mathrm{e}+5}+ \\
& +\frac{\mathrm{e}^{3x}\left(-3/2\mathrm{e}^{-\xi}+3\mathrm{e}^{1-2\xi}+5/2\mathrm{e}^{-3\xi}-4\mathrm{e}^{1-3\xi}\right)}{3\mathrm{e}^{2}-8\mathrm{e}+5}.
\end{aligned} \tag{25}
$$

С помощью разработанной программы для краевой задачи (20), (21) получена приближенная функция Грина в виде степенных рядов, первые члены которых приведены ниже

$$
G(x,\xi)=\begin{cases} G_L(x,\xi), & 0\le x\le \xi\le 1, \\ G_R(x,\xi), & 0\le \xi\le x\le 1, \end{cases}
$$

где

$$
\begin{aligned}
G_L^{(7)} = {} & \frac{19663}{35489}x-\frac{82489}{35489}x\xi+\frac{308167}{70978}x\xi^2-\frac{216293}{212934}x^3-\frac{1059601}{212934}x\xi^3+ \\
& +\frac{907379}{212934}x^3\xi-\frac{98315}{70978}x^4+\frac{3462703}{851736}x\xi^4-\frac{3389837}{425868}x^3\xi^2+ \\
& +\frac{412445}{70978}x^4\xi-\frac{4699457}{4258680}x^5-\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_R^{(7)} = {} & \frac{19663}{35489}x+1/2\xi^2-\frac{117978}{35489}x\xi+1/2x^2-\xi^3+\frac{521101}{70978}x\xi^2- \\
& -3x^2\xi-\frac{3359}{212934}x^3+\frac{25}{24}\xi^4-\frac{324471}{35489}x\xi^3+\frac{25}{4}x^2\xi^2+\frac{3359}{35489}x^3\xi- \\
& -\frac{292555}{851736}x^4-3/4\xi^5+\frac{6656713}{851736}x\xi^4-15/2x^2\xi^3-\frac{195827}{425868}x^3\xi^2+ \\
& +\frac{292555}{141956}x^4\xi-\frac{1505447}{4258680}x^5+\ldots.
\end{aligned}
$$

Проведены расчеты сравнений при разных значениях ξ и при значениях степенного ряда $n = 13$ и $n = 16$. Из проведенных расчетов следует, что полученная приближенная функция Грина отличается от точной на 1,3 % и $6\cdot10^{-3}$ % при $n = 13$ и $n = 16$, соответственно.

Пример 2.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^3 y''' + xy' - y = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &y(1) + y'(1) + y''(1) + y(2) + y'(2) + y''(2) = 0, \\ &2y(1) + y'(1) - 2y''(1) + y(2) + y'(2) - 2y''(2) = 0, \\ &2y(1) + y'(1) + 3y''(1) - 2y(2) - y'(2) + y''(2) = 0. \end{aligned}$$

С помощью разработанной программы получена функция Грина:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_L(x,\xi), & 0 \le x \le \xi \le 1, \\ G_R(x,\xi), & 0 \le \xi \le x \le 1, \end{cases}$$

где первые члены функции Грина имеют вид:

$$G_L(x,\xi) = \frac{-x}{2\xi^2\left(44 + 90\ln^2 2 - 248\ln 2\right)}\left[180\ln^2\xi - 120\ln\xi + \ldots +\right],$$

$$G_R(x,\xi) = \frac{-x}{2\xi^2\left(44 + 89\ln^2 2 - 248\ln 2\right)}\left[136\ln^2\xi - 120\ln\xi + \ldots +\right].$$

Таким образом, получена функция Грина исходного однородного дифференциального уравнения.

11. Обсуждение полученных результатов по построению функции Грина обыкновенных дифференциальных уравнений

Разработаны методы построения функции Грина для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Знание функции Грина [8] позволяет вычислить решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с заданными краевыми условиями, а также найти собственные значения и функции краевой задачи.

Разработан алгоритм построения функции Грина в случае, когда в системе Maple имеется возможность получить в явном виде три линейно независимых решения заданного дифференциального уравнения третьего порядка с граничными условиями. Дано описание алгоритма построения функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка в явном аналитическом виде. Приведены расчёты функции Грина для конкретных краевых задач с помощью разработанной программы.

Разработан алгоритм для построения функции Грина в виде степенных рядов для дифференциального уравнения третьего порядка с заданными граничными условиями. Дано описание алгоритма программы построения функции Грина для уравнений третьего порядка в виде степенных рядов. Приведены расчеты функции Грина для конкретных краевых задач третьего порядка с помощью разработанной программы, а также проведено сравнение полученной приближенной функции Грина с точной, если она известна, и показана точность их согласия.

На основе известных свойств функции Грина в данной работе разработан алгоритм и составлена программа символьно-численных расчетов функции Грина с применением компьютерных систем аналитических вычислений, можно утверждать любых краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Существенным и важным узлом при вычислении функции Грина является поиск фундаментальной системы решений для заданного дифференциального уравнения. В данной работе эта задача решена при помощи расчета с использованием работающих программ.

Проведены расчеты для ряда краевых задач, получены соответствующие функции Грина. Для ответов задач, известных из литературы [22], найдено очень хорошее согласие (вообще точное совпадение) с приведенными в данной работе расчетами функций Грина. Это доказывает эффективность построения функций Грина в предложенном подходе. Подобные расчеты в известной литературе не выявлены. Можно и важно отметить, что точность вычисления функции Грина определяется точностью расчета фундаментальной системы решений, которая в общем случае автоматически контролируется числом членов в степенных рядах и числом знаков после запятой в десятичных числах.

В заключение можно сказать, что благодаря предложенным в данной статье методам и алгоритмам, любая краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков может быть решена. Единственным недостатком данной работы является то, что вычисление функции Грина и нахождение всех необходимых для этого линейно независимых решений фундаментальной системы решений является трудновыполнимой операцией, ручными вычислениями практически невыполнимой и для однородных уравнений, и тем более для неоднородных.

12. Выводы

1. Описан метод построения функции Грина для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков, имеющих особые точки, в виде обобщенных степенных рядов с применением компьютерных систем алгебраических преобразований.

2. Построение фундаментальной системы решений в виде сходящихся рядов позволяет при последующих численных расчетах получить желаемую точность за счет увеличения числа членов в рядах и за счет увеличения количества знаков после десятичной точки, значит с такой точностью вычислить и саму функцию Грина.

3. Приведены примеры вычислений функций Грина краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядка в виде степенных рядов в системе Maple, что позволяет эффективно и точно выполнить все необходимые преобразования при построении функции Грина. Проведено сравнение рассчитанных функций Грина с имеющимися в литературе и показана точность их согласия. Получено точное совпадение вычисленных

функций Грина с известными из других источников, что доказывает эффективность использованного способа расчета и разработанной рабочей программы.

Литература

1. Pinney, E. (1950). The Nonlinear Differential Equation y'' + p(x)y + cy-3 = 0. Proceedings of the American Mathematical Society, 1 (5), 681. doi: https://doi.org/10.2307/2032300
2. Lewis, H. R. (1968). Motion of a Time-Dependent Harmonic Oscillator, and of a Charged Particle in a Class of Time-Dependent, Axially Symmetric Electromagnetic Fields. Physical Review, 172 (5), 1313–1315. doi: https://doi.org/10.1103/physrev.172.1313
3. Korsch, H. J., Laurent, H. (1981). Milne's differential equation and numerical solutions of the Schrodinger equation. I. Bound-state energies for single- and double-minimum potentials. Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics, 14 (22), 4213–4230. doi: https://doi.org/10.1088/0022-3700/14/22/008
4. Korsch, H. J., Laurent, H., Mohlenkamp, R. (1982). Milne's differential equation and numerical solutions of the Schrodinger equation. II. Complex energy resonance states. Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics, 15 (1), 1–15. doi: https://doi.org/10.1088/0022-3700/15/1/008
5. Беркович, Л. М., Розов, Н. Х. (1972). Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях вида y″+a0(x)y=φ(x)yα. Дифференциальные уравнения, 8 (11), 2076–2079.
6. Ермаков, В. П. (1980). Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде. Университетские известия, 9, 1–25.
7. Frasca, M. (2006). Strongly coupled quantum field theory. Physical Review D, 73 (2). doi: https://doi.org/10.1103/physrevd.73.027701
8. Frasca, M. (2007). Green function method for nonlinear systems. Modern Physics Letters A, 22 (18), 1293–1299. doi: https://doi.org/10.1142/s0217751x08038160
9. Frasca, M. (2008). Green functions and nonlinear systems: short time expansion. International Journal of Modern Physics A, 23 (02), 299–308. doi: https://doi.org/10.1142/s0217751x08038160
10. Булавина, И. А., Кириченко, И. К., Чеканов, Н. А., Чеканова, Н. А. (2011). Применение математического пакета MAPLE для расчета собственных значений и функций уравнения Матье. Вестник Херсонского национального технического университета, 3 (42), 115–118.
11. Богачев, В. Е., Кириченко, И. К., Чеканова, Н. А., Чеканов, Н. А. (2015). Исследование нелинейной гамильтоновой системы методом нормальной формы Биркгофа-Густавсона. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління, 1156, 17–28.
12. Lewis, H. R. (1968). Class of Exact Invariants for Classical and Quantum Time-Dependent Harmonic Oscillators. Journal of Mathematical Physics, 9 (11), 1976–1986. doi: https://doi.org/10.1063/1.1664532

13. Khurshudyan, A. Z. (2018). New Green’s functions for some nonlinear oscillating systems and related PDEs. International Journal of Modern Physics C, 29 (04), 1850032. doi: https://doi.org/10.1142/s0129183118500328

14. Khurshudyan, As. Zh., Frasca, M. (2018). Green's functions for higher order nonlinear equations. URL: https://www.researchgate.net/publication/326110263_Green's_functions_for_higher_order_nonlinear_equations

15. Луценко, А. В., Скорик, В. А. (2002). Функция Грина и её применение. Харьков: издательство ХНУ, 26.

16. Egorov, Y. V. (1990). A contribution to the theory of generalized functions. Russian Mathematical Surveys, 45 (5), 1–49. doi: https://doi.org/10.1070/rm1990v045n05abeh002683

17. Stakgold, I., Holst, M. (Eds.) (2011). Green’s functions and boundary value problems. John Wiley & Sons. doi: https://doi.org/10.1002/9780470906538

18. Беляева, И. Н., Уколов, Ю. А., Чеканов, Н. А. (2005). Построение общего решения дифференциальных уравнений фуксовского типа в виде степенных рядов. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 50200500089.

19. Беляева, И. Н., Чеканов, Н. А. (2010). Символьно-численное интегрирование линейного дифференциального уравнения третьего порядка в виде обобщенных рядов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010614257. Заявка № 2010612592 от 11 мая 2010 г.

20. Беляева, И. Н., Чеканов, Н. А. (2011). Программа построения функции Грина для дифференциального уравнения второго порядка. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011616934.

21. Беляева, И. Н., Богачев, В. Е., Чеканов, Н. А. (2012). Программа построения функции Грина для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661078.

22. Камке, Э. (1965). Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 704.

23. Михлин, С. Г. (1947). Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Москва-Ленинград: ОГИЗ издательство технико-теоретической литературы, 304.