

Поиск условий наступления динамической автобалансировки для ротора на двух упруго-вязких опорах

Г. Б. Филимоныхин, И. И. Филимоныхина, В. В. Пирогов, С. В. Рагулин, Н. И. Садовый, Г. Страутманис, Е. М. Трифонова, Н. С. Якименко

Визначено умови настання динамічного автобалансування у випадку ротора на двох пружно-в'язких опорах, що балансується двома і більше пасивними автобалансирами будь-якого типу.

Застосовано модернізований енергетичний метод в припущенні, що маса вантажів автобалансирів набагато менше маси ротора. Метод розроблений для роторів на ізотропних пружно-в'язких опорах, коли до ротора приєднані тіла, відносному руху яких перешкоджають пружні і в'язкі сили опору. Метод дозволяє знаходити стаціонарні рухи роторної системи, оцінювати їх стійкість. На стаціонарних рухах відносні рухи приєднаних тіл припиняються, і система обертається як одне ціле навколо осі обертання, утвореної опорами.

Описана механіко-математична модель системи. Знайдений узагальнений потенціал на стаціонарних рухах і дисипативна функція, що відповідає опорам. Для узагальнених координат ротора складені рівняння стаціонарних рухів системи. Узагальнений потенціал досліджений на умовний екстремум в припущенні, що виконуються рівняння стаціонарних рухів, що відповідають узагальненим координатам ротора.

Встановлено, що динамічне балансування ротора можливо тільки в разі довгого ротора, двох і більше автобалансирів будь-якого типу, встановлених в різних площинах корекції і тільки на зарезонансного швидкостях обертання ротора. Встановлено, що сили опору в опорах явно не змінюють умови настання автобалансування, однак можуть змінювати ці умови неявно – шляхом зміни області існування стаціонарних рухів.

Отриманий результат збігається з результатом, отриманим із застосуванням узагальненого емпіричного критерію настання автобалансування при неврахування демпфірування в опорах. Показано, що модернізований енергетичний метод (як і узагальнений емпіричний критерій настання автобалансування) дозволяє знаходити узагальнені умови настання автобалансування, придатні для будь-яких типів автобалансирів. Тому обидва методи придатні для побудови загальної теорії пасивних автобалансирів – застосовної для автобалансирів будь-якого типу

Ключові слова: ротор, ізотропна опора, автобалансири, стаціонарний рух, стійкість руху, рівняння усталеного руху

1. Введение

Для балансировки быстровращающихся роторов применяются пассивные автобалансиры [1–3]. Со временем движение ротора с автобалансирами уста-

навливаются. На так называемых основных (установившихся) движениях грузы балансируют ротор, а на побочных – нет [3]. Для работоспособности автобалансиоров необходимо, чтобы основные движения были устойчивы [1–15] и достаточно, чтобы при этом побочные движения были неустойчивы. Наиболее общую информацию о работоспособности автобалансиоров дают результаты аналитических исследований. В связи с этим существует общая проблема построения теории пассивной автобалансировки.

Пассивные автобалансиры могут быть классическими (маятниковыми, роликовыми, шаровыми, кольцевыми и т. д.) [1–3] и неклассическими [3, 9, 10]. Большое количество как разных типов автобалансиоров, так и различных роторных машин значительно затрудняет построение аналитической теории пассивной автобалансировки традиционными методами, основанными на поиске установившихся движений роторной системы и исследовании их устойчивости [2–10, 15]. Такие аналитические исследования значительно затрудняются или становятся невозможными в случаях автобалансиоров с многими грузами, многорядных автобалансиоров, нескольких автобалансиоров, с увеличением числа степеней свободы роторной системы и т. д. Но именно такие случаи актуальны для практики.

Для построения общей теории пассивной автобалансировки были разработаны эмпирические критерии наступления автобалансировки [3, 12, 13]. Получаемые с их применением аналитические результаты носят общий характер, так как применимы для автобалансиоров любого типа [3, 11–13]. Критерии позволяют отвечать на вопрос, при выполнении каких условий и в каком диапазоне скоростей вращения можно сбалансировать жесткий или гибкий, определенным образом закрепленный ротор одним и более пассивными автобалансирами.

Для поиска и оценки устойчивости всех стационарных установившихся движений (на которых грузы вращаются синхронно с ротором) были разработаны энергетические методы [14, 15].

Актуально показать, что при определенных дополнительных предположениях энергетические методы так же позволяют строить общую теорию пассивной автобалансировки. При этом актуально найти аналитические условия наступления динамической автобалансировки для ротора на двух изотропных опорах, образованными как упругими телами (пружинами), так и вязкими (демпферами). Указанная механическая система может моделировать балансировку пассивными автобалансирами барабанов стиральных машин, центрифуг, экстракторов, сепараторов, вращающихся частей в сборе осевых и центробежных вентиляторов и т. д.

Наличие двух разных подходов (эмпирического и энергетического) позволяет с наименьшими затратами труда строить общую теорию пассивной автобалансировки, проверять корректность полученных результатов путем решения одной задачи разными методами.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Рассмотрим более подробно результаты, полученные в случае динамической балансировки двухопорного ротора двумя пассивными автобалансирами с двумя одинаковыми грузами (маятниками, шарами и т. п.).

В [4] предполагалось, что масса автобалансиоров намного меньше массы ротора, отсутствуют силы сопротивления в опорах ротора, не учитывалось вращательное движение шаров при качении по беговым дорожкам (шары моделировались математическими маятниками). Установлено, что балансировка возможна только в случае длинного ротора на зарезонансных скоростях вращения.

В [5] получены такие же условия наступления автобалансировки, что и в [4], однако учитывалось вращение шаров при качении без скольжения по беговым дорожкам.

В [6] построена математическая модель, аналогичная модели из работы [4], однако учитывающая вязкое сопротивление в опорах ротора. Численными методами установлено, что автобалансировка наступает на скоростях, несколько превышающих наибольшую резонансную скорость вращения ротора при условии, что ротор длинный. Результат носит частный характер, так как получен при определенных значениях параметров системы. Закономерность влияния демпфирования в опорах на условия наступления автобалансировки не изучена.

В [7] построена математическая модель, в рамках которой шары рассматриваются как материальные точки (математические маятники). Модель учитывает силы сухого и вязкого трения, препятствующие движению шаров относительно ротора, силы демпфирования в опорах и силы тяжести. Вычислительными экспериментами было установлено, что динамическая автобалансировка наступает в случае длинного ротора на зарезонансных скоростях вращения ротора. Результат носит частный характер. Закономерности влияния демпфирования в опорах, сил тяжести, сухого трения на условия наступления автобалансировки не изучены.

В [8] проведены исследования, аналогичные исследованиям, проведенным в [6], только с учетом анизотропии опор. Численными методами установлено, что динамическая автобалансировка возможна только в случае длинного ротора на зарезонансных скоростях вращения. Закономерность влияния демпфирования в опорах на условия наступления автобалансировки не изучена.

В [9] исследована балансировка ротора новым типом пассивного автобалансиора – шарового-стержневого-пружинного, а в работе [10] – шарового-пружинного. Исследования проводились в основном численными методами. Каждый автобалансиор имел по два одинаковых груза. При определенных значениях параметров системы было установлено, что новые автобалансиры имеют области параметров, внутри которых наступает автобалансировка не меньшие чем у обычного шарового автобалансиора.

Подходы, примененные в работах [4–10], трудоемкие, так как реализуются для конкретного типа автобалансиора и основаны на поиске установившихся движений системы и исследовании их устойчивости. Аналитические результаты удалось получить только при неучете сил вязкого сопротивления в опорах и только для автобалансиоров с двумя грузами.

Рассмотрим подходы, позволяющие строить общую теорию пассивных автобалансиоров. Эти подходы позволяют получать аналитические результаты, пригодные для автобалансиоров любого типа.

В [3] был предложен инженерный (эмпирический) критерий наступления автобалансировки при балансировке ротора одним автобалансиором любого ти-

па в одной плоскости коррекции. Были найдены условия наступления автобалансировки при балансировке ротора одним автобаланси́ром любого типа при разной кинематике движения ротора.

В [11] инженерный (эмпирический) критерий был использован для определения условий наступления автобалансировки при балансировке ротора на двух изотропных упругих опорах одним автобаланси́ром любого типа. Была показана применимость критерия при массе грузов автобаланси́ра и неуравновешенности ротора, сопоставимой с массой ротора.

В [12] был модернизирован инженерный (эмпирический) критерий наступления автобалансировки, с целью получения им условий наступления автобалансировки при балансировке ротора любым количеством автобаланси́ров любого типа. Применение нового критерия и его эффективность проиллюстрированы на задаче балансировки несколькими автобаланси́рами (избыточным количеством) твердого осесимметричного ротора с неподвижной точкой и изотропной упругой опорой.

В [13] модернизированный эмпирический критерий наступления автобалансировки был применен к осесимметричному ротору на двух изотропных упругих опорах. В результате было установлено, что динамически можно сбалансировать только длинный ротор, двумя и более пассивными автобаланси́рами любого типа и только на зарезонансных скоростях вращения. Результаты, полученные в [13], наиболее общие, так как охватывают результаты работ [4–10]. Однако в [13] влияние сил сопротивления в опорах на условия наступления автобалансировки не изучено.

Следует отметить, что применение эмпирических критериев усложняется при учете сил вязкого сопротивления в опорах [3, 11–13]. Сами критерии требуют проверки правильности работы. Поэтому целесообразно получить условия наступления автобалансировки альтернативным методом. В качестве альтернативного метода можно использовать обобщенный энергетический метод исследования стационарных движений роторов с пассивными автобаланси́рами, изложенный в [14]. Этот метод является обобщением подхода, использованного в [15] для поиска всех стационарных движений и оценки их устойчивости в рамках плоской модели ротора на изотропных упругих опорах, балансируемого двухшаровым автобаланси́ром.

Обобщенный энергетический метод применим для роторов на изотропных упруго-вязких опорах, в случаях, когда ротор несет присоединенные тела, на которые при движении относительно ротора действуют вязкие и упругие силы. Метод позволяет находить условия зарождения, существования и исчезновения всех стационарных движений роторной системы, а также оценивать устойчивость этих движений. Результаты работы [14] позволяют предположить, что обобщенный энергетический метод применим для получения условий наступления автобалансировки, пригодных для любых типов пассивных автобаланси́ров.

3. Цель и задачи исследования

Целью исследования является найти аналитические условия наступления динамической автобалансировки для ротора на двух изотропных упруго-вязких

опорах и при этом оценить: влияние демпфирования в опорах на устойчивость стационарных движений системы; применимость модернизированного энергетического метода при построении общей теории пассивной автобалансировки.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- найти с помощью модернизированного энергетического метода для рассматриваемой роторной системы условия наступления динамической автобалансировки;
- оценить влияние демпфирования в опорах на устойчивость стационарных движений системы;
- оценить пригодность метода для построения общей теории пассивных автобалансиров (применимой для автобалансиров любого типа).

4. Метод определения условий наступления автобалансировки

Применяем обобщенный энергетический метод [14]. Ротор установлен на изотропные упруго-вязкие опоры и вращается с постоянной угловой скоростью ω . Относительно ротора движутся грузы автобалансиров. Относительному движению грузов препятствуют силы вязкого сопротивления Ньютона.

Обобщенные координаты ротора обозначены как z_i , $/i = \overline{1, n_r}/$, где n_r – количество степеней свободы ротора. Обобщенные координаты присоединенных тел обозначены как ψ_j , $/j = \overline{1, n_b}/$, где n_b – количество степеней свободы присоединенных тел. На стационарных движениях обобщенные координаты постоянны:

$$z_i = \text{const}_i, \quad /i = \overline{1, n_r}/; \quad \psi_j = \text{const}_{j+n_r}, \quad /j = \overline{1, n_b}/. \quad (1)$$

Уравнения стационарных движений делятся на две группы

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_j} + \frac{\partial D_1}{\partial \dot{z}_j} = 0, \quad /j = \overline{1, n_r}/; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_j} + \frac{\partial D_1}{\partial \dot{\psi}_j} = 0, \quad /j = \overline{1, n_b}/, \quad (2)$$

где Π – обобщенный потенциал, D_1 – линейная часть диссипативной функции, составленной для обобщенных координат ротора.

В соответствии с обобщенным энергетическим методом, на движения ротора налагаются связи

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_j} + \frac{\partial D_1}{\partial \dot{z}_j} = 0, \quad /j = \overline{1, n_r}/. \quad (3)$$

В соответствии с ними ротор мгновенно приходит в положение, соответствующее суммарной неуравновешенности. После этого грузы стремятся к некоторому равновесному положению.

Для устойчивости некоторого стационарного движения (1) роторной системы необходимо, чтобы на нем обобщенный потенциал Π имел по крайней мере неизолированный условный минимум. При этом условиями выступают уравнения (3).

Для получения обобщенных условий наступления автобалансировки, пригодных для любых типов автобалансиров, предполагается не конкретизировать и не использовать вторую группу уравнений в (2). Особенности реализации этой идеи излагаются ниже на примере ротора на двух изотропных упруго-вязких опорах.

5. Результаты определения обобщенных условий наступления динамической автобалансировки

5.1. Описание модели системы

На рис. 1 показана схема ротора на двух опорах, а на рис. 2 – его схема движения. Ротор уравновешен, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через продольную ось вала ротора при недеформированных опорах. С ним жестко связаны массы, создающие неуравновешенность. На ротор установлены пассивные автобалансировки для балансировки неуравновешенности. Корпуса автобалансиров жестко связаны с ротором. Поэтому отнесем их к ротору. Неуравновешенные массы рассматриваем отдельно от ротора.

Ротор удерживают изотропные упруго-вязкие опоры, соответственно с коэффициентами жесткости и вязкости k_1, b_1 и k_2, b_2 . Действие сил тяжести не учитывается.

Движение ротора будем задавать при помощи двух троек осей $OXYZ$ и $P\Xi NZ$. Оси $P\Xi NZ$ – главные центральные оси инерции ротора. В положении статического равновесия неподвижного ротора две системы осей совпадают, причем оси Z, Z направлены по оси вала ротора. В процессе движения оси $P\Xi NZ$ перемещаются таким образом. Сперва оси $P\Xi NZ$ перемещаются поступательно на x, y относительно осей $OXYZ$, вследствие чего переходят в промежуточное положение $PX_p Y_p Z_p$ – рис. 2, а. Потом оси $PX_p Y_p Z_p$ поворачиваются на углы α, β , как это показано на рис. 2, б, после чего переходят в оси $P\Xi NZ$. Потом оси $P\Xi NZ$ и $OXYZ$ поворачиваются вокруг оси Z с угловой скоростью ω .

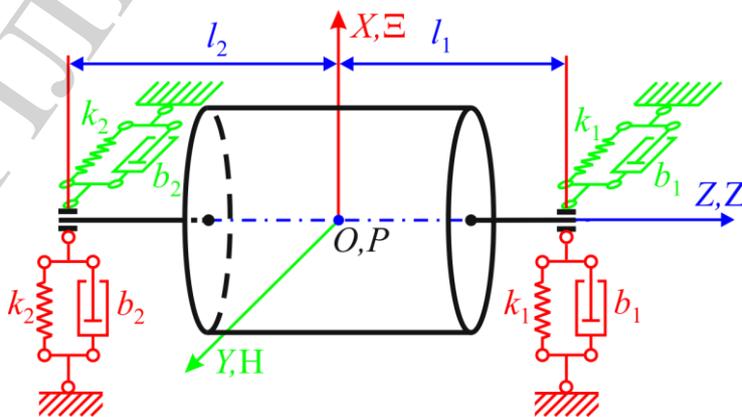


Рис. 1. Схема ротора на двух упруго-вязких опорах

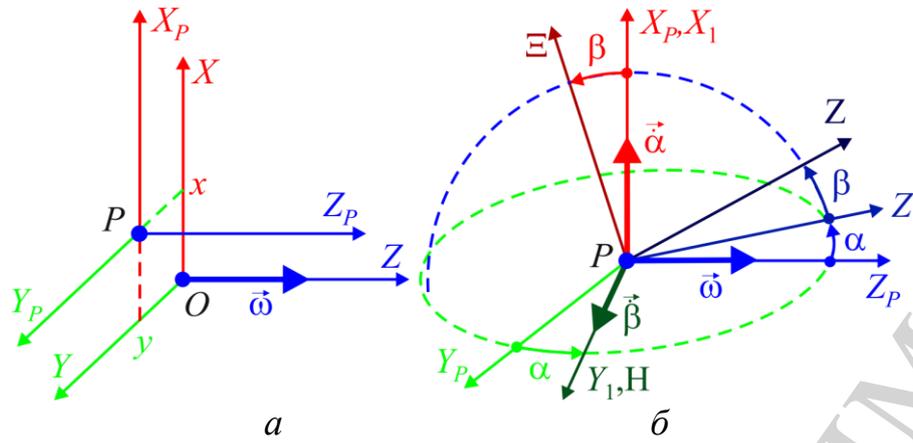


Рис. 2. Схема движения ротора

Заметим, что на установившемся движении система вращается как жесткое целое вокруг оси Z с постоянной угловой скоростью ω .

5. 2. Обобщенный потенциал, диссипативная функция и уравнения стационарных движений

Кинетическая энергия системы на установившемся движении. Относительно осей $P\Xi HZ$ момент инерции системы образован двумя составляющими – ротором и неуравновешенностью с грузами в автобалансирах. Обозначим через $\mathbf{J}_P^{(r)}$ тензор инерции ротора, а через $\mathbf{J}_P^{(S)}$ – неуравновешенности с грузами:

$$\mathbf{J}_P^{(r)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{J}_P^{(S)} = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тензор инерции системы относительно осей $P\Xi HZ$ $\mathbf{I}_P = \mathbf{J}_P^{(r)} + \mathbf{J}_P^{(S)}$, откуда

$$I_\xi = A + J_\xi, \quad I_\eta = B + J_\eta, \quad I_\zeta = C + J_\zeta,$$

$$I_{\xi\eta} = J_{\xi\eta}, \quad I_{\xi\zeta} = J_{\xi\zeta}, \quad I_{\eta\zeta} = J_{\eta\zeta}. \quad (5)$$

Для пассивных автобалансиров с твердыми грузами $J_\zeta = const$ [3]. Поэтому

$$I_\zeta = C + J_\zeta = const. \quad (6)$$

Пусть относительно осей $P\Xi NZ$ система имеет координаты центра масс (точки G , на схеме не показана) ξ_G, η_G, ζ_G . Тогда тензор инерции системы относительно центральных осей системы $G\Xi_G H_G Z_G$ (на схеме не показаны), параллельных осям $P\Xi NZ$:

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} I_\xi - M_\Sigma (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -I_{\xi\eta} + M_\Sigma \xi_G \eta_G & -I_{\xi\zeta} + M_\Sigma \xi_G \zeta_G \\ -I_{\xi\eta} + M_\Sigma \xi_G \eta_G & I_\eta - M_\Sigma (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -I_{\eta\zeta} + M_\Sigma \eta_G \zeta_G \\ -I_{\xi\zeta} + M_\Sigma \xi_G \zeta_G & -I_{\eta\zeta} + M_\Sigma \eta_G \zeta_G & I_\zeta - M_\Sigma (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} I_{\xi_G} &= I_\xi - M_\Sigma (\eta_G^2 + \zeta_G^2), \quad I_{\xi_G \eta_G} = I_{\xi\eta} - M_\Sigma \xi_G \eta_G, \quad I_{\xi_G \zeta_G} = I_{\xi\zeta} - M_\Sigma \xi_G \zeta_G, \\ I_{\eta_G} &= I_\eta - M_\Sigma (\xi_G^2 + \zeta_G^2), \quad I_{\eta_G \zeta_G} = I_{\eta\zeta} - M_\Sigma \eta_G \zeta_G, \quad I_{\zeta_G} = I_\zeta - M_\Sigma (\xi_G^2 + \eta_G^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь M_Σ – масса всей системы.

Отметим, что центробежные моменты инерции $I_{\xi\zeta}, I_{\eta\zeta}$ и координаты центра масс ξ_G, η_G являются параметрами, характеризующими неуравновешенность ротора.

Будем предполагать, что массы неуравновешенности и грузов намного меньше массы ротора. В связи с этим будем считать величинами первого порядка малости:

- координаты центра масс ξ_G, η_G, ζ_G и компоненты тензора инерции $\mathbf{J}_P^{(S)}$ неуравновешенности с грузами;
- координаты α, β, x, y ротора.

Будем искать приведенный потенциал с точностью до величин второго порядка малости включительно.

По теореме Кенига [15] кинетическая энергия системы на установившемся движении является суммой двух составляющих кинетической энергии: T_{tr} – поступательного движения системы вместе с центром масс; T_r – вращательного движения системы вокруг центра масс. При этом

$$T = T_{tr} + T_r, \quad T_{tr} = \frac{1}{2} M_\Sigma r_G^2 \omega^2, \quad T_r = \frac{1}{2} \omega_{G\xi_G \eta_G \zeta_G}^m \mathbf{I}_G \omega_{G\xi_G \eta_G \zeta_G}, \quad (8)$$

где r_G – расстояние от центра масс системы до оси вращения Z ; $\omega_{G\xi_G \eta_G \zeta_G}$ – вектор-столбец угловой скорости вращения системы, найденный в проекциях на оси $G\Xi_G H_G Z_G$.

С точностью до величин первого порядка малости включительно перемещение центра масс ротора относительно осей $OXYZ$

$$\begin{aligned}x_G &= x + \xi_G + \zeta_G \beta \approx x + \xi_G, \\y_G &= y + \eta_G - \zeta_G \alpha \approx y + \eta_G, \quad z_G = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Тогда, с точностью до величин второго порядка малости включительно

$$\begin{aligned}T_r &= \frac{1}{2} M_\Sigma \left[(x + \xi_G)^2 + (y + \eta_G)^2 \right] \omega^2 = \\&= \frac{1}{2} M_\Sigma \left[x^2 + y^2 + 2(x\xi_G + 2y\eta_G) + \xi_G^2 + \eta_G^2 \right] \omega^2.\end{aligned}\quad (10)$$

Проекции на оси $G\xi_G \eta_G \zeta_G$ угловой скорости вращения системы (рис. 2, б):

$$\begin{aligned}\omega_{\xi_G} &= -\omega \cos \alpha \sin \beta = -\omega \beta + O(\beta^3), \\ \omega_{\eta_G} &= \omega \sin \alpha = \omega \alpha + O(\alpha^3), \\ \omega_{\zeta_G} &= \omega \cos \alpha \cos \beta = \omega [1 - (\alpha^2 + \beta^2)/2] + O(\alpha^4, \beta^4, \alpha^2 \beta^2).\end{aligned}\quad (11)$$

В свою очередь,

$$T_r = \frac{1}{2} \left(I_{\xi_G} \omega_{\xi_G}^2 + I_{\eta_G} \omega_{\eta_G}^2 + I_{\zeta_G} \omega_{\zeta_G}^2 \right) - I_{\xi_G \eta_G} \omega_{\xi_G} \omega_{\eta_G} - I_{\xi_G \zeta_G} \omega_{\xi_G} \omega_{\zeta_G} - I_{\eta_G \zeta_G} \omega_{\eta_G} \omega_{\zeta_G}.$$

Тогда с точностью до величин второго порядка малости включительно

$$T_r = \frac{\omega^2}{2} \left[(B - C) \alpha^2 + (A - C) \beta^2 + 2(I_{\xi_G \zeta_G} \beta - I_{\eta_G \zeta_G} \alpha) + I_{\zeta_G} - (\xi_G^2 + \eta_G^2) M_\Sigma \right]. \quad (12)$$

Кинетическая энергия системы с точностью до величин второго порядка малости включительно

$$T = \frac{\omega^2}{2} \left\{ (B - C) \alpha^2 + (A - C) \beta^2 + 2(I_{\xi_G \zeta_G} \beta - I_{\eta_G \zeta_G} \alpha) + \right. \\ \left. + M_\Sigma [x^2 + y^2 + 2(x\xi_G + y\eta_G)] \right\} + I_{\zeta_G} \omega^2 / 2. \quad (13)$$

Потенциальная энергия системы:

$$V = (k_1 \Delta l_1^2 + k_2 \Delta l_2^2) / 2 + \text{const}_1, \quad (14)$$

где $\Delta l_1, \Delta l_2$ – модуль деформации пружин опор, const_1 – неопределенная постоянная. В проекциях на оси $Kxyz$

$$\Delta l_{1x} \approx x + l_1 \beta. \quad (15)$$

С точностью до величин второго порядка малости включительно

$$V = [k_{11}(x^2 + y^2) + 2k_{14}(\beta x - \alpha y) + k_{33}(\alpha^2 + \beta^2)] / 2 + \text{const}, \quad (16)$$

где

$$k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{14} = k_1 l_1 - k_2 l_2, \quad k_{33} = k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2. \quad (17)$$

Обобщенный потенциал на установившемся движении $\Pi = V - T$. Пусть

$$\text{const}_1 = -I_\zeta \omega^2 / 2.$$

Тогда с точностью до величин второго порядка малости включительно

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \left\{ [k_{33} - (B - C)\omega^2] \alpha^2 + [k_{33} - (A - C)\omega^2] \beta^2 + \right. \\ \left. + (k_{11} - M_\Sigma \omega^2)(x^2 + y^2) + 2k_{14}(\beta x - \alpha y) \right\} + \\ + [I_{\eta_\zeta} \alpha - I_{\xi_\zeta} \beta - M_\Sigma(x \xi_{\zeta G} + y \eta_{\zeta G})] \omega^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем обозначения

$$v_{11} = (B - C)\omega^2 - k_{33}, \quad v_{22} = (A - C)\omega^2 - k_{33},$$

$$v_{33} = v_{44} = M_\Sigma \omega^2 - k_{11}. \quad (19)$$

Введем вектора и матрицы

$$q^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -I_{\eta_\zeta} \\ I_{\xi_\zeta} \\ M_\Sigma \xi_{\zeta G} \\ M_\Sigma \eta_{\zeta G} \end{pmatrix},$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 & k_{14} \\ 0 & v_{22} & -k_{14} & 0 \\ 0 & -k_{14} & v_{33} & 0 \\ k_{14} & 0 & 0 & v_{33} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Тогда обобщенный потенциал в векторно-матричном виде

$$\Pi = 0.5(q^{(r)})^T \Pi q^{(r)} - \omega^2 (q^{(r)})^T S. \quad (21)$$

Диссипативная функция, соответствующая опорам ротора

$$D^{(r)} = \frac{b_1}{2} \left\{ \left[\dot{x} + l_1 \dot{\beta} - \omega(y - l_1 \alpha) \right]^2 + \left[\dot{y} - l_1 \dot{\alpha} + \omega(x + l_1 \beta) \right]^2 \right\} + \frac{b_2}{2} \left\{ \left[\dot{x} - l_2 \dot{\beta} - \omega(y + l_2 \alpha) \right]^2 + \left[\dot{y} + l_2 \dot{\alpha} + \omega(x - l_2 \beta) \right]^2 \right\} = \\ = D_0^{(r)} + D_1^{(r)} + D_2^{(r)}. \quad (22)$$

В (22):

$$D_2^{(r)} = 0.5 \left[b_{11} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2b_{14} (\dot{\beta}\dot{x} - \dot{\alpha}\dot{y}) + b_{33} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \right],$$

$$D_1^{(r)} = \left[b_{11} (x\dot{y} - y\dot{x}) + b_{14} (\alpha\dot{x} - x\dot{\alpha} + \beta\dot{y} - \dot{\beta}y) + b_{33} (\dot{\beta}\alpha - \beta\dot{\alpha}) \right] \omega,$$

$$D_0^{(r)} = 0.5 \left[b_{11} (x^2 + y^2) + 2b_{14} (\beta x - \alpha y) + b_{33} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \omega^2; \quad (23)$$

– квадратичные, линейные и составляющие, не зависящие от обобщенных скоростей, и в (23)

$$b_{11} = b_1 + b_2, \quad b_{14} = b_1 l_1 - b_2 l_2, \quad b_{33} = b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2. \quad (24)$$

Введем кососимметричную матрицу

$$B_1^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & -b_{33} & -b_{14} & 0 \\ b_{33} & 0 & 0 & -b_{14} \\ b_{14} & 0 & 0 & -b_{11} \\ 0 & b_{14} & b_{11} & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Тогда, в векторно-матричном виде

$$D_1^{(r)} = 0.5\omega\dot{q}^T B_1^{(r)} q. \quad (26)$$

Уравнения стационарных движений системы, составленные для обобщенных координат ротора:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^{(r)}} + \frac{\partial D_1^{(r)}}{\partial \dot{q}^{(r)}} = \Pi q^{(r)} - \omega^2 S + \omega B_1^{(r)} q^{(r)} = 0. \quad (27)$$

В дальнейшем рассматриваем равенства (27) как условия, при выполнении которых нужно исследовать на экстремум обобщенный потенциал (21).

5. 3. Исследование обобщенного потенциала на условный экстремум

5. 3. 1. Преобразование обобщенного потенциала

Исследуем Π на условный экстремум. Из (27) находим:

$$S = (\Pi q^{(r)} + \omega B_1^{(r)} q^{(r)}) / \omega^2; \quad (28)$$

$$q^{(r)} = \omega^2 (\Pi + \omega B_1^{(r)})^{-1} S. \quad (29)$$

1) Исключим из Π неуравновешенности S . Подставляя S в Π получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= 0.5(q^{(r)})^T \Pi q^{(r)} - \omega^2 (q^{(r)})^T S = 0.5(q^{(r)})^T V q^{(r)} - \\ &- \omega^2 (q^{(r)})^T (\Pi q^{(r)} + \omega B_1^{(r)} q^{(r)}) / \omega^2 = -0.5(q^{(r)})^T \Pi q^{(r)}. \end{aligned} \quad (30)$$

В преобразованиях учтено, что кососимметричная матрица $B_1^{(r)}$ порождает нулевую квадратичную форму $((q^{(r)})^T B_1^{(r)} q^{(r)} = 0)$.

Преобразованный приведенный потенциал явно не зависит от сил вязкого сопротивления в опорах.

2) Исключим из Π обобщенные координаты ротора $q^{(r)}$.

Подставим в (30) обобщенные координаты ротора из (29), получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= -0.5(q^{(r)})^T \Pi q^{(r)} = \\ &= -0.5 \left[\omega^2 (\Pi + \omega B_1^{(r)})^{-1} S \right]^T \Pi \omega^2 (\Pi + \omega B_1^{(r)})^{-1} S = \\ &= -0.5 \omega^4 S^T \left\{ \left[(\Pi + \omega B_1^{(r)})^{-1} \right]^T \Pi (\Pi + \omega B_1^{(r)})^{-1} \right\} S. \end{aligned} \quad (31)$$

По свойству линейных преобразований квадратичных форм, квадратичные формы (30) и (31) одновременно принимают экстремальные значения, при оди-

наковых условиях являются знакоопределенными и т. д. [17]. Поэтому в дальнейшем устойчивость основного движения будем исследовать по квадратичной форме (30).

5.3.2. Условия наступления динамической автобалансировки

Предполагаем, что ротор динамически неуравновешен. Поэтому его балансируют два и более автобалансира в двух и более разных плоскостях коррекции. Поэтому параметры неуравновешенности $I_{\xi\zeta}$, $I_{\eta\zeta}$, ξ_G , η_G – между собой независимы и выражаются не менее, чем через четыре независимые координаты, задающие положения грузов относительно ротора.

Оценим устойчивость основных движений. По критерию Сильвестра [17] необходимые и достаточные условия минимума функции Π из (30) на основном движении

$$v_{ii} > 0, \quad /i = \overline{1,4}/;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{vmatrix} = v_{11}v_{22} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} & -k_{14} \\ 0 & -k_{14} & v_{33} \end{vmatrix} = v_{11}(v_{22}v_{33} - k_{14}^2) > 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} v_{11} & 0 & 0 & k_{14} \\ 0 & v_{22} & -k_{14} & 0 \\ 0 & -k_{14} & v_{33} & 0 \\ k_{14} & 0 & 0 & v_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (v_{11}v_{33} - k_{14}^2)(v_{22}v_{33} - k_{14}^2) > 0. \quad (32)$$

Первые четыре условия в (32) могут выполняться при условии, что

$$A > C, \quad B > C \quad (33)$$

на скоростях, превышающих

$$\omega^* = \max\left(\sqrt{c_{11}/M_\Sigma}, \sqrt{c_{33}/(A-C)}, \sqrt{c_{33}/(B-C)}\right). \quad (34)$$

В соответствии с условием (33) возможна динамическая балансировка только длинного ротора.

Пусть $v_{ii} > 0$, $/i = \overline{1,4}/$. Тогда условие $\Delta_2 > 0$ выполняется автоматически. Условия $\Delta_3 > 0$ и $\Delta_4 > 0$ выполняются при выполнении условий

$$\Delta_{41} = a_{11}a_{33} - c_{14}^2 > 0, \Delta_{42} = a_{22}a_{33} - c_{14}^2 > 0. \quad (35)$$

Уравнение $\Delta_4=0$ является уравнением для поиска резонансных частот колебаний ротора при отсутствии сил сопротивления [3]. Уравнение $\Delta_4=0$ распадается на два уравнения $\Delta_{41}=0$, $\Delta_{42}=0$. Условия (35) выполняются только на зарезонансных скоростях вращения ротора. Таким образом, динамическая балансировка возможна только для длинного ротора на зарезонансных скоростях вращения.

Пусть ротор установлен на опоры так, что $k_{14} = 0$. Тогда условия (35) принимают вид

$$a_{11}a_{33} > 0, a_{22}a_{33} > 0. \quad (36)$$

В этом случае автобалансировка может наступать на скоростях, превышающих ω^* из (34). Для реальных роторных систем [3]

$$\sqrt{c_{11}/M_\Sigma} \leq \sqrt{c_{33}/(B-C)} \leq \sqrt{c_{33}/(A-C)}$$

и поэтому необходимые условия наступления автобалансировки

$$\omega > \sqrt{c_{33}/(A-C)}, A > C. \quad (37)$$

Полученные необходимые условия наступления автобалансировки обобщают результаты, полученные ранее в [13] путем распространения результатов на случай наличия в опорах сил вязкого сопротивления.

6. Обсуждение полученных условий наступления динамической автобалансировки

Как следует из анализа условий (32), ротор, совершающий пространственное движение и установленный на две изотропные упруго-вязкие опоры, может быть динамически сбалансирован двумя и более автобалансирами только в случае длинного ротора (33) на зарезонансных скоростях вращения.

Полученный результат совпадает с результатом, полученным в [13] с применением обобщенного эмпирического критерия наступления автобалансировки при не учете демпфирования в опорах. Это подтверждает корректность результатов, получаемых с применением энергетического и эмпирического методов.

Демпфирование в опорах не влияет на существование и область устойчивости основных движений. Заметим, что демпфирование может влиять как на сами побочные движения, так и на области их существования. Но это влияние

можно исследовать только для конкретных типов автобаланси́ров с использованием второй группы уравнений стационарных движений в (2).

Модернизированный энергетический метод позволяет находить необходимые условия наступления автобаланси́ровки без:

- поиска и оценки устойчивости побочных стационарных движений;
- составления дифференциальных уравнений движения системы.

Тип и количество автобаланси́ров не учитывается в таких исследованиях. Поэтому полученные условия пригодны для автобаланси́ров любого типа, а сам метод пригоден для построения общей теории пассивной автобаланси́ровки (применимой для автобаланси́ров любого типа).

У метода есть недостатки, присущие приближенным методам исследования устойчивости движения по Ляпунову. Метод дает приближенные границы областей наступления автобаланси́ровки. Также метод не позволяет изучить нестационарные установившиеся движения системы и переходные процессы.

В дальнейшем планируется получить с помощью модернизированного энергетического метода условия наступления одноплоскостной автобаланси́ровки для ротора на изотропных упруго-вязких опорах.

7. Выводы

1. Ротор, совершающий пространственное движение и установленный на две изотропные упруго-вязкие опоры, может быть динамически сбалансирован двумя и более автобаланси́рами любого типа только в случае длинного ротора на зарезонансных скоростях вращения.

2. Демпфирование в опорах:

- не влияет на существование и область устойчивости основных движений;
- может влиять как на сами побочные движения, так и на области их существования.

3. Модернизированный энергетический метод позволяет находить необходимые условия наступления автобаланси́ровки без:

- поиска и оценки устойчивости побочных стационарных движений;
- составления дифференциальных уравнений движения системы.

Тип и количество автобаланси́ров не учитывается в таких исследованиях. Поэтому полученные условия пригодны для автобаланси́ров любого типа, а сам метод пригоден для построения общей теории пассивной автобаланси́ровки (применимой для автобаланси́ров любого типа).

Литература

1. Thearle, E. L. (1950). Automatic dynamic balancers (Part 2 – Ring, pendulum, ball balancers). *Machine Design*, 22 (10), 103–106.
2. Гусаров, А. А. (2002). Автобалансирующие устройства прямого действия. М.: Наука, 119.
3. Філімоніхін, Г. Б. (2004). Зрівноваження і віброзахист роторів автобаланси́рами з твердими коригувальними вантажами. Кіровоград: КНТУ, 352.
4. Нестеренко, В. П. (1985). Автоматическая баланси́ровка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 84.

5. Sperling, L., Ryzhik, B., Duckstein, H. (2001). Two-plane automatic balancing. *Machine Dynamics Problems*, 25 (3/4), 139–152.
6. Rodrigues, D. J., Champneys, A. R., Friswell, M. I., Wilson, R. E. (2008). Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43 (6), 527–541. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002>
7. Bolton, J. N. (2010). *Single- and Dual-Plane Automatic Balancing of an Elastically-Mounted Cylindrical Rotor with Considerations of Coulomb Friction and Gravity*. Blacksburg, Virginia, 338.
8. Rodrigues, D. J., Champneys, A. R., Friswell, M. I., Wilson, R. E. (2011). Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46 (9), 1139–1154. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.04.033>
9. Lu, C.-J., Wang, M.-C. (2011). Stability analysis of a ball–rod–spring automatic balancer. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53 (10), 846–854. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.07.005>
10. Rezaee, M., Mohammad Etefagh, M., Fathi, R. (2019). Dynamics and Stability of Non-Planar Rigid Rotor Equipped with Two Ball-Spring Autobalancers. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 19 (02), 1950001. doi: <https://doi.org/10.1142/s0219455419500019>
11. Горбенко, А. Н., Шмелев, С. Х. (2018). Необходимые условия устойчивости автобалансировки двухопорного ротора с учетом массы дисбаланса. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение*, 5, 36–50. doi: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2018-5-36-50>
12. Filimonikhin, G., Filimonikhina, I., Dumenko, K., Lichuk, M. (2016). Empirical criterion for the occurrence of auto-balancing and its application for axisymmetric rotor with a fixed point and isotropic elastic support. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5 (7 (83)), 11–18. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.79970>
13. Filimonikhin, G., Filimonikhina, I., Yakymenko, M., Yakimenko, S. (2017). Application of the empirical criterion for the occurrence of auto-balancing for axisymmetric rotor on two isotropic elastic supports. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (7 (86)), 51–58. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.96622>
14. Filimonikhin, G., Filimonikhina, I., Ienina, I., Rahulin, S. (2019). A procedure of studying stationary motions of a rotor with attached bodies (auto-balancer) using a flat model as an example. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3 (7 (99)), 43–52. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.169181>
15. Муйжنيк, А. И. (1959). Некоторые вопросы теории автоматической динамической балансировки. *Вопросы динамики и прочности*, 6, 123–145.
16. Strauch, D. (2009). *Classical Mechanics: An Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 405. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-73616-5>
17. Ruelle, D. (1989). *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*. Academic Press, 196. doi: <https://doi.org/10.1016/c2013-0-11426-2>