J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 8, No. 2, November 2011, 17–22

DIMENSI METRIK PENGEMBANGAN GRAF KINCIR POLA $K_1 + mK_3$

Suhud Wahyudi, Sumarno, Suharmadi
Jurusan Matematika, FMIPA ITS Surabaya
suhud@matematika.its.ac.id, sumarno@matematika.its.ac.id, susan@matematika.its.ac.id

Abstrak

Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum, dan kardinalitas tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan dengan $dim(G)$.

Graf kincir adalah graf yang dapat dinyatakan dalam bentuk $K_1 + mK_2$. Dalam makalah ini ditunjukkan bahwa dimensi metrik pengembangan graf kincir pola $K_1 + mK_3$ dengan $m \geq 2$ adalah 2m.

Katakunci: *Himpunan pembeda, Dimensi metrik, Pengembangan graf kincir*

1. Pendahuluan

Belum diketahui secara spesifik kapan bahasan dimensi metrik pertama kali ada. Menurut [1], ide dimensi metrik muncul dari himpunan pembeda (dan himpunan pembeda minimum) yang diperkenalkan oleh [2] pada tahun 1975. [2] mengutarakan konsep himpunan *locating* untuk menyatakan himpunan pembeda seperti yang dikenal saat ini. Ia menyatakan kardinalitas minimum himpunan pembeda graf G sebagai *location number* dinotasikan dengan $\log(G)$. Kemudian [3] pada tahun 1990 mengutarakan konsep dimensi metrik suatu graf seperti yang dikenal saat ini. Selanjutnya [4] pada tahun 1987 mengutarakan bahwa himpunan pembeda W sebagai himpunan dari simpul - simpul di graf G sedemikian hingga untuk setiap simpul di G menghasilkan jarak yang berbeda terhadap setiap simpul di W. Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda.

Jika G adalah graf tak berarah dan terhubung, jarak antara dua titik u dan v di G, $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek diantara keduanya. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ dari simpul - simpul dalam graf terhubung G dan simpul $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k – *tuple*

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots, d(v, w_k)).$$

Jika $r(v|W)$ untuk setiap simpul $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum, dan kardinalitas tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan dengan $\dim(G)$ [1].

[1] menunjukkan bahwa untuk setiap pasangan integer n,k dengan $1 \leq k \leq n - 1$, terdapat suatu graf dimensi k orde n. Kemudian [5] menunjukkan bahwa jika G suatu graf terhubung order $n \geq 2$, maka

a. $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$,

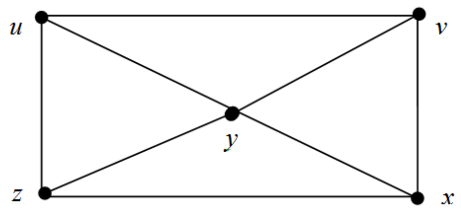
b. $\dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$ dan

c. untuk $n \geq 4$, $\dim(G) = n - 2$ jika dan hanya jika $G = K_{r,s}, r, s \geq 1, G = K_r + \overline{K_s}, r \geq 1, s \geq 2$, atau $G = K_r + (K_1 \bigcup K_s),\ r, s \geq 1$.

Jadi selain graf path P_n, dimensi metriknya minimal 2.
Selanjutnya [6] menunjukkan bahwa dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_2$ adalah m.

Contoh berikut diberikan untuk memberikan gambaran mendapatkan himpunan pembeda, himpunan pembeda minimum dan dimensi metrik dari sebuah graf terhubung.

Diberikan graf terhubung G dengan 5 simpul dan 8 sisi seperti ditunjukkan pada Gambar 1, dan akan ditentukan himpunan pembeda dari graf G tersebut.

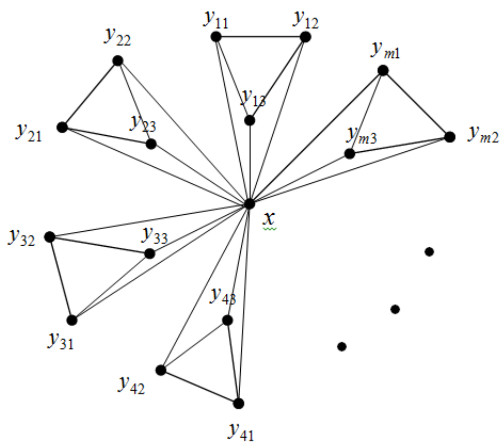


Gambar 1: Graf terhubung dengan 5 titik dan 8 sisi

Pembahasan :
Misalkan $W_1, = (u)$. Maka representasi simpul-simpul di graf G terhadap W_1 adalah $r(u|W_1) = (0)$, $r(v|W_1) = (1)$, $r(y|W_1) = (1)$, $r(x|W_1) = (2)$, $r(z|W_1) = (1)$.
Karena $r(v|W_1) = r(y|W_1) = r(z, W_1) = (1)$ maka W_1 bukan himpunan pembeda dari graf G. Kemudian misalkan $W_2 = \{u, v, y\}$. Maka representasi simpul-simpul di graf G terhadap W_2 adalah $r(u|W_2) = (0, 1, 1)$, $r(v|W_2) = (1, 0, 1)$, $r(y|W_2) = (1, 1, 0)$, $r(x|W_2) = (2, 1, 1)$, $r(z|W_2) = (1, 2, 1)$. Karena representasi simpul-simpul di graf G terhadap W_2 berbeda, maka W_2 adalah himpunan pembeda dari G. Akan tetapi W_2 bukan himpunan pembeda minimum dari $V(G)$, karena W_3 berikut mempunyai kardinalitas lebih kecil dari W_2. Misalkan $W_3 = \{u, v\}$. Maka representasi simpul-simpul di graf G terhadap W_3 adalah $r(u|W_3) = (0, 1)$, $r(v|W_3) = (1, 0)$, $r(z|W_3) = (1, 2)$, $r(y|W_3) = (1, 1)$, $r(x|W_3) = (2, 1)$. Karena representasi simpul-simpul di graf G terhadap W_3 berbeda, maka W_3 adalah himpunan pembeda dari $V(G)$. W_3 adalah himpunan pembeda minimum dari $V(G)$ karena tidak ada lagi himpunan pembeda yang kardinalitasnya lebih kecil dari 2. Jadi graf diatas mempunyai dimensi 2 atau $\dim G = 2$.

2. Dimensi Metrik Pengembangan Graf Kincir Pola $K_1 + mK_3$

Secara umum, pengembangan graf kincir pola $K_1 + mK_3$ dapat digambarkan seperti pada Gambar 1.



Gambar 2: Graf $K_1 + mK_3$

Lemma 2.1 *Untuk graf $K_1 + mK_3$ dengan $m \geq 2$ berlaku,*

$$d(u,v) = \begin{cases} 0, \text{ jika } u = v \\ 1, \text{ jika } u \text{ dan } v \text{ pada satu daun yang sama atau } u \text{ dan } v \text{ pusat kincir} \\ 2, \text{jika } u \text{ dan } v \text{ berada pada daun kincir yang berbeda} \end{cases}$$

Lemma 2.2 *Minimum himpunan pembeda graf $K_1 + mK_3$ diperoleh dengan tidak memasukkan simpul pusat atau sisi pusat kincir dalam subhimpunan W karena simpul pusat tidak akan memberikan representasi yang berbeda pada simpul-simpul dari $K_1 + mK_3$, sehingga pasti tidak akan menghasilkan himpunan pembeda minimum.*

Teorema 2.3 *Dimensi metrik graf $K_1 + 2K_3$ adalah 4*

Bukti Misalkan graf $K_1 + mK_3$ dengan $m = 2$ dinamakan graf $G2$. Jadi $G2 = K_1 + 2K_3$. Untuk menemukan batas atas, maka ambil $W = \{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}\}$, dengan menggunakan Lemma 2.1 maka diperoleh representasi setiap simpul graf terhadap W adalah sebagai berikut:
$r(y_{11}|W) = (0,1,2,2)$, $r(y_{12}|W) = (1,0,2,2)$, $r(y_{13}|W) = (1,1,2,2)$,
$r(y_{21}|W) = (2,2,0,1)$, $r(y_{22}|W) = (2,2,1,0)$, $r(y_{23}|W) = (2,2,1,1)$,
$r(x|W) = (1,1,1,1)$,
yang memberikan representasi yang berbeda. Jadi batas atas $\dim(G_2)$ adalah 4. Sedangkan jika kardinalitas W berkurang 1 yaitu $|W| = 4 - 1 = 3$, maka pasti bukan himpunan pembeda, karena pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Misal diambil $W = \{y_{11}, y_{12}, y_{21}\}$, maka dengan menggunakan Lemma 2.1 diperoleh representasi setiap simpul dari graf terhadap W adalah sebagai berikut :
$r(y_{11}|W) = (0,1,2)$, $r(y_{12}|W) = (1,0,2)$, $r(y_{13}|W) = (1,1,2)$,
$r(y_{21}|W) = (2,2,0)$, $r(y_{22}|W) = (2,2,1)$, $r(y_{23}|W) = (2,2,1)$,
$r(x|W) = (1,1,1)$,
yang tidak memberikan representasi yang berbeda, karena $r(y_{22}|W) = r(y_{23}|W) = (2,2,1)$ Jadi $W = \{y_{11}, y_{12}, y_{21}\}$ bukan merupakan himpunan pembeda G_2. Dalam hal ini sesuai dengan Lemma 2.2, maka simpul pusat x tidak dimasukkan sebagai elemen W. Jadi batas bawah $\dim(G_2)$ adalah 4. Karena batas atas dan batas bawah $\dim(G_2)$ adalah 4 maka diperoleh $4 \leq \dim(G_2) \leq 4$, sehingga $\dim(G_2) = 4$.■

Lemma 2.4 *Dimensi metrik graf* $K_1 + 3K_3$ *adalah* 6

Bukti Misalkan graf $K_1 + mK_3$ dengan $m = 3$ dinamakan graf G_3. Jadi $G_3 = K_1 + 3K_3$. Untuk menemukan batas atas $\dim(G_3)$, maka ambil $W = \{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}\}$. Dengan menggunakan Lemma 2.1 maka diperoleh representasi setiap simpul graf terhadap W adalah sebagai berikut :
$r(y_{11}|W) = (0, 1, 2, 2, 2, 2)$, $r(y_{12}|W) = (1, 0, 2, 2, 2, 2)$,
$r(y_{13}|W) = (1, 1, 2, 2, 2, 2)$, $r(y_{21}|W) = (2, 2, 0, 1, 2, 2)$,
$r(y_{22}|W) = (2, 2, 1, 0, 2, 2)$, $r(y_{23}|W) = (2, 2, 1, 1, 2, 2)$,
$r(y_{31}|W) = (2, 2, 2, 2, 0, 1)$, $r(y_{32}|W) = (2, 2, 2, 2, 1, 0)$,
$r(y_{33}|W) = (2, 2, 2, 2, 1, 1)$, $r(x|W) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$
yang memberikan representasi yang berbeda. Jadi batas atas $\dim(G_3)$ adalah 6. Sedangkan jika kardinalitas $|W|$ diambil 1 atau $|W| = 6 - 1 = 5$, maka pasti bukan himpunan pembeda. Misal diambil $W = \{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y_{31}\}$, dengan menggunakan Lemma 2.1 maka diperoleh representasi simpul-simpul graf terhadap W adalah sebagai berikut:
$r(y_{11}|W) = (0, 1, 2, 2, 2)$, $r(y_{12}|W) = (1, 0, 2, 2, 2)$, $r(y_{13}|W) = (1, 1, 2, 2, 2)$,
$r(y_{21}|W) = (2, 2, 0, 1, 2)$, $r(y_{22}|W) = (2, 2, 1, 0, 2)$, $r(y_{23}|W) = (2, 2, 1, 1, 2)$,
$r(y_{31}|W) = (2, 2, 2, 2, 0)$, $r(y_{32}|W) = (2, 2, 2, 2, 1)$, $r(y_{33}|W) = (2, 2, 2, 2, 1)$,
$r(x|W) = (1, 1, 1, 1, 1)$,
yang tidak memberikan representasi yang berbeda, karena $r(y_{32}|W) = r(y_{33}|W) = (2, 2, 2, 2, 1)$. Jadi $W = \{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y_{31}\}$ bukan merupakan himpunan pembeda G_3. Dalam hal ini sesuai dengan Lemma 2.2, maka simpul pusat x tidak dimasukkan sebagai elemen W. Jadi batas bawah $\dim(G_3)$ adalah 6. Karena batas atas dan batas bawah $\dim(G_3)$ adalah 4 maka diperoleh $6 \leq \dim(G_3) \leq 6$ atau $\dim(G_3) = 6$.■

Teorema 2.5 *Dimensi metrik graf* $K_1 + mK_3$ *adalah* $2m$

Bukti Misalkan graf $K_1 + mK_3$ dengan $m = 2$ dinamakan graf G_m. Jadi $G_m = K_1 + mK_3$. Untuk menemukan batas atas $\dim(G_m)$, maka ambil $W = \{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}, ..., y_{m1}, y_{m2}\}$, untuk $m = 2$. Disini $|W| = 2m$. Dengan menggunakan Lemma 2.1 maka diperoleh representasi setiap simpul graf terhadap W adalah sebagai berikut
$r(y_{11}|W) = (0, 1, 2, 2, 2, 2, \cdots, 2, 2)$, $r(y_{12}|W) = (1, 0, 2, 2, 2, 2, \cdots, 2, 2)$,
$r(y_{13}|W) = (1, 1, 2, 2, 2, 2, \cdots, 2, 2)$, $r(y_{21}|W) = (2, 2, 0, 1, 2, 2, \cdots, 2, 2)$,
$r(y_{22}|W) = (2, 2, 1, 0, 2, 2, \cdots, 2, 2)$, $r(y_{23}|W) = (2, 2, 1, 1, 2, 2, \cdots, 2, 2)$,
$r(y_{31}|W) = (2, 2, 2, 2, 0, 1, \cdots, 2, 2)$, $r(y_{32}|W) = (2, 2, 2, 2, 1, 0, \cdots, 2, 2)$,
$r(y_{33}|W) = (2, 2, 2, 2, 1, 1, \cdots, 2, 2)$, $\cdots\cdots\cdots$
$r(y_{m1}|W) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots, 0, 1)$, $r(y_{m2}|W) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots, 1, 0)$,

yang memberikan representasi yang berbeda. Jadi batas atas $\dim(G_m)$ adalah $2m$. Sedangkan jika kardinalitas $|W|$ diambil 1 atau $|W| = 2m - 1$, maka pasti bukan himpunan pembeda. Misal diambil $W = \{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}, ..., y_{m1}\}$, untuk $m \geq 2$, dengan menggunakan Lemma 2.1 maka diperoleh representasi setiap simpul graf terhadap W adalah sebagai berikut :
$r(y_{11}|W) = (0, 1, 2, 2, 2, 2, \cdots, 2)$, $r(y_{12}|W) = (1, 0, 2, 2, 2, 2, \cdots, 2)$,
$r(y_{13}|W) = (1, 1, 2, 2, 2, 2, \cdots, 2)$, $r(y_{21}|W) = (2, 2, 0, 1, 2, 2, \cdots, 2)$,
$r(y_{22}|W) = (2, 2, 1, 0, 2, 2, \cdots, 2)$, $r(y_{23}|W) = (2, 2, 1, 1, 2, 2, \cdots, 2)$,
$r(y_{31}|W) = (2, 2, 2, 2, 0, 1, \cdots, 2)$, $r(y_{32}|W) = (2, 2, 2, 2, 1, 0, \cdots, 2)$,
$r(y_{33}|W) = (2, 2, 2, 2, 1, 1, \cdots, 2)$, $\cdots\cdots\cdots$
$r(y_{m1}|W) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots, 0)$, $r(y_{m2}|W) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots, 1)$,
$r(y_{m3}|W) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots, 1)$, $r(x|W) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots, 1)$,
yang tidak memberikan representasi yang berbeda. Dalam hal ini sesuai dengan Lemma 2.2, maka simpul pusat x tidak dimasukkan sebagai elemen W. Jadi batas bawah $\dim(G_m)$ adalah $2m$. Karena batas atas dan batas bawah $\dim(G_m)$ adalah $2m$ maka diperoleh $2m = \dim(G_m) = 2m$ atau $\dim(G_m) = 2m$.■

3. Kesimpulan

Dimensi metrik pengembangan graf kincir pola $K_1 + mK_3$ dengan $m \geq 2$ adalah $2m$.

Pustaka

[1] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellerman, *Resolvability In Graphs And The Metric Dimension Of Graph*, Discrete Appl. Math, 105, 99-113, 2000.

[2] P.J. Slater, *Leaves of Trees*, Congressus Numerantium. 14:547-559, 1975.

[3] F. Harary, and R.A. Melter, *On The Metric Dimension Of Graph*, Ars. Combin. 2:101-195, 1990.

[4] P.J. slater, *Domination and Location in Acyclic Graph*, Network. 17:55-64, 1987.

[5] P. Zhang and G. Chartrand, *The Theory And Application Of Resolvability In Graphs*, Congressus Numerantium, 160, 47-68, 2003.

[6] Chandra, Suhud W., *Dimensi Metrik Graf Kincir*, Tugas Akhir Jurusan , 2008.