Jurnal As-Salam, 1(1) Januari - April 2017
(Print ISSN 2528-1402, Online ISSN 2549-5593)

Solusi Umum Persamaan Diferensial Eksak Empat Variabel

Hasrul Harahap[1], Nur Ainun Lubis[2]

[1]Mahasiswa Pasca Sarjana Matematika FMIPA USU
Email: Has.harahap@gmail.com

[2]STAIN Gajah Putih Takengon, Aceh Tengah, Aceh.
Email:ainunlubis123@gmail.com

Abstrak. Tinjau persamaan diferensial eksak empat variabel: $P(w,x,y,z)dw + Q(w,x,y,z)dx + R(w,x,y,z)dy + S(w,x,y,z)dz = 0$. Dalam tulisan ini akan dicari suatu metode dalam menentukan solusi umum dari persamaan diferensial eksak empat variabel dan jika persamaannya tidak eksak, maka akan ditentukan suatu metode dalam menentukan faktor integrasi dari persamaan diferensial empat variabel yang tidak eksak tersebut, sehingga persamaannya menjadi persamaan diferensial eksak empat variabel.

Kata kunci: eksak, persamaan diferensial, empat variabel.

Pendahuluan

1. Latar belakang

Peranan matematika sebagai suatu ilmu pada dasarnya tidak dapat dipisahkan dari ilmu lainnya. Dalam ilmu fisika, kimia, bidang industri, ekonomi, keuangan, tehnik sipil, peran matematika terlibat di dalamnya. Satu hal yang membuat ilmu matematika berperan di dalamnya adalah mengenai pemodelan matematika. Banyak fenomena di dunia nyata yang sangat kompleks sehingga dibutuhkan penyederhanaan dari masalah tersebut.

Persamaan diferensial adalah salah satu ilmu matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah-masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Jika model matematika berbentuk persamaan diferensial maka masalahnya adalah bagaimana menentukan solusi (penyelesaian) persamaan diferensial itu. Misalnya untuk persamaan diferensial eksak dengan dua variabel yang berbentuk:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

yang mempunyai solusi umum berbentuk $f(x,y) = c$, dengan :

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y),$$

dan persamaan diferensial eksak tiga variabel yang berbentuk :

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

yang solusi umumnya berbentuk $f(x,y,z) = c$, dengan :

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P dx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz$$

yang masing-masing dari persamaan diferensial eksak tersebut dalam penentuan $f(x,y)$ dan $f(x,y,z)$ mempunyai metode dan pola yang berbeda dalam setiap jumlah variabel yang berbeda, sehingga jika persamaan diferensial eksak empat variabel yang berbentuk :

$$P(w,x,y,z)dw + Q(w,x,y,z)dx + R(w,x,y,z)dy + S(w,x,y,z)dz = 0$$

yang mempunyai solusi umum berbentuk $f(w,x,y,z)=c$, dalam penentuan $f(w,x,y,z)$ mempunyai metode dan pola yang berbeda dengan dua dan tiga variabel jadi masalahnya adalah bagaimana metode dalam penentuan sehingga solusi umum dari persamaan diferensial eksak empat variabel dapat ditentukan. Namun, harus disadari juga bahwa tidak semua model matematika yang berbentuk persamaan diferensial mempunyai solusi.

2. Tujuan dan manfaat penelitian
   a. Tujuan Penelitian

      Tujuan dari tulisan ini adalah untuk menentukan suatu metode dalam mencari solusi umum persamaan diferensial eksak empat variabel dan bagaimana mencari faktor integrasi agar persamaan diferensial tidak eksak menjadi eksak.

   b. Manfaat Penelitian

      Manfaat dari tulisan ini adalah untuk dapat menambah dan memperdalam pengetahuan pembaca mengenai persamaan diferensial, khususnya persamaan diferensial eksak dan dapat diaplikasikan dalam bidang ilmu lainnya, misalkan dalam bidang ilmu kimia, teknik industri dan bidang ilmu lainnya.

Landasan Teori

1. Persamaan diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang menyatakan hubungan antara variabel bebas, variabel takbebas dan turunan variabel takbebas terhadap variabel bebas.

a. Persamaan diferensial eksak dua variabel

Suatu persamaan diferensial dengan bentuk :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

disebut persamaan diferensial eksak, jika ada suatu fungsi $f(x,y)$ yang diferensial totalnya sama dengan $M(x,y)dx + N(x,y)dy$, yaitu:

$$d(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (2)$$

b. Metode menentukan solusi umum persamaaan diferensial eksak dua variabel

Langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk menentukan solusi umum persamaan diferensial eksak dua variabel, yaitu:

1) Ubah persamaan diferensial orde satu ke bentuk : $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$
2) Uji apakah persamaan diferensial tersebut eksak dengan menunjukkan $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$
3) Jika eksak, integralkan fungsi $M(x,y)$ terhadap x atau $N(x,y)$ terhadap y, sebagai contoh pilih $M(x,y)$ terhadap x :

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$
$$\int \partial f(x,y) = \int M(x,y)dx$$
$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

4) Untuk menentukan fungsi $g(y)$:
   a. Turunkan $f(x,y)$ terhadap y, sehingga
   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + \frac{\partial g(y)}{\partial y}$$
   $$N = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + g'(y)$$
   b. Integralkan $g'(y)$untuk menentukan $g(y)$
5) Ubah solusi implisit dari persamaan orde satu : $f(x,y) = c$
6) Hitunglah konstanta C, jika kondisi inisialnya diketahui.

c. Persamaan diferensial eksak tiga variabel

Persamaan diferensial orde satu tiga variabel yang berbentuk :

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

disebut eksak apabila terdapat fungsi f(x, y, z) yang diferensial totalnya sama dengan $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)$, yaitu

$$\partial f(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)$$

2. Metode menentukan solusi umum persamaan diferensial eksak tiga variabel

Persamaan diferensial eksak tiga varibel ini dapat diselesaikan dengan teorema berikut ini :

Teorema 1 : Pandang persamaan diferensial eksak berikut :

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

Misalkan terdapat fungsi-fungsi Q_1, Q_2, R_1, R_2 sebagai berikut :

1. $Q = Q_1 + Q_2$dengan $\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$,
   $R = R_1 + R_2$ dengan $\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial R_2}{\partial y} = 0$
2. $Q_1(x_0, y, z) = 0$ dan
   $$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q_2}{\partial z} dy = R_1(x_0, y, z)$$

Maka solusi umum persamaan diferensial adalah :
$F(x,y,z) = C$, dengan

$$F(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P dx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz$$

Pembahasan

1. Definisi persamaan diferensial eksak empat variabel

Sebuah fungsi empat variabel $f(w,x,y,z)$ yang mempunyai persamaan diferensial total, yaitu :

$$df(w,x,y,z) = \frac{\partial(w,x,y,z)}{\partial w} dw + \frac{\partial(w,x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial(w,x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial(w,x,y,z)}{\partial z} dz$$

Misalkan :

$$P(w,x,y,z) = \frac{\partial(w,x,y,z)}{\partial w},$$
$$Q(w,x,y,z) = \frac{\partial(w,x,y,z)}{\partial x}$$
$$R(w,x,y,z) = \frac{\partial(w,x,y,z)}{\partial y}$$
$$S(w,x,y,z) = \frac{\partial(w,x,y,z)}{\partial z}$$

sehingga, persamaan diferensial totalnya dapat dituliskan :

$$df(w,x,y,z) = P(w,x,y,z)dw + Q(w,x,y,z)dx + R(w,x,y,z)dy + S(w,x,y,z)dz$$

Defenisi 1: Persamaan diferensial orde satu empat variabel yang berbentuk :

$$P(w,x,y,z)dw + Q(w,x,y,z)dx + R(w,x,y,z)dy + S(w,x,y,z)dz = 0$$

disebut eksak, apabila terdapat $f(w,x,y,z)$ yang diferensial totalnya sama dengan $P(w,x,y,z)dw + Q(w,x,y,z)dx + R(w,x,y,z)dy + S(w,x,y,z)dz$, yaitu

$$df(w,x,y,z) = P(w,x,y,z)dw + Q(w,x,y,z)dx + R(w,x,y,z)dy + S(w,x,y,z)dz$$

Teorema 2:
Jika $P(w,x,y,z), Q(w,x,y,z), R(w,x,y,z)$ dan $S(w,x,y,z)$ kontinu pada turunan parsial orde satu dan jika persamaan

$P(w,x,y,z)dw + Q(w,x,y,z)dx + R(w,x,y,z)dy + S(w,x,y,z)dz = 0$ adalah eksak, maka :
$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial w}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial y}$

Bukti: Persamaan diferensial $P(w,x,y,z)dw + Q(w,x,y,z)dx + R(w,x,y,z)dy + S(w,x,y,z)dz = 0$ adalah eksak, maka :

$$P(w,x,y,z) = \frac{\partial f(w,x,y,z)}{\partial w}, Q(w,x,y,z) = \frac{\partial f(w,x,y,z)}{\partial x}$$

$$R(w,x,y,z) = \frac{\partial f(w,x,y,z)}{\partial y}, S(w,x,y,z) = \frac{\partial f(w,x,y,z)}{\partial z}$$

1. Jika P diturunkan terhadap x maka diperoleh $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x}$
   Jika Q diturunkan terhadap w, diperoleh $\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w}$
   Sehingga hasil dari kedua turunan tersebut adalah sama, maka $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial w}$.
2. Jika P diturunkan terhadap y maka diperoleh $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial y}$
   Jika R diturunkan terhadap w, diperoleh $\frac{\partial R}{\partial w} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w}$
   Sehingga hasil dari kedua turunan tersebut adalah sama, maka $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial w}$.
3. Jika P diturunkan terhadap z maka diperoleh $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}$
   Jika S diturunkan terhadap w, diperoleh $\frac{\partial S}{\partial w} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w}$
   Sehingga hasil dari kedua turunan tersebut adalah sama, maka $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial w}$.
4. Jika Q diturunkan terhadap y maka diperoleh $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
   Jika R diturunkan terhadap x, diperoleh $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
   Sehingga hasil dari kedua turunan tersebut adalah sama, maka $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x}$.
5. Jika Q diturunkan terhadap z maka diperoleh $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$
   Jika S diturunkan terhadap x, diperoleh $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$
   Sehingga hasil dari kedua turunan tersebut adalah sama, maka $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x}$.
6. Jika R diturunkan terhadap z maka diperoleh $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$
   Jika S diturunkan terhadap y, diperoleh $\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$
   Sehingga hasil dari kedua turunan tersebut adalah sama, maka $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial y}$.

Teorema 2 ini dapat digunakan untuk menguji apakah persamaannya diferensial eksak atau tidak eksak.

2. Metode menentukan solusi umum persamaan diferensial eksak empat varibel

Untuk menentukan solusi umum persamaan diferensial eksak empat variabel dapat diselesaikan dengan mengelompokkan suku-suku menjadi beberapa sukusuku, satu kelompok suku-suku dari bentuk $P(w)dw$, $Q(x)dx$, $R(y)dy$ dan $S(z)dz$ serta lainnya adalah suku-suku sisanya dan mengetahui bahwa masing-masing kelompok (menurut kenyataan) adalah suatu diferensial total dari suatu fungsi.

Beberapa fungsi persamaan diferensial total yang digunakan, yaitu :

1. $d(xy) = ydx + xdy$
2. $d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz$
3. $d(wxyz) = xyzdw + wyzdx + wxzdy + wxydz$
4. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

5. $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$
6. $d\left(\frac{1}{xy}\right) = -\frac{xdy + ydx}{x^2y^2}$

Contoh 1 : Tentukanlah solusi umum dari persamaan diferensial berikut ini

$$(x^2 + y^2 + z^2 - w^2)dw + 2wxdx + 2wydy + 2wzdz = 0$$

Penyelesaian : Dari persamaan didapat, yaitu :

$$\mathrm{P} = x^2 + y^2 + z^2 - w^2,\quad Q = 2wx,\quad R = 2wy \; dan \; S = 2wz$$

Didapat :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x \text{ dan } \frac{\partial Q}{\partial w} = 2x$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \text{ dan } \frac{\partial R}{\partial w} = 2y$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = 2z \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial w} = 2z$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \text{ dan } \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial R}{\partial z} = 0 \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

Sehingga persamaan tersebut merupakan persamaan eksak, dikarenakan $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial w}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial y}$

Maka, dengan mengelompokkan suku-suku dari persamaan diferensialnya, dengan bentuk

$$(x^2dw + 2wxdx) + (y^2dw + 2wydy) + (z^2dw + 2wzdz) = 0$$

Dan mengetahui bahwa diferensial total dari

$$d(x^2w) = x^2dw + 2wxdx, d(y^2w) = y^2dw + 2wydy \text{ dan } d(z^2w) = z^2dw + 2wzdz$$

Sehingga didapat persamaannya menjadi

$$d(x^2w) + d(y^2w) + d(z^2w) - w^2dw = 0$$

dengan mengintegralkannya, diperoleh

$$x^2w + y^2w + z^2w - \frac{1}{3}w^3 = C$$

Jadi, solusi umum persamaan diferensialnya adalah :

$$x^2w + y^2w + z^2w - \frac{1}{3}w^3 = C$$

Contoh 2 : Tentukanlah solusi umum Persamaan diferensial

$$z^2dw + (z^2 + 2xz)dx + (z^2 + 2yz)dy + (x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 2wz)dz = 0$$

Penyelesaian : Tulis

$$P = z^2, Q = z^2 + 2xz, R = z^2 + 2yz, S = x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 2wz$$

diperoleh

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial Q}{\partial w} = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ dan } \frac{\partial R}{\partial w} = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = 2z \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial w} = 2z$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \text{ dan } \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2z + 2x \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial x} = 2z + 2x$$
$$\frac{\partial R}{\partial z} = 2z + 2y \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial y} = 2z + 2y$$

Sehingga persamaan tersebut merupakan persamaan eksak, dikarenakan $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial w}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial y}$

Maka, dengan mengelompokkan suku-suku dari persamaan diferensialnya, dengan bentuk

$$(z^2dw + 2wzdz) + (z^2dx + 2xzdz) + (2xzdx + x^2dz) + (z^2dy + 2yzdz) + (2yzdy + y^2dz) = 0$$

dan mengetahui bahwa diferensial total dari

$d(wz^2) = z^2dw + 2wzdz$, $d(xz^2) = z^2dx + 2xzdz$, $d(x^2z) = 2xzdx + x^2dz$,
$d(yz^2) = z^2dy + 2yzdz$, $d(y^2z) = 2yzdy + y^2dz$

sehingga

$$d(wz^2) + d(xz^2) + d(x^2z) + d(yz^2) + d(y^2z) = 0$$

Dengan mengintegralkannya, diperoleh

$$wz^2 + xz^2 + x^2z + yz^2 + y^2z = \mathrm{C}$$

Jadi, solusi umum persamaan diferensialnya adalah :

$$wz^2 + xz^2 + x^2z + yz^2 + y^2z = \mathrm{C}$$

3. Menentukan faktor integrasi persamaan diferensial eksak empat variabel

Misalkan Persamaan diferensial $P(w,x,y,z)dw + Q(w,x,y,z)dx + R(w,x,y,z)dy + S(w,x,y,z)dz = 0$ tidak eksak. Fungsi $\mu(w,x,y,z)$ disebut faktor integrasi jika persamaan diferensial

$$\mu(w,x,y,z)Pdw + \mu(w,x,y,z)Qdx + \mu(w,x,y,z)Rdy + \mu(w,x,y,z)Sdz = 0$$

menjadi eksak. Dalam tulisan ini akan dicari fungsi $\mu(w,x,y,z)$ tersebut.

Misal $\mu = e^{\int(adw+bdx+cdy+ddx)}$, dengan a berupa fungsi konstan atau fungsi $a(w)$, b berupa fungsi konstan atau fungsi $b(x)$, c berupa fungsi konstan atau fungsi $c(y)$ dan d berupa konstan atau fungsi $d(z)$. Karena persamaan diferensial :

$$\mu(w,x,y,z)Pdw + \mu(w,x,y,z)Qdx + \mu(w,x,y,z)Rdy + \mu(w,x,y,z)Sdz = 0$$

Adalah eksak, maka berlaku :

1. $\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial w}$

$$\mu\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial Q}{\partial w} + Q\frac{\partial \mu}{\partial w}$$
$$\mu\frac{\partial P}{\partial x} + Pb\mu = \mu\frac{\partial Q}{\partial w} + Qa\mu$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w} = aQ - bP \quad \text{......(1)}$$

2. $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial w}$

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial R}{\partial w} + R\frac{\partial \mu}{\partial w}$$
$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + Pc\mu = \mu\frac{\partial R}{\partial w} + Ra\mu$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial w} = aR - cP \quad \text{......(2)}$$

3. $\frac{\partial(\mu P)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu S)}{\partial w}$

$$\mu\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial S}{\partial w} + S\frac{\partial \mu}{\partial w}$$
$$\mu\frac{\partial P}{\partial z} + Pd\mu = \mu\frac{\partial S}{\partial w} + Sa\mu$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial w} = aS - dP \quad \text{......(3)}$$

4. $\frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial x}$

$$\mu\frac{\partial Q}{\partial y} + Q\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial \mu}{\partial x}$$
$$\mu\frac{\partial Q}{\partial y} + Qc\mu = \mu\frac{\partial R}{\partial x} + Rb\mu$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x} = bR - cQ \quad \text{......(4)}$$

5. $\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu S)}{\partial x}$

$$\mu\frac{\partial Q}{\partial z} + Q\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial S}{\partial x} + S\frac{\partial \mu}{\partial x}$$
$$\mu\frac{\partial Q}{\partial z} + Qd\mu = \mu\frac{\partial S}{\partial x} + Sb\mu$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x} = bS - dQ \quad \text{......(5)}$$

6. $\frac{\partial(\mu R)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu S)}{\partial y}$

$$\mu\frac{\partial R}{\partial z} + R\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial S}{\partial y} + S\frac{\partial \mu}{\partial y}$$
$$\mu\frac{\partial R}{\partial z} + Rd\mu = \mu\frac{\partial S}{\partial y} + Sc\mu$$
$$\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial y} = dR - cS \quad \text{......(6)}$$

Persamaan ini dapat dibagi menjadi empat kasus, yaitu :

1. Jika a = 0, b = 0 dan c = 0, maka dari persamaan (1),(2) dan (4) diperoleh

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial w}, \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}$$

dan dari persamaan (3), (5), dan (6) diperoleh

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial w} = -dP, \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x} = -dQ, \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial y}$$

$= dR$ sehingga

$$d(z) = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial w}}{-P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x}}{-Q} = \frac{\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial y}}{R}$$

Jadi faktor integrasi $\mu = e^{\int d(z)dz}$

2. Jika a = 0, b = 0 dan d = 0, maka dari persamaan (1),(3) dan (5) diperoleh

   $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial w}, \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x}$

   dan dari persamaan (2), (4), dan (6) diperoleh

   $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial w} = -cP, \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x} = -cQ, \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial y} = -cS$ sehingga

$$c(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial w}}{-P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}}{-Q} = \frac{\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial y}}{-S}$$

   Jadi faktor integrasi $\mu = e^{\int c(y)dy}$

3. Jika a = 0, c = 0 dan d = 0, maka dari persamaan (2),(3) dan (6) diperoleh

   $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial w}, \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial y}$

   dan dari persamaan (1), (4), dan (5) diperoleh

   $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w} = -bP, \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x} = bR, \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x} = bS,$ sehingga

$$b(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w}}{-P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}}{R} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x}}{S}$$

   Jadi faktor integrasi $\mu = e^{\int b(x)dx}$

4. Jika b = 0, c = 0 dan d = 0, maka dari persamaan (4),(5) dan (6) diperoleh

   $\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial y}$

   dan dari persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh

   $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w} = aQ, \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial w} = aR, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial w} = aS,$ sehingga

$$a(w) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w}}{Q} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial w}}{R} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial w}}{S}$$

   Jadi faktor integrasi $\mu = e^{\int a(w)dw}$

Contoh 3 : Tinjau persamaan diferensial berikut :

$$(2w^2 + 2wx + 2wy + 2wz^2 + 1)dw + dx + dy + 2zdz = 0$$

Penyelesaian : Dari bentuk persamaan $(2w^2 + 2wx + 2wy + 2wz^2 + 1)dw + dx + dy + 2zdz = 0$, diperoleh :

P $= 2w^2 + 2wx + 2wy + 2wz^2 + 1$, $R = 1,\ Q = 1,\ S = 2z$, sehingga

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2w \text{ dan } \frac{\partial Q}{\partial w} = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2w \text{ dan } \frac{\partial R}{\partial w} = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = 4wz \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial w} = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \text{ dan } \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial R}{\partial z} = 0 \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

Persamaan diferensial diatas tidak eksak, dikarenakan

$\frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial R}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial z} \neq \frac{\partial S}{\partial w}$

Maka, Jika $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial y}$, maka faktor integrasinya adalah $\mu = e^{\int a(w)dw}$ dengan $a(w) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w}}{Q} = \frac{2w-0}{1} = 2w$

Sehingga didapat factor integrasinya menjadi $\mu = e^{\int a(w)dw} = e^{\int 2wdw} = e^{w^2}$ dan persamaan diferensial semula berubah menjadi

$$e^{w^2}[(2w^2 + 2wx + 2wy + 2wz^2 + 1)dw + dx + dy + 2zdz] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{w^2}2w^2 + e^{w^2}2wx + e^{w^2}2wy + e^{w^2}2wz^2 + e^{w^2}\right)dw + e^{w^2}\,dx + e^{w^2}dy + e^{w^2}2zdz = 0$$

dari persamaan ini, berarti bahwa

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2we^{w^2} \text{ dan } \frac{\partial Q}{\partial w} = 2we^{w^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2we^{w^2} \text{ dan } \frac{\partial R}{\partial w} = 2we^{w^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 4wze^{w^2} \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial w} = 4wze^{w^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \text{ dan } \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 0 \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

Dikarenakan $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial w}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial w}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial w}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial y}$ sehingga persamaan diferensialnya menjadi eksak.

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Solusi umum persamaan diferensial eksak empat variabel dapat ditentukan dengan cara tersebut diatas yaitu dengan cara mengelompokkan suku-suku menjadi beberapa suku-suku, satu kelompok suku-suku dari bentuk $P(w)dw$, $Q(x)dx$, $R(y)dy$ dan $S(z)dz$ serta lainnya adalah suku-suku sisanya dan mengetahui bahwa masing–masing kelompok (menurut kenyataan) adalah suatu diferensial total dari suatu fungsi.

Untuk menentukan faktor integrasi persamaan diferensial tidak eksak menjadi eksak empat variabel dapat dicari dengan :

1. Jika $\frac{\partial P}{\partial x}$ - $\frac{\partial Q}{\partial w}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ - $\frac{\partial R}{\partial w}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ - $\frac{\partial R}{\partial x}$, maka faktor integrasinya adalah $\mu = e^{\int d(z)dz}$

   dengan $d(z) = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial w}}{-P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x}}{-Q} = \frac{\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial y}}{R}$
2. Jika $\frac{\partial P}{\partial x}$ - $\frac{\partial Q}{\partial w}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ - $\frac{\partial S}{\partial w}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$ - $\frac{\partial S}{\partial x}$, maka faktor integrasinya adalah $\mu = e^{\int c(y)dy}$

   dengan $c(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial w}}{-P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}}{-Q} = \frac{\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial y}}{-S}$
3. Jika $\frac{\partial P}{\partial y}$ - $\frac{\partial R}{\partial w}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ - $\frac{\partial S}{\partial w}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ - $\frac{\partial S}{\partial y}$, maka faktor integrasinya adalah $\mu = e^{\int b(x)dx}$

   dengan $b(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w}}{-P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}}{R} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x}}{S}$
4. Jika $\frac{\partial Q}{\partial y}$ - $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$ - $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ - $\frac{\partial S}{\partial y}$, maka faktor integrasinya adalah $\mu = e^{\int a(w)dw}$

   dengan $a(w) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial w}}{Q} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial w}}{R} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial w}}{S}$

Saran

Pada tulisan ini penulis hanya membahas tentang persamaan diferensial eksak empat variabel. Bagi para pembaca yang berminat untuk meneliti, mungkin dapat melanjutkan penelitian ini dengan membuat sebuah teorema yang dapat menjamin bahwa solusi dari persamaan diferensial eksak empat variabel tersebut adalah benar dan dapat menentukan solusi umum dari persamaan diferensial eksak yang lebih dari empat variabel.

Referensi

Finizio, N. dan Ladas, G. 1988. *Ordinary Differential Equation*. 2^{th} edition. Terjemahan Dra. Widiati Santoso. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Iwan Sugiarto. dan Mario Marcellus. 2002. *Persamaan Diferensial Eksak Tiga Variabel*. Jurnal Integral: Universitas Katolik Parahyangan. hal. 63-69.

Kartono. 1994. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Andi Offset.

Mittal, P. K. 1995. *Differential Equation*. New Delhi: Har-Anand Publications Pvt Ltd.

Philip, E. B. dan Earl D. R. 1989. *Elementary Differential Equation*. 7^{nd} edition. New York: Collier Macmillan Publishers.

Purcell dan Edwin, J. 1994. *Kalkulus dan Geometri Analitik*, Jakarta: Erlangga.