



## Gravity: Jurnal Ilmiah Penelitian dan Pembelajaran Fisika

<http://jurnal.untirta.ac.id/index.php/Gravity>  
ISSN: 244-515x; e-ISSN: 2528-1976

Vol. 5, No. 2, Juli 2019, Hal. 1-7



# MODEL DINAMIKA ALAM SEMESTA DENGAN TEORI BSBM DAN GAS CHAPLYGIN

**Azrul Sulaiman Karim Pohan**

Program Studi Fisika, Institut Teknologi Sumatera, Lampung

E-mail: [azrul@fi.itera.ac.id](mailto:azrul@fi.itera.ac.id)

### ABSTRACT

This universe model is built with a source of dynamics in the form of scalar density, radiation density, and dark energy density associated with Chaplygin gas. This action was built by integrating the BSBM theory with the Chaplygin gas model. Mathematical models obtained are then analyzed using a system of dynamics. The trajectory of the model built illustrates the stability of the model. Negative eigenvalues are related to stability of the system and vice versa positive eigenvalues are related to instability. Scalar values vary according to changes in time. This shows that fine structure constants have a value that is not constant or in other words the value varies. The time in this model is not real time (cosmic time), only as a parameter that the field value of the salar varies with time. This indicates that fine structure constants have a value that is not constant or in other words the value varies. This is consistent with the results of the probe that the fine structure constants have values that are not entirely constant.

Keywords: BSBM Theory, Chaplygin Gas, Dynamics

### ABSTRAK

Model alam semesta ini dibangun dengan sumber dinamika berupa densitas medan skalar, densitas radiasi dan densitas energi gelap yang dalam hal ini dikaitkan dengan gas Chaplygin. Aksi dibangun dengan mengintegrasikan teori BSBM dengan model gas Chaplygin. Model matematika yang diperoleh kemudian dianalisis dengan menggunakan sistem dinamika. Trajektori dari model yang dibangun menggambarkan bentuk kestabilan dari model. Nilai eigen yang negatif berkaitan dengan kestabilan dari sistem dan sebaliknya harga eigen positif berkaitan dengan ketidakstabilan. Nilai medan skalar bervariasi sesuai dengan perubahan waktu. Waktu dalam model ini bukan merupakan waktu nyata (waktu kosmik), hanya sebagai parameter yang mengaitkan bahwa nilai medan skalar bervariasi terhadap waktu. Hal ini mengindikasikan bahwa konstanta struktur halus memiliki nilai yang tidak konstan atau dengan kata lain nilainya bervariasi. Hal ini sesuai dengan hasil pengamatan bahwa konstanta struktur halus memiliki nilai yang tidak sepenuhnya konstan.

© 2019 Program Studi Pendidikan Fisika FKIP UNTIRTA

Kata kunci: Dinamika, Gas Chaplygin, Teori BSBM

### PENDAHULUAN

Albert Einstein telah mengemukakan teori relativitas umum yang cukup fenomenal pada tahun 1915. Kajian relativitas umum hingga saat ini terus berkembang dalam bentuk

modifikasinya. Salah satu kajian yang termasuk dalam modifikasi teori relativitas umum Einstein adalah teori Bekenstein-Sandvik-Barrow-Magueijo atau yang lebih dikenal dengan teori BSBM (Sandvik *et al.*, 2002). Pada kajian ini memuat variasi konstanta struktur

halus terhadap ruang dan waktu. Konstanta struktur halus merupakan salah satu konstanta yang sangat penting pada bidang kosmologi. Konstanta struktur halus dinyatakan dalam bentuk  $\alpha = e^2/\hbar c$ , dengan  $e$  merupakan muatan listrik,  $\hbar$  merupakan konstanta planck dibagi  $2\pi$ , dan  $c$  merupakan kecepatan cahaya. Informasi variasi konstanta struktur halus diperoleh dari pengamatan astronomi yakni pengamatan pergeseran merah dari spektrum kuasar (Murphy *et al.*, 2001; Murphy *et al.*, 2004; Webb *et al.*, 1999; Webb *et al.*, 2001; Webb *et al.*, 2011) yang mengindikasikan variasi konstanta struktur halus terhadap ruang dan waktu.

Hasil pengamatan teleskop Keck menunjukkan variasi konstanta struktur halus yakni  $\Delta\alpha/\alpha = (-0.542 \pm 0.12) \times 10^{-5}$  untuk  $z < 1.8$  dan  $\Delta\alpha/\alpha = (-0.74 \pm 0.17) \times 10^{-5}$  untuk  $z > 1.8$  (Webb *et al.*, 2001). Secara teoretik juga memungkinkan variasi konstanta struktur halus terhadap ruang dan waktu. Gagasan terkait variasi konstanta struktur halus, dicetuskan pertama kali oleh Jordan (1937), Teller (1948), Dicke (1959), Stanyukovich (1963), dan Gamow (1967). Variasi pada konstanta struktur halus dapat berupa variasi ruang dan variasi waktu. Variasi terhadap waktu secara teoretik dikemukakan oleh Dicke. Teori BSBM memuat variasi terhadap ruang dan waktu yang dimasukkan dalam variasi muatan listrik. Selain itu variasi ruang dan waktu juga dapat dilakukan terhadap kecepatan cahaya. Variasi terhadap kecepatan cahaya tentunya melanggar invariansi Lorentz (Bekenstein, 1982). Variasi pada muatan listrik dinyatakan dengan  $e = e_0 e^\psi$ , dengan  $e_0$  merupakan nilai muatan listrik saat ini dan  $\psi$ , merupakan fungsi dari ruangwaktu  $x_\mu$ .

Pada kajian teori BSBM dapat juga ditambahkan informasi energi gelap yang dinyatakan sebagai gas Chaplygin (Debnath *et al.*, 2004). Model teori BSBM dengan penambahan gas Chaplygin merupakan salah satu model yang diajukan untuk menggambarkan alam semesta. Selain itu ada juga bentuk analisis dinamika model BSBM

menggunakan sistem dinamik (Farajollahi *et al.*, 2012).

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan empat tahapan utama, pertama pengumpulan tinjauan pustaka terkait dengan teori BSBM dan Chaplygin, kedua membangun model *Lagrangian* menggunakan teori BSBM dan Chaplygin, ketiga menurunkan persamaan gerak yang diperoleh dari model tersebut, terakhir dilakukan analisis dinamika dari persamaan gerak yang telah diperoleh.

### Teori BSBM dan Chaplygin

Teori BSBM dan Chaplygin dinyatakan dalam aksi,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} + L_m + L_c - \frac{\omega}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} e^{-2\psi} - V(\psi) \right] \quad (1)$$

dengan potensial medan skalar,  $V(\psi) = \frac{1}{2} m^2 \psi^2 + \frac{1}{4} \lambda \psi^4$ . Simbol  $R$  menyatakan skalar *Ricci*,  $L_m$  merupakan densitas Lagrangian untuk materi,  $\omega$  merupakan konstanta *coupling* yang nilainya positif,  $\psi$  merupakan medan skalar, dan  $f_{\mu\nu}$  merupakan tensor elektromagnetik.

### Persamaan Medan Skalar

Variasi dari aksi terhadap medan skalar akan menghasilkan persamaan (2),

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} = \frac{2}{\omega} |\zeta| \rho_m e^{-2\psi} + \frac{1}{\omega} (m^2 \psi + \lambda \psi^3) \quad (2)$$

Bentuk variasi terhadap metrik akan menghasilkan persamaan medan Einstein berupa,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G [T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^\psi + T_{\mu\nu}^{em} e^{-2\psi}] \quad (3)$$

dengan nilai  $c = 1$ . Tensor energi momentum untuk materi  $T_{\mu\nu}^m$ , medan skalar  $T_{\mu\nu}^\psi$ , elektromagnetik  $T_{\mu\nu}^{em}$ , dan gas Chaplygin  $T_{\mu\nu}^c$  dinyatakan dengan persamaan (7),

$$T_{\mu\nu}^m = (\rho_m + p_m)u_\mu u_\nu - p_m g_{\mu\nu} \quad (4)$$

$$T_{\mu\nu}^{em} = (|\zeta|\rho_m + \rho_r + p_m + p_r)u_\mu u_\nu \exp(-2\psi) - (p_m + p_r)g_{\mu\nu} e^{-2\psi} \quad (5)$$

$$T_{\mu\nu}^\psi = \omega \left( \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\rho} \partial_\sigma \psi \partial_\rho \psi \right) + g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} m^2 \psi^2 + \frac{1}{4} \lambda \psi^4 \right) \quad (6)$$

$$T_{\mu\nu}^c = (\rho_c + p_c)u_\mu u_\nu - p_c g_{\mu\nu} \quad (7)$$

### Persamaan Friedmann

Persamaan Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) atau yang lebih umum dikenal dengan persamaan Friedmann dapat diturunkan dari persamaan (3), hasil penurunannya dinyatakan dalam persamaan (8)

$$H^2 = \frac{8G\pi}{3} \left[ \rho_m (1 + |\zeta| e^{-2\psi}) + \rho_r e^{-2\psi} + \rho_c + \frac{\omega}{2} \dot{\psi}^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m^2 \psi^2 + \frac{1}{4} \lambda \psi^4 \right) \right] - \frac{\kappa}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (8)$$

dengan  $H = \dot{R}/R$ ,  $\zeta$  menyatakan perbandingan densitas lagrangian elektromagnetik dengan densitas materi,  $\kappa$  menyatakan kurvatur dari alam semesta,  $\Lambda$  merupakan konstanta kosmologi, dan  $R$  adalah faktor skala,  $R$  dan  $\psi$  titik menyatakan turunan terhadap waktu, dan  $\lambda$  adalah konstanta bebas.

Persamaan Friedmann dengan  $\kappa = 0$  dinyatakan dengan persamaan (9)

$$H^2 = \frac{8G\pi}{3} \left[ \rho_m (1 + |\zeta| e^{-2\psi}) + \rho_r e^{-2\psi} + \rho_c + \frac{\omega}{2} \dot{\psi}^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m^2 \psi^2 + \frac{1}{4} \lambda \psi^4 \right) \right] + \frac{\Lambda}{3} \quad (9)$$

### Persamaan Fluida

Kekekalan dari tensor kuat medan menghasilkan persamaan fluida untuk materi, radiasi dan gas Chaplygin yang dinyatakan dengan:

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad (10)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 2\dot{\psi}\rho_r \quad (11)$$

$$\dot{\rho}_c + 3H \left( \rho_c - \frac{A}{\rho_c^\beta} \right) = 2\dot{\psi}\rho_r \quad (12)$$

Persamaan percepatan faktor skala dapat diturunkan dari persamaan medan Einstein yang dinyatakan dengan

$$2\dot{H} + 3H^2 = 8G\pi \left[ -\frac{1}{3} \rho_r e^{-2\psi} + \frac{A}{\rho_c^\beta} - \frac{\omega}{2} \dot{\psi}^2 - \left( \frac{1}{2} m^2 \psi^2 + \frac{1}{4} \lambda \psi^4 \right) \right] + \Lambda - \frac{\kappa}{R^2} \quad (13)$$

Persamaan (8) dibagi dengan  $H^2$  dan nilai  $8\pi G = c = \hbar = 1$  diperoleh hasil,

$$1 = \frac{\rho_m}{3H^2} + \frac{|\zeta|\rho_m}{3H^2} e^{-2\psi} + \frac{\rho_r}{3H^2} e^{-2\psi} + \frac{\omega}{6H^2} \dot{\psi}^2 + \frac{\rho_c}{3H^2} - \frac{m^2 \psi^2}{6H^2} - \frac{\lambda \psi^4}{12H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (14)$$

Persamaan transformasi diambil dari persamaan (14),

$$X_1 = \frac{\rho_m}{3H^2} \quad (15)$$

$$X_2 = \frac{\rho_m}{3H^2} e^{-2\psi} \quad (16)$$

$$X_3 = \frac{\rho_r}{3H^2} e^{-2\psi} \quad (17)$$

$$X_4 = \frac{\dot{\psi}}{H} \quad (18)$$

$$X_5 = \rho_c \quad (19)$$

$$X_6 = \psi \quad (20)$$

$$X_7 = \frac{1}{H} \quad (21)$$

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan (14) kemudian ditransformasi dengan permisalan persamaan (15)-(21) memberikan hasil:

$$1 = X_1 + |\zeta|X_2 + X_3 + \frac{\omega}{6}X_4 + \frac{X_5 X_7^2}{3} - \frac{m^2 X_6^2 X_7^2}{3} - \frac{\lambda X_6^4 X_7^2}{12} + \frac{\Lambda X_7^2}{3} \quad (22)$$

Berikutnya persamaan (13) setelah ditransformasi menjadi,

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} - \frac{X_3}{2} + A \frac{X_5^{-\beta} X_7^2}{2} - \frac{\omega}{4} X_4^2 - \frac{m^2 X_6^2 X_7^2}{4} - \frac{\lambda X_6^4 X_7^2}{8} + \frac{\Lambda X_7^2}{2} \quad (23)$$

Penurunan persamaan (15)-(21) terhadap  $\ln R$  memberikan hasil,

$$X_1' = -3X_1 - 2X_1 \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (24)$$

$$X_2' = X_2 \left( -3 - 2 \frac{\dot{H}}{H^2} - 2X_4 \right) \quad (25)$$

$$X_3' = X_3 \left( -4 - 2 \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \quad (26)$$

$$X_4' = -3X_4 + \frac{6}{\omega} |\zeta| X_2 + \frac{1}{\omega} (m^2 X_6^2 + \lambda X_6^4) X_7^2 - X_4 \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (27)$$

$$X_5' = -3(X_5 - A X_5^{-\beta}) \quad (28)$$

$$X_6' = X_4 \quad (29)$$

$$X_7' = -X_7 \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (30)$$

Persamaan (24)-(26) menghasilkan titik kritis yang bersesuaian dengan,

$$(X_1^0, X_2^0, X_3^0, X_4^0, X_5^0, X_6^0, X_7^0), \quad (31)$$

$$(0,0,1,0, A^{\frac{1}{1+\beta}}, 0, 0)$$

$$(0,0,1,0, A^{\frac{1}{1+\beta}}, -m/\sqrt{-\lambda}, 0) \quad (32)$$

$$(0,0,1,0, A^{\frac{1}{1+\beta}}, m/\sqrt{-\lambda}, 0) \quad (33)$$

$$(1,0,0,0, A^{\frac{1}{1+\beta}}, -m/\sqrt{-\lambda}, 0) \quad (34)$$

$$(1,0,0,0, A^{\frac{1}{1+\beta}}, m/\sqrt{-\lambda}, 0) \quad (35)$$

$$(1,0,0,0, A^{\frac{1}{1+\beta}}, 0, 0) \quad (36)$$

Berikutnya, tinjauan linierisasi di sekitar titik kritis (31)-(33) menghasilkan harga eigen yang bervariasi,

$$(e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0, e_5^0, e_6^0, e_7^0)$$

$$(1, 1, 1, 2, -1, 0, -3 - 3\beta) \quad (37)$$

Kemudian, tinjauan linierisasi di sekitar titik kritis (34)-(36) menghasilkan harga,

$$(e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0, e_5^0, e_6^0, e_7^0) \quad (38)$$

$$(0,0,0,3/2, -3/2, -1, -3 - 3\beta).$$

Vektor eigen untuk masing-masing harga eigen pada persamaan (37) dan (38) dinyatakan dalam tabel 1 dan tabel 2.

**Tabel 1.** Vektor Eigen dari Persamaan (37)

No.	Harga Eigen	Vektor Eigen
1.	1	(0,0,1,0,0,0,0)
2.	1	(0,1,0, $3\zeta/\omega$ , 0, $3\zeta/\omega$ , 0)
3.	1	(1,0,0,0,0,0,0)
4.	2	(0,0,0,0,0,0,1)
5.	-1	(0,0,0,-1,0,1,0)
6.	0	(0,0,0,0,0,1,0)
7.	-3 - 3β	(0,0,0,0,1,0,0)

**Tabel 2.** Vektor Eigen dari Persamaan (38)

No.	Harga Eigen	Vektor Eigen
1.	0	(0,0,0,0,0,1,0)
2.	0	dan
3.	0	(1,0,0,0,0,0,0)
4.	3/2	(0,0,0,0,0,0,1)
5.	-3/2	(0,0,0,-3/2,0,1,0)
6.	-1	(-1,0,1,0,0,0,0)
7.	-3 - 3β	(0,0,0,0,1,0,0)

Kestabilan dari model dinamika yang dibentuk dapat dilihat pada tabel 1. Empat harga eigen bernilai positif dari tabel tersebut (+1, +2). Nilai real positif dari harga eigen menunjukkan ketidakstabilan dari sistem yang dibangun. Harga eigen sama dengan nol tidak memberikan informasi terkait kestabilan dari sistem. Harga eigen negatif dari sistem yang berkaitan dengan titik kritis (31) – (33) menunjukkan kestabilan dari sistem atau model yang dibuat. Hal yang cukup menarik dapat dilihat pada harga eigen ketujuh pada tabel 1, nilainya dapat negatif atau positif bergantung nilai dari  $\beta$ . Nilainya akan positif jika  $\beta$  bernilai negatif dan lebih besar

dari satu dan akan bernilai negatif jika nilai  $\beta$  bernilai positif. Kasus tersebut di dalam sistem dinamika dikenal dengan istilah bifurkasi.

Pada tabel 2 juga menunjukkan kestabilan dari model yang dibangun. Kestabilan dari model tersebut berkaitan dengan persamaan (34)–(36). Tabel 2 menunjukkan informasi kestabilan yang berbeda dengan tabel 1. Tabel 2 memberikan informasi satu harga eigen yang bernilai real positif, tiga harga eigen bernilai nol, satu harga eigen bernilai real negatif, dan satu harga eigen yang dapat bernilai negatif atau positif tergantung nilai dari  $\beta$ .

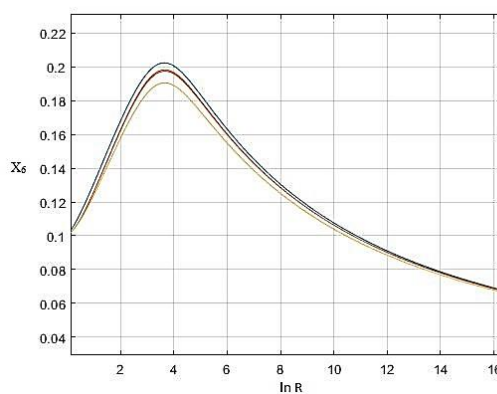
Harga eigen negatif menunjukkan kestabilan dari model. Harga eigen sama dengan nol tidak memberikan informasi terkait kestabilan sistem. Harga eigen positif berkaitan dengan ketidakstabilan dari model yang telah dibangun. Harga eigen ketujuh pada tabel 2 sama halnya dengan tabel 1 yang mengindikasikan bifurkasi yang terjadi dengan melakukan variasi terhadap nilai  $\beta$ , nilainya dapat positif atau negatif.

Persamaan (24)-(30) dipecahkan secara numerik menggunakan *Ordinary Differential Equation* (ODE). Penyelesaian secara numerik berkaitan dengan persamaan yang dihasilkan berbentuk nonlinier. Hasil numerik dari persamaan memberikan informasi berupa trajektori dari model yang telah dibangun. Kondisi awal yang dimasukkan untuk penyelesaian persamaan secara ODE berturut-turut untuk  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$  adalah 0.01, 0.01 0.03, 0.02, 0.13, 0.15, 0.01.

Penyelesaian persamaan secara numerik memberikan data terkait variabel  $X_6$  dan  $\ln R$ . Data yang diperoleh dapat diolah dalam bentuk grafik yang menggambarkan trajektori dari  $X_6$ . Trajektori dari  $X_6$  terhadap  $\ln R$  yang berkorespondensi dengan variabel medan skalar  $\psi$  dan waktu  $t$ . Informasi dari trajektori ini sangat penting karena berkaitan dengan variasi konstanta struktur halus dari waktu ke waktu. Waktu yang dimaksud merupakan waktu sembarang yang tidak sama halnya dengan

waktu kosmik yang ril. Dalam kasus ini hanya ingin ditunjukkan secara analisis sistem dinamik, nilai dari medan skalar bervariasi dari waktu ke waktu.

Hasil penyelesaian secara numerik dengan ODE dapat dilihat pada gambar 1 dan gambar 2. Gambar 1 menunjukkan hubungan dari  $X_6$  terhadap  $\ln R$ . Gambar 2 memberikan grafik ruang fasa untuk  $(X_4, X_6, X_1)$ ,  $(X_4, X_6, X_3)$ , dan  $(X_4, X_6, X_5)$ . Hubungan ketiga variabel tersebut dalam sistem dinamika dikenal dengan istilah ruang fasa.



**Gambar 1.** Trajektori  $X_6$  terhadap  $\ln R$

Trajektori dari  $X_6$  terhadap  $\ln R$  dapat dilihat pada gambar 1. Variasi dari nilai syarat awal pada pemecahan persamaan secara numerik dengan ODE memberikan hasil yang hampir sama untuk  $X_6$ . Gambar menunjukkan  $X_6$  sebagai representasi dari medan skalar  $\psi$  bervariasi bergantung nilai  $\ln R$ . Nilai awalnya tidak bernilai nol dan pada rentang nilai  $\ln R$ , nilainya juga tidak sama dengan nol. Variasi dari  $\ln R$  dari nilai dua sampai dengan enam memberikan informasi nilai maksimum dari  $X_6$  untuk rentang  $\ln R$  yang diambil.

Berikutnya, gambar 2 menunjukkan informasi terkait dengan  $X_6, X_4, X_1, X_3, X_5$  yang berkorespondensi dengan variabel medan skalar  $\psi$ ,  $\dot{\psi}$  dari medan skalar  $\psi$ , densitas materi  $\rho_m$ , densitas materi  $\rho_r$ , dan densitas gas Chaplygin  $\rho_c$ .

**PENUTUP**

Model ini menggambarkan dinamika dari alam semesta yang berkaitan dengan densitas materi, medan skalar, dan energi gelap yang diakitkan dengan gas Chaplygin. Nilai ketiganya bervariasi dari waktu ke waktu seiring dengan waktu alam semesta. Pada model ini dikaitkan dengan persamaan medan Einstein yang tentunya densitas dari ketiganya tidak bernilai sama dengan nol. Variasi dari medan skalar bernilai fluktuatif dari waktu ke waktu sesuai dengan informasi bahwa nilai konstanta struktur halus yang bervariasi. Pada kasus ini diberikan masukan potensial medan skalar yang massif yang tentunya untuk penelitian berikutnya dapat dicoba dengan bentuk potensial lain. Penelitian lanjutan sangat dimungkinkan untuk membandingkan model dengan data pengamatan untuk memperoleh kesesuaian model dengan dinamika alam semesta yang nyata.

**UCAPAN TERIMA KASIH**

Penelitian ini didanai oleh Hibah Penelitian Institut Teknologi Sumatera *Smart Mandiri* Tahun 2017.

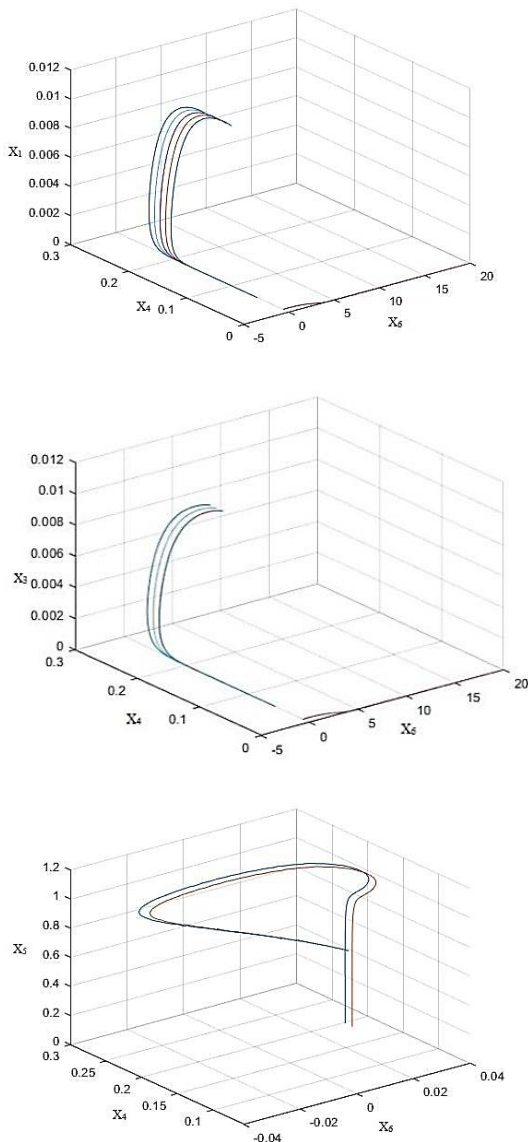
**DAFTAR PUSTAKA**

Bekenstein, J. D. (1982). Fine-structure constant: Is it really a constant?. *Phys. Rev. D*, 25, 1527.

Debnath, U., Banerjee, A., and Chakraborty, S. (2004). Role of Modified Chaplygin Gas in Accelerated Universe. *Classical and Quantum Gravity*, 21, 21 5609.

Dicke, R. H. (1959). The Theoretical Significance of Experimental Relativity. *Science*, 129, 621.

Farajollahi, H. and Salehi, A. (2012). Varying alpha and cosmic acceleration in Brans-Dicke-BSBM theory: stability analysis and observational tests. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 11 002.



**Gambar 2.** Ruang fasa  $(X_6, X_4, X_1)$ ,  $(X_6, X_4, X_3)$ , dan  $(X_6, X_4, X_5)$ ,

Ruang fasa pada gambar 2 memberikan hasil kestabilan dari *manifold* yang bersesuaian dengan densitas materi  $\rho_m$ , densitas materi  $\rho_r$ , dan densitas gas Chaplygin  $\rho_c$ . Ketiga gambar menunjukkan kestabilan model menuju pada suatu titik. Pada kasus ini hanya diambil model yang stabil karena model tersebut yang memiliki makna fisis. Model yang tidak stabil sebaliknya berkaitan dengan makan yang tidak fisis.

- Gamow, G. (1967). Electricity, Gravity, and Cosmology. *Phys. Rev. Letters*, 19, 759, 913.
- Jordan, P.. *Naturwiss.* 25, 513 (1937). *Z. f. Physik*, 113, 660 (1939).
- Murphy, M. T., Webb, J. K., Flambaum, V. V. V., Dzuba, A., Churchill, C. W., Prochaska, J. X., Barrow, J.D., and Wolfe, A.M. (2001). Possible evidence for a variable fine structure constant from QSO absorption lines: motivations, analysis and results. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 327, 1208.
- Murphy, M. T. , Flambaum, V. V. , Webb, J. K., Dzuba, V. V. , Prochaska, J. X., and Wolfe, A. M. (2004). Constraining variations in the fine-structure constant, quark masses and the strong interaction,. *Lect. Notes Phys.*, 648, 131.
- Sandvik , H. B., Barrow, J. D., and Magueijo, J. (2002). A simple varying-alpha cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 88, 031302.
- Stanyukovich, K. P. (1963). Possible Changes in the Gravitational Constant. *Sov., Phys. Doklady*, 7, 1150.
- Teller, E. (1948). On the Change of Physical Constants. *Phys. Rev.*, 73, 801.
- Uzan, J. P. (2003). The fundamental constants and their variation: observational and theoretical status. *Rev. Mod. Phys.*, 75, 403
- Webb, J. K., Flambaum, V. V., Churchill , C.W., Drinkwater , M. J., and Barrow, J. D. (1999). Search for time variation of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82, 884.
- Webb, J. K., Murphy, M., Flambaum, V., Dzuba, V., Barrow, J. D., Churchill, C., Prochaska, J., and Wolfe, A. (2001). Further evidence for cosmological evolution of the fine Structure constant wolfe. *Phys. Rev. Lett.*, 87, 091301.
- Webb, J. K., King, J. A., Murphy, M. T. ,Flambaum, V. V., Carswell, R. F., and Bainbridge, M. B. (2011). Indications of a spatial variation of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, 107, 191101.