Jurnal As-Salam, 1(1) Januari - April 2017
(Print ISSN 2528-1402, Online ISSN 2549-5593)

Penyelesaian Persamaan Klein-Gordon Menggunakan Metode Homotopi

Ismi Ratin Nabiyah

Mahasiswa Pasca Sarjana Matematika FMIPA USU
Email: qu_ismie45@yahoo.co.id

Abstrak. Persamaan Klein-Gordon *nonlinear* merupakan persamaan yang menggambarkan keadaan suatu partikel yang bergerak periodik dalam keadaan tertentu. Penurunan persamaan Klein-Gordon *nonlinear* didasarkan pada analogi yang sama seperti pada penurunan persamaan Schrodinger *nonlinear*. Melalui analogi tersebut, persamaan Klein-Gordon *nonlinear* dibangun dengan menambahkan suku potensial kuantum pada persamaan Klein-Gordon *linear*. Persamaan Klein-Gordon *nonlinear* merupakan persamaan diferensial parsial yang bentuknya *nonlinear* . Masalah *nonlinear* biasanya sulit diselesaikan secara analitik, karena faktor *nonlinear* yang sangat kuat. Pada penelitian ini persamaan tersebut diselesaikan dengan metode homotopi. Metode homotopi merupakan suatu metode penyelesaian persamaan diferensial yang berbentuk *linear* maupun *nonlinear*, penyelesaiannya berbentuk deret yang yang diinterpretasikan dengan bantuan *software Mathematica 7.* Penyelesaian persamaan Klein-Gordon *nonlinear* menggunakan metode homotopi secara manual dihitung sampai orde tiga, kemudian untuk orde lima dan orde enam dihitung menggunakan bantuan *software Mathematica 7.* Berdasarkan hasil yang diperoleh, penggunaan metode homotopi untuk menyelesaikan persamaan Klein-Gordon akan semakin baik penyelesaiannya jika digunakan orde yang lebih tinggi.

Kata kunci: persamaan Klein-Gordon nonlinear, metode Homotopi, persamaan diferensial nonlinear.

Pendahuluan

Model matematika dapat digunakan untuk menggambarkan atau mendeskripsikan permasalahan yang terjadi di alam. Masalah yang dapat dimodelkan banyak melibatkan persamaan diferensial *nonlinear*. Model matematika dalam bentuk persamaan *nonlinear* sering kali muncul di bidang ilmiah, seperti fisika benda padat, fisika plasma, dinamika fluida, biologi matematika, kinetika kimia, mekanika kuantum dan sebagainya.

Persamaan Klein-Gordon merupakan suatu persamaan dalam mekanika kuantum yang sangat berguna untuk fisika partikel. Teori mekanika kuantum dirumuskan untuk mempelajari sistem mikroskopik yang mempunyai dua aspek penting yang ditunjukkan melalui hasil eksperimen. Einstein dan de Broglie sebagai dua tokoh pencetus teori mekanika kuantum melalui postulat kuantisasi energi dan momentum *linear* meyakini bahwa mekanika kuantum yang paling fundamental adalah mekanika kuantum *nonlinear*. Hal ini membuat beberapa fisikawan tertarik untuk merumuskan mekanika kuantum *nonlinear*.

Perumusan mekanika kuantum *nonlinear* yang pertama yaitu persamaan Schrodinger *nonlinear*, kemudian dirumuskan persamaan Klein-Gordon *nonlinear* yang merupakan persamaan diferensial parsial berdasarkan konsep penurunan yang sama dengan persamaan Schrodinger *nonlinear*. Kesulitan dalam persamaan ini yaitu ditemukannya energi yang bernilai positif dan negatif untuk masing-masing partikel tunggal dan partikel bebas.

Masalah *nonlinear* sulit diselesaikan secara analitik, sehingga diperlukan suatu metode pendekatan analitik. Terdapat beberapa metode pendekatan analitik untuk menyelesaikan masalah *nonlinear*, diantaranya metode homotopi. Beberapa penelitian sebelumnya telah melakukan pendekatan penyelesaian analitik untuk persamaan Klein-Gordon dengan beberapa metode. Menurut Alomari, dkk (2008), pada tahun 2005, Deeba dan Khuri menggunakan metode dekomposisi adomian analitik (ADM), kemudian pada tahun 2006 dibuat modifikasi metode dekomposisi adomian (MADM) oleh Wazwaz untuk penyelesaian persamaan Klein-Gordon *nonlinear*. Pada tahun yang sama Abbasbandy menggunakan metode iterasi variasi (VIM) untuk menyelesaikan persamaan Klein-Gordon *nonlinear* dan terakhir pada tahun 2007 Chowdhury dan Hasyim menggunakan metode homotopi perturbasi (HPM) untuk menyelesaikan persamaan tersebut.

Metode homotopi merupakan suatu metode pendekatan analitik untuk penyelesaian suatu masalah *nonlinear* yang pertama kali diperkenalkan oleh Liao pada tahun 2003. Metode homotopi berisi parameter tambahan yang memberikan sebuah cara sederhana untuk mengatur dan mengendalikan daerah konvergensi atau laju konvergensi. Persamaan diferensial parsial *nonlinear* dapat diselesaikan menggunakan metode homotopi, dengan menggunakan metode homotopi tidak perlu dilakukan pelinieran ataupun pendiskretan peubah.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka akan dilakukan penelitian menggunakan metode homotopi untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan Klein-Gordon *nonlinear*.

Tujuan dari penelitian ini adalah memperoleh penyelesaian Persamaan Klein-Gordon *nonlinear* menggunakan metode homotopi

Metode Penelitian

Persamaan yang digunakan dalam penelitian ini merupakan persamaan yang diperoleh dari penelitian terdahulu oleh Prayitno (2012) dalam jurnal Fisika dan Aplikasinya dengan judul "*Solusi Persamaan Klein – Gordon Nonlinear untuk Partikel Bebas*". Persamaan Klein-Gordon *nonlinear* tersebut sebagai berikut:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\nabla^2\Psi+\frac{m^2c^2}{h^2}\Psi-\frac{1}{c^2a}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\Psi+\frac{\nabla^2 a}{a}\Psi=0$$

Keterangan :

$a(\vec{r},t)$	: amplitudo
Ψ	: fungsi gelombang
h	: konstanta Planck
m	: massa diam partikel
t	: waktu
c	: kecepatan partikel

bentuk umum persamaan Klein-Gordon *nonlinear* diubah ke bentuk persamaan diferensial parsial. Perubahan bentuk tersebut mengikuti bentuk persamaan Klein-Gordon *nonlinear* dalam bentuk persamaan diferensial parsial *nonlinear* sebagai berikut :

$$u_{tt}-u_{xx}+b_1u+b_2g(u)=f(x,t)$$

Keterangan :

u	: fungsi dari x dan t
g	: fungsi *nonlinear*
f	: fungsi yang diketahui
b_1,b_2	: konstanta

Mendefinisikan operator turunan parsial yang bentuknya *linear* dari persamaan Klein-Gordon *nonlinear*. Operator *linear* tersebut dinyatakan sebagai berikut :

$$L[\phi(x,t;q)]=\frac{\partial\phi(x,t;q)}{\partial t}$$

Operator turunan parsial *linear* *L* dengan fungsi $\phi(x,t;q)$ yang berarti fungsi

ϕ bergantung pada dua variabel bebas, yaitu *x* dan *t*.

Mendefinisikan operator turunan parsial yang bentuknya *nonlinear* dari persamaan Klein-Gordon. Operator *nonlinear* tersebut dinyatakan sebagai berikut :

$$N[u(x,t)] = 0$$

dengan *N* sebagai operator *nonlinear*, $u(x,t)$ sebagai fungsi yang akan ditentukan dan bergantung pada variabel *x* dan *t*.

Selanjutnya, $u(x,t)$ akan diperoleh dari penyelesaian persamaan deformasi orde nol berikut :

$$(1-q)L[\phi(x,t;q) - u_0(x,t)] = q\hbar N[\phi(x,t;q)]$$

dengan $q \in [0,1]$ dan $\phi(x,t;q)$ adalah fungsi yang merupakan pemetaan dari $u(x,t)$. $u_0(x,t)$ adalah penduga awal dari $u(x,t)$, $\hbar$ adalah parameter tak nol, dan *L* adalah operator *linear*.

Jika $q = 0$ dan $q = 1$, maka akan diperoleh

$$\phi(x,t;0) = u_0(x,t)$$

$$N[\phi(x,t;1)] = 0$$

Dengan menggunakan teorema Taylor, $\phi(x,t;q)$ dapat diuraikan menjadi :

$$\phi(x,t;q) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x,t) q^m$$

dimana

$$u_m(x,t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x,t;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}$$

Selanjutnya, penurunan *m* kali persamaan deformasi orde nol terhadap q, dengan $q = 0$ dan dibagi *m!* akan diperoleh bentuk persamaan orde ke $-$ *m* berikut :

$$L[u_m(x,t) - X_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(x,t)$$

Persamaan deformasi orde tinggi, $m \geq 1$ diperoleh dengan persamaan berikut:

$$u_m(x,t) = X_m u_{m-1}(x,t) + \hbar L^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})]$$

ketika $q = 1$ maka

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x,t)$$

dengan $u_0(x,t)$ adalah dugaan awal dan $u_m(x,t)$ diperoleh dari penyelesaian deformasi orde tinggi.

Membentuk penyelesaian analitik orde *m* yang berupa deret Taylor, yaitu penjumlahan penyelesaian orde nol dan penyelesaian orde-*m* yang diperoleh pada tahap ke-4 dan tahap ke-5. Penyelesaian diperoleh dan dituliskan dalam bentuk

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots .$$

Penyelesaian persamaan Klein-Gordon *nonlinear* menggunakan metode homotopi orde 5 dan orde 6 akan disimulasikan menggunakan bantuan *software Mathematica 7*.

Hasil dan Pembahasan

Persamaan Klein-Gordon di atas membentuk sebuah persamaan diferensial parsial *nonlinear* berorde dua. Massa diam partikel *m,* konstanta Planck *h*, dan kecepatan partikel *c* pada persaamaan tersebut merupakan konstanta. Simbol ∇ (nabla/del) pada persamaan tersebut merupakan gradien vektor, yaitu untuk mencari perubahan arah dan kecepatan dalam bidang skalar yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

dengan *f* sebagai fungsi yang dicari serta x_1, x_2, dan x_n sebagai variabel bebas.
dan

$$\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2} \right)$$

$v\nabla^2 u = \nabla v . \nabla u$
dengan u dan v merupakan variabel tak bebas.

Oleh karena itu persamaan Klein-Gordon *nonlinear* dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{h^2}\Psi - \frac{1}{c^2 a}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\Psi + \frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$$

Misalkan setiap konstanta pada persamaan tersebut berturut – turut dimisalkan sebagai a, b dan c, maka persamaan Klein-Gordon *nonlinear* menjadi

$$a\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + b\Psi - c\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\Psi + \frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

Bentuk umum persamaan tersebut mengandung turunan kedua dari fungsi gelombang, dapat diubah oleh perubahan variabel bebas dalam bentuk yang mirip dengan difusi, gelombang, dan persamaan Laplace. Sehingga persamaan ini sebenarnya merupakan prototipe persamaan *nonlinear* orde dua dari bentuk persamaan tersebut.

Menurut Alomari, dkk (2008) bentuk umum persamaan Klein-Gordon *nonlinear* dinyatakan sebagai berikut :

$$u_{tt} - u_{xx} + b_1 u + b_2 g(u) = f(x,t).$$

Keterangan :

u	: Fungsi dari x dan t
x,t	: Variabel bebas
g	: Fungsi *nonlinear*
b_1, b_2	: Konstanta
f	: Fungsi yang diketahui.

Jika fungsi gelombang $\Psi = u$ dan amplitudo sebagai sebuah fungsi a = u maka persamaan Klein-Gordon *nonlinear* dapat ditulis sebagai berikut :

$$au_{tt} - u_{xx} + bu - cu_{tt}u + u^2 = 0$$

dengan b sebagai b_1 dan $-c$ sebagai b_2, serta x dan t adalah koordinat ruang dan waktu.

Berdasarkan bentuk persamaan Klein-Gordon oleh Prayitno (2012) dapat dilihat bahwa ketidaklinieran persamaan Klein-Gordon tersebut dapat dilihat dari adanya perkalian dua variabel tak bebas dan interaksi *nonlinear* yang diwakili oleh:

$$-cu_{tt}u + u^2 = 0.$$

Hal pertama yang harus dilakukan yaitu mendefinisikan operator turunan parsial yang berbentuk *linear* dari persamaan Klein-Gordon sebagai berikut:

$$L(f) = 0,$$

karena fungsi pada persamaan Klein-Gordon yang digunakan bergantung pada x,t dan q, maka dapat ditentukan operator *linear* sebagai berikut:

$$L[\phi(x,t;q)] = \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial t}$$

Selanjutnya mendefinisikan operator turunan parsial yang berbentuk *nonlinear* dari persamaan Klein-Gordon sebagai berikut :

$$N[u(x,t)] = 0$$

dengan $u(x,t)$ fungsi yang akan ditentukan dari persamaan Klein-Gordon, maka diperoleh operator *nonlinear* berikut :

$$N[\phi(x,t;q)] = a\frac{\partial^2 \phi(x,t;q)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(x,t;q)}{\partial x^2} + b\phi(x,t;q) - c\frac{\partial^2 \phi(x,t;q)}{\partial t^2}\phi(x,t;q) + \phi^2(x,t;q)$$

dengan $q \in [0,1]$ merupakan suatu parameter, kemudian $\phi(x,t;q)$ merupakan suatu fungsi yang bergantung pada x dan t .

Pada lampiran 1 (7) persamaan deformasi orde nol diturunkan terhadap q hingga m kali, maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$L[u_m(x,t) - X_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1})$$

dengan

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[u(x,t)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0}$$

dan

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \le 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

berarti jika $m \le 1$, maka X_m bernilai nol dan bernilai satu untuk *m* lainnya.
Gunakan operator *linear* sepert, sehingga persamaannya menjadi :

$$\frac{\partial}{\partial t}[u_m(x,t) - X_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1})$$

Jika kedua ruas pada persamaan tersebut diintegralkan dan disubstitusikan persamaan tersebut, maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$u_m(x,t) = X_m u_{m-1}(x,t) + \hbar \int_0^t \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[u(x,t;q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} dt$$

dengan

$$u_m(x,t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x,t;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}$$

dan

$u(x,t;0) = u_0(x,t)$, $\quad u(x,t;1) = u(x,t)$

Didefinisikan pendekatan awal $u_0(x,t) = t$
Contoh untuk *m* = 1, maka diperoleh

$$u_m(x,t) = X_m u_{m-1}(x,t) + \hbar \int_0^t \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[u(t;q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} dt$$

$$u_1(x,t) = \hbar \int_0^t bt + t^2 dt$$

$$= \hbar \left[\frac{1}{2} bt^2 + \frac{1}{3} t^3 \right]\bigg|_0^t$$

$$= \frac{1}{2} b\hbar t^2 + \frac{1}{3} \hbar t^3$$

Langkah tersebut akan dilanjutkan sampai orde yang telah ditentukan. Tahapan tersebut akan menghasilkan penyelesaian untuk *m* = 0 sampai dengan *m* yang ditentukan untuk $u(x,t)$. Dengan demikian penyelesaian persamaan Klein-Gordon dengan menggunakan metode homotopi sebagai berikut :

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + ...$$

Deret penyelesaian $u(x,t)$ konvergen, konvergensi deret homotopi bergantung kepada empat faktor, yaitu kondisi awal, operator *linear*, fungsi $H(x,t;q)$ dan parameter bantu $\hbar$. Meskipun pemilihan kondisi awal dan operator *linear* tidak cukup baik, asalkan rasional, hasilnya tetap bisa konvergen, sebab konvergensi pada metode homotopi ditentukan oleh pemilihan nilai parameter bantu $\hbar$. Parameter homotopi $\hbar$ harus dipilih sesuai dengan radius konvergensi deret takhingga yang telah diperoleh. Untuk memperoleh penyelesaian menggunakan *software Mathematica 7* sebelumnya harus didefinisikan atau dimisalkan nilai dari masing-masing konstanta pada persamaan Klein-Gordon *nonlinear*.

Menurut Takeuchi (2008) diberikan nilai konstanta tersebut berturut-turut dengan nilai $a = c = 7{,}14286$ dan nilai $b = 7{,}522 \times 10^{-36}$. Dengan bantuan *software Mathematica 7*, penyelesaian persamaan (7) dengan menggunakan metode homotopi dengan parameter bantu $\hbar = -1$ sebagai berikut:

Homotopi orde 1
$u_1[x,t]//\mathrm{Expand}$
$-3.6125\times10^{-36}\ t^2 - t^3/3$

Homotopi orde 2
$u_2[x,t]//\mathrm{Expand}$
$4.43822\times10^{-35}\ t + 6.14286\ t^2 - 0.333333\ t^3 + 1.78045\times10^{-35}\ t^4 + 0.952381\ t^5 - 4.01389\times10^{-37}\ t^6 - 0.015873\ t^7$

Homotopi orde 3

funU3 = U[3]//N//Expand

$$-75.4695\ t+12.2857\ t^{2}+179.356\ t^{3}-58.5035\ t^{4}-5.64218\ t^{5}+154.588\ t^{6}-8.45417\ t^{7}-5.29317\ t^{8}+14.6694\ t^{9}+0.0195011\ t^{10}-0.692033\ t^{11}-4.77395\times10^{-17}\ t^{12}+0.00814001\ t^{13}+0.\ t^{14}-0.0000167968\ t^{15}$$

Homotopi orde 4

funU4 = U[4]//N//Expand

$$-226.408\ t-9915.82\ t^{2}-192933.\ t^{3}+126669.\ t^{4}+273202.\ t^{5}-645021.\ t^{6}+100162.\ t^{7}+921270.\ t^{8}-425686.\ t^{9}-50308.5\ t^{10}+620267.\ t^{11}-97746.5\ t^{12}-51533.3\ t^{13}+123079.\ t^{14}-5326.37\ t^{15}-11462.9\ t^{16}+6885.61\ t^{17}+373.237\ t^{18}-711.619\ t^{19}-4.96963\ t^{20}+28.1642\ t^{21}+0.0257369\ t^{22}-0.518145\ t^{23}-0.0000498836\ t^{24}+0.00448642\ t^{25}+2.51967\times10^{-8}\ t^{26}-0.0000165537\ t^{27}-5.72766\times10^{-23}\ t^{28}+2.40226\times10^{-8}\ t^{29}+0.\ t^{30}-9.10109\times10^{-12}\ t^{31}$$

Homotopi orde 5

funU5 = U[5]//N//Expand

$$121597.\ t+1.95815\times10^{7}\ t^{2}+1.08891\times10^{9}\ t^{3}+2.67059\times10^{10}\ t^{4}+2.92154\times10^{11}\ t^{5}-5.90054\times10^{11}\ t^{6}-9.99063\times10^{11}\ t^{7}+4.94612\times10^{12}\ t^{8}-2.68138\times10^{12}\ t^{9}-1.34835\times10^{13}\ t^{10}+1.85522\times10^{13}\ t^{11}+6.12372\times10^{12}\ t^{12}-4.17057\times10^{13}\ t^{13}+2.4369\times10^{13}\ t^{14}+3.25849\times10^{13}\ t^{15}-5.20578\times10^{13}\ t^{16}+1.11642\times10^{13}\ t^{17}+4.37355\times10^{13}\ t^{18}-3.14769\times10^{13}\ t^{19}-1.78591\times10^{12}\ t^{20}+2.653\times10^{13}\ t^{21}-9.83911\times10^{12}\ t^{22}-3.55433\times10^{12}\ t^{23}+8.22759\times10^{12}\ t^{24}-1.46431\times10^{12}\ t^{25}-1.35583\times10^{12}\ t^{26}+1.33003\times10^{12}\ t^{27}-4.22847\times10^{10}\ t^{28}-2.3802\times10^{11}\ t^{29}+1.03316\times10^{11}\ t^{30}+1.49309\times10^{10}\ t^{31}-1.98559\times10^{10}\ t^{32}+2.43191\times10^{9}\ t^{33}+1.76775\times10^{9}\ t^{34}-6.14133\times10^{8}\ t^{35}-9.04323\times10^{7}\ t^{36}+5.96652\times10^{7}\ t^{37}+2.8894\times10^{6}\ t^{38}-3.32867\times10^{6}\ t^{39}-59788.9\ t^{40}+118351.\ t^{41}+810.371\ t^{42}-2799.71\ t^{43}-7.16195\ t^{44}+44.7968\ t^{45}+0.0406943\ t^{46}-0.484839\ t^{47}-0.000145932\ t^{48}+0.00350818\ t^{49}+3.20531\times10^{-7}\ t^{50}-0.0000166467\ t^{51}-4.08398\times10^{-10}\ t^{52}+5.06291\times10^{-8}\ t^{53}+2.74558\times10^{-13}\ t^{54}-9.53758\times10^{-11}\ t^{55}-8.40462\times10^{-17}\ t^{56}+1.04918\times10^{-13}\ t^{57}+7.90751\times10^{-21}\ t^{58}-6.09966\times10^{-17}\ t^{59}-1.7376\times10^{-35}\ t^{60}+1.61884\times10^{-20}\ t^{61}+0.\ t^{62}-1.31476\times10^{-24}\ t^{63}$$

Homotopi orde 6

funU6 = U[6]//N//Expand

$$-2.4033\times10^{8}\ t+1.69874\times10^{13}\ t^{2}+3.71676\times10^{15}\ t^{3}+3.74182\times10^{17}\ t^{4}+2.16371\times10^{19}\ t^{5}+7.7041\times10^{20}\ t^{6}+1.67905\times10^{22}\ t^{7}+2.01522\times10^{23}\ t^{8}+7.92413\times10^{23}\ t^{9}-6.95159\times10^{24}\ t^{10}+6.95737\times10^{23}\ t^{11}+8.6272\times10^{25}\ t^{12}-1.73358\times10^{26}\ t^{13}-3.54854\times10^{26}\ t^{14}+1.59619\times10^{27}\ t^{15}-6.07206\times10^{26}\ t^{16}-6.15153\times10^{27}\ t^{17}+1.04057\times10^{28}\ t^{18}+7.54685\times10^{27}\ t^{19}-3.96705\times10^{28}\ t^{20}+2.55392\times10^{28}\ t^{21}+6.77909\times10^{28}\ t^{22}-1.26301\times10^{29}\ t^{23}-5.98858\times10^{27}\ t^{24}+2.36427\times10^{29}\ t^{25}-2.14777\times10^{29}\ t^{26}-1.69771\times10^{29}\ t^{27}+4.57198\times10^{29}\ t^{28}-1.74355\times10^{29}\ t^{29}-4.22419\times10^{29}\ t^{30}+5.4391\times10^{29}\ t^{31}+1.61859\times10^{28}\ t^{32}-5.60443\times10^{29}\ t^{33}+4.10271\times10^{29}\ t^{34}+1.92398\times10^{29}\ t^{35}-4.71511\times10^{29}\ t^{36}+1.88194\times10^{29}\ t^{37}+2.20334\times10^{29}\ t^{38}-2.66594\times10^{29}\ t^{39}+3.87104\times10^{28}\ t^{40}+1.41549\times10^{29}\ t^{41}-1.02939\times10^{29}\ t^{42}-9.8396\times10^{27}\ t^{43}+5.96349\times10^{28}\ t^{44}-2.65816\times10^{28}\ t^{45}-1.04624\times10^{28}\ t^{46}+1.72195\times10^{28}\ t^{47}-4.14465\times10^{27}\ t^{48}-3.96703\times10^{27}\ t^{49}+3.41921\times10^{27}\ t^{50}-2.01888\times10^{26}\ t^{51}-9.09126\times10^{26}\ t^{52}+4.50946\times10^{26}\ t^{53}+6.65947\times10^{25}\ t^{54}-1.36001\times10^{26}\ t^{55}+3.48578\times10^{25}\ t^{56}+1.78373\times10^{25}\ t^{57}-1.31056\times10^{25}\ t^{58}+6.80615\times10^{23}\ t^{59}+2.16258\times10^{24}\ t^{60}-7.30343\times10^{23}\ t^{61}-1.51424\times10^{23}\ t^{62}+1.46224\times10^{23}\ t^{63}-1.29261\times10^{22}\ t^{64}-1.62667\times10^{22}\ t^{65}+4.84718\times10^{21}\ t^{66}+9.71023\times10^{20}\ t^{67}-6.77704\times10^{20}\ t^{68}+6.44987\times10^{18}\ t^{69}+6.16917\times10^{19}\ t^{70}-8.05367\times10^{18}\ t^{71}-4.09616\times10^{18}\ t^{72}+9.60579\times10^{17}\ t^{73}+2.07973\times10^{17}\ t^{74}-7.15523\times10^{16}\ t^{75}-8.28341\times10^{15}\ t^{76}+3.9116\times10^{15}\ t^{77}+2.62864\times10^{14}\ t^{78}-1.65796\times10^{14}\ t^{79}-6.71168\times10^{12}$$

$$
\begin{gathered}
t^{80}+5.59216\times10^{12}\, t^{81}+1.38715\times10^{11}\, t^{82}- \\
1.52257\times10^{11}\, t^{83}-2.32825\times10^{9} \\
t^{84}+3.374\times10^{9}\, t^{85}+3.17713\times10^{7}\, t^{86}- \\
6.11313\times10^{7}\, t^{87}-352276.\, t^{88}+907387. \\
t^{89}+3167.45\, t^{90}-11034.4\, t^{91}-23.0219 \\
t^{92}+109.77\, t^{93}+0.134701\, t^{94}-0.890821\, t^{95}- \\
0.000631197\, t^{96}+0.00587501 \\
t^{97}+2.35394\times10^{-6}\, t^{98}-0.0000313382\, t^{99}- \\
6.9325\times10^{-9}\, t^{100}+1.34436\times10^{-7} \\
t^{101}+1.59662\times10^{-11}\, t^{102}-4.6067\times10^{-10}\, t^{103}- \\
2.84008\times10^{-14}\, t^{104}+1.25055\times10^{-12} \\
t^{105}+3.84062\times10^{-17}\, t^{106}-2.66187\times10^{-15}\, t^{107}- \\
3.86985\times10^{-20}\, t^{108}+4.3856\times10^{-18} \\
t^{109}+2.83259\times10^{-23}\, t^{110}-5.50213\times10^{-21}\, t^{111}- \\
1.45785\times10^{-26}\, t^{112}+5.14955\times10^{-24} \\
t^{113}+5.04834\times10^{-30}\, t^{114}-3.50389\times10^{-27}\, t^{115}- \\
1.10351\times10^{-33}\, t^{116}+1.67733\times10^{-30} \\
t^{117}+1.38061\times10^{-37}\, t^{118}-5.40437\times10^{-34}\, t^{119}- \\
8.43824\times10^{-42}\, t^{120}+1.09913\times10^{-37} \\
t^{121}+1.70434\times10^{-46}\, t^{122}-1.27861\times10^{-41} \\
t^{123}+5.1685\times10^{-59}\, t^{124}+7.26364\times10^{-46}\, t^{125}- \\
9.99547\times10^{-64}\, t^{126}-1.3611\times10^{-50}\, t^{127}
\end{gathered}
$$

Simpulan dan Saran

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa :

1. Metode homotopi dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Klein-Gordon *nonlinear*, hal ini ditunjukkan dengan diperolehnya hasil penyelesaian berupa deret matematika.
2. Hasil perbandingan antara metode homotopi orde tiga, empat, lima dan enam menunjukkan bahwa semakin tinggi orde yang digunakan akan memberikan penyelesaian yang lebih baik, terlihat dari daerah penyelesaian yang semakin luas dan titik belok pada nilai negatif yang semakin berkurang, maka dapat disimpulkan bahwa penyelesaian menggunakan metode homotopi orde enam merupakan penyelesaian yang paling baik.

Adapun saran bagi penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai salah satu referensi untuk menyelesaikan persamaan Klein-Gordon *nonlinear* yang digunakan dalam bidang Fisika.
2. Pada penelitian ini penulis hanya menyelesaikan persamaan Klein-Gordon *nonlinear* dalam bentuk umum menggunakan metode homotopi, diharapkan agar penelitian selanjutnya dapat memberikan aplikasi persamaan Klein-Gordon *nonlinear* dalam masalah yang terjadi di alam.
3. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, maka dapat dilakukan penyelesaian persamaan Klein-Gordon *nonlinear* menggunakan pengembangan metode homotopi, yaitu metode homotopi perturbasi dan homotopi pade.

Daftar Rujukan

Alomari, A.K, Salmi, M., & Roslinda, M. 2008. Approximation Analytical Solutions Of The Klein-Gordon Equation By Means Of The Homotopy Analysis Method. *Journal of Quality Measurement and Analysis.* 4(1): 45 – 47.

Liao, SJ. 2004. *Beyond Perturbation: introduction to the Homotopy Analysis Method.* New York : Boca Raton.

Prayitno, T.B. 2012. Solusi Persamaan Klein-Gordon Non*linear* untuk Partikel Bebas. *Jurnal Fisika dan Aplikasinya.* 8:1.

Takeuchi, Y. 2008. *Kelahiran Mekanika Kuantum.* http://www.chem-is-try.org/materi_kimia/kimia_dasar/struktur_atom1/kelahiran-mekanika-kuantum/. Diakses pada tanggal 01 Maret 2014.

Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics 2nd Edition.* New York : John Wiley and Sons Inc.