

## Simulasi Model Gelombang Pasang Surut dengan Metode Beda Hingga

**Lukman Hanafi, Danang Indrajaya**

Jurusan Matematika FMIPA ITS

Kampus ITS Sukolilo Surabaya, 60111

[lukman@matematika.its.ac.id](mailto:lukman@matematika.its.ac.id)

### Abstrak

Beberapa pesisir laut di Indonesia memiliki kondisi pasang surut yang cukup tinggi. Hal ini dapat mempengaruhi pembangunan sektoral dan regional yang dilakukan pemerintah maupun swasta yang berlangsung secara intensif di daerah pesisir. Untuk itu, diperlukan suatu perangkat untuk memperkirakan kondisi pasang surut perairan dalam mendukung perencanaan suatu bangunan laut. Salah satu metode numerik yang digunakan untuk menghitung ketinggian dan kecepatan suatu gelombang pasang surut adalah metode beda hingga. Dalam makalah ini dibahas mengenai pembentukan model matematika gelombang pasang surut dan implementasinya, yaitu perhitungan numerik dengan metode beda hingga dengan simulasi grafiknya.

**Kata kunci:** beda hingga, gelombang pasang surut, simulasi

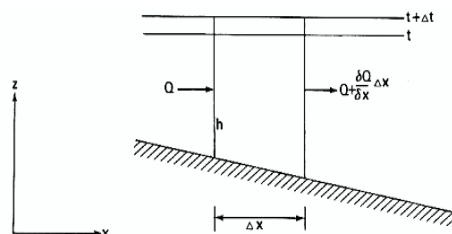
## 1. Pendahuluan

Indonesia merupakan negara kepulauan yang dikelilingi oleh lautan. Dua lautan besar yakni Samudera Indonesia dan Samudera Pasifik dan posisinya yang bera-

da di garis katulistiwa menyebabkan kondisi pasang surut, angin, gelombang, dan arus laut cukup besar. Perubahan pasang surut permukaan air laut dapat mempengaruhi pembangunan sektoral dan regional yang dilakukan pemerintah maupun swasta yang berlangsung secara intensif di daerah pesisir. Mengingat saat ini daerah pantai telah dimanfaatkan dan dikembangkan menjadi daerah pariwisata, transportasi, eksplorasi lepas pantai, industri, pusat perdagangan dan lain-lain. Perubahan pasang surut permukaan air laut juga dapat dimanfaatkan sebagai sumber energi. Sumber energi pasang surut bersifat bukan saja dapat diperbaharui tetapi juga tidak menghasilkan polusi sebagaimana energi air. Mengingat sumberdaya energi hidrokarbon Indonesia akan terus menyurut dan bahkan habis di suatu saat, perlu sejak dini dilakukan eksplorasi dan pengkajian pemanfaatan energi pasang surut mengingat posisi negara Indonesia yang dikelilingi lautan dengan potensi energi pasang surut cukup besar. Untuk itu, diperlukan suatu perangkat untuk membantu proses pengkajian gelombang pasang surut. Dengan simulasi dari model matematika, dapat diprediksi suatu karakteristik dari gelombang pasang surut.

## 2. Konstruksi Model Matematika Gelombang

Gambar 1 menunjukkan situasi volume kendali dari aliran tidak tunak (non-steady flow) dengan kedalaman air  $h$  dan kecepatan rata-rata adalah fungsi pada posisi  $x$  dan waktu  $t$ . Lebar aliran  $b$  adalah fungsi  $x$ .



Gambar 1: Volume kendali dari aliran tidak tunak terbuka

$$\text{Debit } Q = \int_A u \, dz = b \, h u$$

Perubahan massa fluida dalam waktu  $\Delta t$  berkaitan dengan perubahan ketinggian permukaan fluida adalah:

$$\rho b(h + \frac{\delta h}{\delta t})\Delta x - \rho b h \Delta x = \rho b \frac{\delta h}{\delta t} \Delta t \Delta x \quad (1)$$

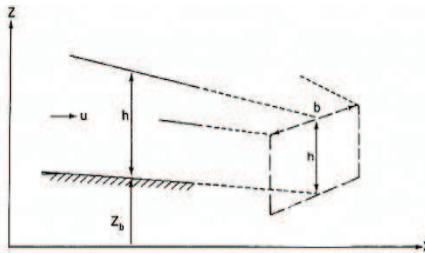
Perubahan massa fluida dalam waktu  $\Delta t$  yang berkaitan dengan nilai keluar masuknya fluida adalah:

$$\rho Q \Delta t - \rho(Q + \frac{\delta Q}{\delta x}) \Delta t = -\rho \frac{\delta Q}{\delta x} \Delta t \Delta x \quad (2)$$

Dengan menyamakan ekspresi Persamaan 1 dan 2 diperoleh persamaan kontinuitas:

$$b \frac{\delta h}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta x} = 0 \quad (3)$$

Persamaan dasar kedalaman rata-rata (depth-average) yang melukiskan fenomena gelombang panjang adalah persamaan aliran permukaan bebas (free surface flow) untuk aliran homogen satu dimensi



Gambar 2: Diagram skematik aliran permukaan bebas

Persamaan gerak pada sumbu-x berdasarkan Gambar 2 diatas, dimana gaya-gaya eksternal diabaikan dan  $\rho$  adalah konstan [3] adalah :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\delta z_s}{\delta x} + \frac{Q}{\rho} \tau_b - gi_b = 0 \quad (4)$$

Dengan merepresentasikan tekanan alas (bottom-shear stress) sebagai maka persamaan geraknya menjadi:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\delta z_s}{\delta x} + \frac{g}{C^2 A^2 R} Q |Q| - gi_b = 0 \quad (5)$$

dimana:  $Q = Au$ ,  $A = bh$ ,  $R = \frac{A}{O}$  dan  $z_s = h + z_b$

$b$  = Lebar aliran (konstan pada waktu).

$h$  = Rata-rata kedalaman air laut

$Q$  = Debit

$A$  = Daerah aliran

$R$  = Radius hidraulik

$O$  = Garis keliling dari dasar aliran

$C$  = Koefisien Chezy

$u$  = Rata-rata kecepatan aliran.

$z_b$  = Ketinggian alas rata-rata diatas bidang horizontal.

$z_s = h + z_b$  = Ketinggian permukaan laut diatas bidang horizontal.

$\alpha$  = koefisien ( $\approx 1$ ).

$i_b$  = Kemiringan alas.

$x$  = Koordinat horizontal.

$g$  = Percepatan gravitasi.

Dengan substitusi  $Q = bhu$ , persamaan kontinuitas (3) menjadi

$$\frac{\delta h}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x}(uh) = 0 \quad (6)$$

Pada kasus pada saluran yang luas ( $b \gg h$ ) dengan lintang penampang segiempat dan luas yang konstan, diasumsikan  $R = h$ . Ketinggian alas rata-rata ( $z_b$ ) diatas bidang horizontal sama dengan nol dengan nilai  $\alpha = 1$ ,  $z_b = 0$ , dimana  $A = bh$ ,  $Q = bhu$ ,  $z_s = z_b + h$  maka persamaan gerak menjadi :

$$\frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} + g \frac{\delta h}{\delta x} + \frac{g}{C^2 h} u |u| - gi_b = 0 \quad (7)$$

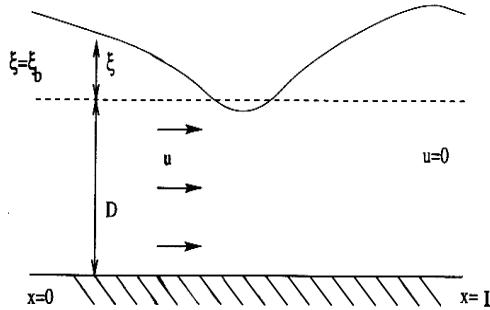
### 3. Persamaan Kontinuitas dan Gerak Gelombang Pasang Surut

Dasar persamaan kontinuitas dan persamaan gerak gelombang pasang surut adalah persamaan gelombang harmonik progresif [3]. Gelombang harmonik progresif adalah sebuah gelombang berkala yang dilukiskan oleh fungsi sinus dan cosinus. Amplitudo gelombangnya adalah relatif kecil pada perairan dalam sehingga kecepatannya juga kecil. Percepatan konvektif ( $u \delta u / \delta x$ ) pada Persamaan 7 dapat diabaikan dan dengan mengasumsikan konstanta friksi,  $c_f = \frac{g|u|}{C^2 h}$ , (dimana  $i_b = 0$ ), maka Persamaan (7) menjadi:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + g \frac{\delta h}{\delta x} + c_f u = 0 \quad (8)$$

Substitusi Persamaan (6) dengan  $h = D + \zeta$ , dengan ( $\zeta \ll h$ ), dimana  $D$  adalah konstan, maka diperoleh persamaan kontinuitas

$$\frac{\delta \zeta}{\delta t} + D \frac{\delta u}{\delta x} = 0 \quad (9)$$



Gambar 3: Gelombang Pasang Surut Laut

Substitusi Persamaan (8) dengan  $h = D + \zeta$ , dengan ( $\zeta \ll h$ ), diperoleh persamaan gerak

$$\frac{\delta u}{\delta t} + g \frac{\delta \zeta}{\delta x} + c_f u = 0 \quad (10)$$

dimana :

$\zeta(x, t)$  = Ketinggian air diatas referensi acuan.

$u(x, t)$  = Kecepatan rata-rata diatas penampang yang melintang.

$D$  = Kedalaman laut (m).

$c_f$  = Konstanta friksi =  $0,0002 s^{-1}$ .

Kondisi awal dan syarat batas dari persamaan gelombang pasang surut diberikan sebagai berikut:

$$\zeta(x = 0, t) = \zeta_b(t), \quad \zeta(x, t = 0) = 0, \quad u(x, t = 0) = 0, \quad u(x = L, t) = 0 \quad (11)$$

Dalam melakukan simulasi Persamaan (10) didiskritkan dengan menggunakan beda maju terhadap waktu dan beda pusat terhadap posisi sehingga diperoleh

$$\frac{\zeta_{i,k+1} - \zeta_{i,k}}{\Delta t} + D \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2\Delta x} = 0 \quad (12)$$

Persamaan (12) diatas dapat ditulis dalam bentuk:

$$\zeta_{i,k+1} = \zeta_{i,k} - \frac{D\Delta t}{2\Delta x} u_{i+1,k} + \frac{D\Delta t}{2\Delta x} u_{i-1,k} \quad (13)$$

dengan  $i = k = 1, 2, \dots, n$ .

Syarat batas dan syarat awal pada Persamaan (11) adalah :  $\zeta(x = 0, t) = \zeta_b(t)$ ,  $\zeta(x, t = 0) = 0$ ,  $u(x, t = 0) = 0$ ,  $u(x = L, t) = 0$ , sehingga  $\zeta_{0,k} = \zeta_b$ ,  $\zeta_{i,0} = 0$ ,  $u_{i,0} = 0$ ,  $u_{n,k} = 0$ . Dengan demikian untuk  $i = 1 \rightarrow \zeta_{1,k+1} = \zeta_{1,k} - \frac{D\Delta t}{2\Delta x} u_{2,k} + \frac{D\Delta t}{2\Delta x} u_{0,k}$ .

Karena  $\frac{\delta u}{\delta x} = 0$  pada saat  $x = 0$ , maka  $u_{0,k} = u_{1,k}$ . Sehingga pada saat  $i = n - 1$  menjadi:

$$\zeta_{n-1,k+1} = \zeta_{n-1,k} + \frac{D\Delta t}{2\Delta x} u_{n-2,k}$$

Persamaan (10) yang memuat konsep gerak linier dengan koefisien friksi, harus dijabarkan dalam bentuk diskrit sesuai dengan titik-titik tinjauan pada grid. Bentuk diskritisasi persamaan gerak 10 diatas, yaitu:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} + g \frac{\zeta_{i+1,k} - \zeta_{i-1,k}}{2\Delta x} + c_f u_{i,k} = 0 \quad (14)$$

Persamaan (14) diatas dapat ditulis dalam bentuk:

$$u_{i,k+1} = (1 - \Delta t c_f) u_{i,k} - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} \zeta_{i+1,k} + \frac{g\Delta t}{2\Delta x} \zeta_{i-1,k} \quad (15)$$

dimana  $i = k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Seperti pada persamaan kontinuitas, pada persamaan gerak juga terdapat beberapa syarat batas dan kondisi awal, yaitu pada Persamaan (11), dimana  $\zeta(x = 0, t) = \zeta_b(t)$ ,  $\zeta(x, t = 0) = 0$ ,  $u(x, t = 0) = 0$ ,  $u(x = L, t) = 0$ , sehingga  $\zeta(0, k) = \zeta_b$ ,  $\zeta(i, 0) = 0$ ,  $u_{n,k} = 0$ . Karena  $\frac{\delta \zeta}{\delta x} = 0$  pada saat  $x = n$ , maka  $\zeta_{n,k} = \zeta_{n-1,k}$ . Sehingga pada saat persamaannya menjadi:

$$u_{n-1,k+1} = (1 - \Delta t c_f) u_{n-1,k} - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} \zeta_{n-1,k} + \frac{g\Delta t}{2\Delta x} \zeta_{n-2,k}$$

Dari pendiskritan diatas, kemudian dibentuk menjadi suatu matrik untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan  $x_{k+1} = Ax_k + B$  dengan memisalkan  $a = 1 - \Delta t c_f$ ,  $b = \frac{g\Delta t}{2\Delta x}$ ,  $c = \frac{D\Delta t}{2\Delta x}$ .

Dalam meyelesaikan sistem persamaan  $x_{k+1} = Ax_k + B$  diatas, supaya penyelesaian ini dapat stabil maka diberikan batasan sebagai berikut:

1.  $1 - \Delta t c_f \leq 1$
2.  $\frac{g\Delta t}{2\Delta x} \leq 1$
3.  $\frac{D\Delta t}{2\Delta x} \leq 1$

#### 4. Simulasi Model Gelombang Pasang Surut

Pada permasalahan mengenai gelombang pasang surut air laut telah diperoleh model dengan menggunakan asumsi-asumsi untuk mempermudah penghitungan dan telah dibuat bentuk pendiskritannya pada Persamaan (12) untuk persamaan

kontinuitas dan Persamaan (14) untuk persamaan gerak. Pada model ini kedalaman yang diperhitungkan adalah 10 meter karena dibawah itu dianggap aliranya terlalu deras. Pada beberapa eksperimen mengenai gelombang pasang surut air laut, nilai-nilai parameter diasumsikan sebagai berikut: Kedalaman laut ( $D = 10m$ ), konstanta friksi ( $c_f = 0.0002$ ), jumlah grid ( $N = 40$  grid), jarak terjauh ( $L = 60m$ ) dan perubahan jarak ( $\Delta x = L/(N + 1) = 60/41m$ ).

Agar penyelesaian dari permasalahan diatas dapat stabil, maka diberi batasan sebagai berikut:

$$1. 1 - \Delta t c_f \leq 1$$

Sehingga nilai dari  $\Delta t$  dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\Delta t c_f \leq 0 \text{ dimana } c_f = 0.0002, \text{ maka } \Delta t \geq 0.$$

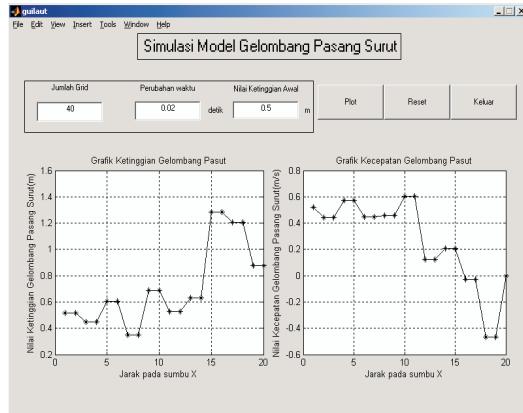
$$2. \frac{g\Delta t}{2\Delta x} \leq 1$$

Setelah dimasukkan nilai  $g = 10 m/dt^2$  dan  $\Delta x = L/(N + 1) = 60/41m = 1,46m$ , diperoleh:  $\frac{10\Delta t}{2(1,46)} \leq 1$ , maka  $\Delta t \leq 0,292$  detik.

$$3. \frac{D\Delta t}{2\Delta x} \leq 1$$

Setelah dimasukkan nilai  $D = 10m$  dan  $\Delta x = L/(N+1) = 60/41m = 1,46m$ , diperoleh:  $\Delta t \leq 0,292$  detik.

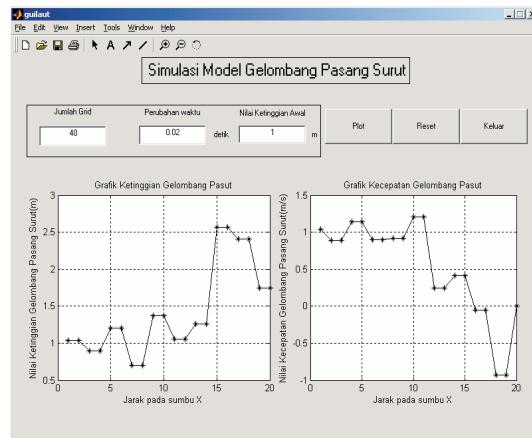
Maka perubahan waktu untuk tiap iterasi adalah  $0 \leq \Delta t \leq 0,292$  detik.



Gambar 4: Plot nilai ketinggian dan kecepatan gelombang dengan dengan perubahan waktu 0,02 detik

Gambar 4 diatas menunjukkan nilai ketinggian dan kecepatan gelombang pasang surut air laut berdasarkan pembentukan matrik dengan pendekatan numerik beda hingga. Dengan ketinggian awal sebesar 0,5 meter, terlihat ketinggian

gelombang naik turun di sekitar nilai ketinggian awalnya. Ketinggian gelombang mencapai 1,283 meter dengan kecepatan 0,206 m/s setelah berjalan selama 200 satuan waktu (4 detik) dengan penjalaran gelombang ke arah sumbu x dari pusat gelombang sejauh 20 satuan (29,2 meter).



Gambar 5: Plot nilai ketinggian dan kecepatan gelombang dengan perubahan waktu 0,02 detik

Pada Gambar 5 diatas terlihat nilai ketinggian dan kecepatan gelombang dengan ketinggian awal 1m. Ketinggian gelombang terlihat naik turun di sekitar ketinggian 1 meter. Ketinggian gelombang mencapai 2,565 meter dengan kecepatan 0,415 m/det setelah berjalan selama 200 satuan waktu (4 detik) dengan penjalaran gelombang ke arah sumbu x dari pusat gelombang sejauh 20 satuan (29,2 meter).

## 5. Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan diatas dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk memprediksi ketinggian dan kecepatan gelombang pasang surut air laut, dapat menggunakan pendekatan numerik dengan metode beda hingga, yaitu menggunakan beda maju terhadap perubahan waktu dan beda pusat terhadap perubahan jarak.
2. Semakin tinggi nilai perubahan waktu (waktu tempuh gelombang), maka semakin tinggi pula ketinggian dan kecepatan gelombang pasang surut air laut tersebut.

3. Ketinggian gelombang bergerak naik turun sepanjang nilai ketinggian awalnya.

## Pustaka

- [1] Irmawanti,Wahyu, (2003), Estimasi Filter Kovariansi Akar Kuadrat Dengan Rang Tereduksi Pada Penyebaran Limbah Cair di Laut, Tugas Akhir, Jurusan Matematika FMIPA-ITS, Surabaya.
- [2] Smith, G.D., (1985), Numerical Solution of Partial Differential Equation: Finite Difference Methods, Oxford University Press, New York.
- [3] Van Rijn, Leo C., (1994), Principles of Fluid Flow and Surface Waves in Rivers, Estuaries, Seas and Oceans, Aqua Publications, Amsterdam.
- [4] Verlaan, Martinus, (1998), Efficient Kalman Filtering Algorithms for Hydrodynamic Models, Technische Universiteit Delft, Delft.