J. Math. and Its Appl.
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 14, No. 1, Mei 2017, 17—23

TEORI IDEAL PADA SEMIRING FAKTOR DAN SEMIRING TERNARY FAKTOR

Dian Winda Setyawati
Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
dian_ws_math@matematika.its.ac.id

Abstrak

Semiring merupakan generalisasi dari ring dimana syarat invers terhadap penjumlahan dihilangkan. Pada semiring, operasi yang digunakan adalah operasi biner penjumlahan dan operasi biner perkalian sedangkan pada semiring ternari, operasi yang digunakan adalah operasi biner penjumlahan dan operasi terner perkalian. Telah diperoleh karakterisasi ideal, ideal perluasan subtraktif, ideal prima pada semiring faktor maupun semiring ternari faktor. Pada paper ini akan diberikan pembuktian pada karakterisasi ideal, ideal perluasan subtraktif, ideal prima pada semiring ternari faktor dengan mengkaitkan hasil yang telah diperoleh terlebih dahulu pada semiring faktor

Kata Kunci: ideal perluasan subtraktif, ideal prima, semiring faktor dan semiring ternari faktor

1 Pendahuluan

Pada saat ini telah banyak *paper* yang membahas semiring maupun semiring ternary. Pada paper Gupta V & Chaudhari,J.N (2009) dibahas ideal prima pada semiring, Chaudhari,J.N dan Ingale, K.J. (2011) dibahas ideal subtraktif pada Semiring ternary, Setyawati, D.W dan Soleha (2014) dibahas bentuk-bentuk ideal pada semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$ dan bentuk-bentuk ideal pada semiring $(\mathbb{Z}^+,\oplus,\odot)$**,** Setyawati, DW and Soleha (2016) dibahas bentuk – bentuk ideal pada semiring $(S_{nxn}(\mathbb{Z}_0^+),+,.)$ dan semiring $(S_{nxn}(\mathbb{Z}_0^+),\oplus,\odot)$.

Pada paper Chaudhari,J.N dan Bonde, D.R (2014) telah diperoleh karakterisasi ideal, ideal perluasan subtraktif, ideal prima pada semiring faktor sedangkan pada paper Chaudhari, J.N dan Ingale,K.J (2016) telah diperoleh karakterisasi ideal, ideal perluasan subtraktif, ideal prima pada semiring ternari faktor. Pada paper ini diberikan pembuktian karakterisasi ideal, ideal perluasan subtraktif, ideal prima pada semiring ternari faktor dengan mengkaitkan hasil yang telah diperoleh terlebih dahulu pada semiring faktor. Teorema – teorema terkait dengan karakterisasi ideal, ideal perluasan subtraktif, ideal prima yang telah diperoleh pada semiring ternari faktor dianalasisa sifat yang berlaku pada operasinya. Pada paper ini sifat yang berlaku pada operasi biner penjumlahan, pembuktian teorema akan dikaitkan dengan teorema yang ada pada hasil pada paper Chaudhari,J.N dan Bonde, D.R (2014) sehingga pembuktian pada paper ini beberapa akan berbeda dengan paper Chaudhari,J.N dan Ingale,K.J (2016) sedangkan sifat yang berlaku pada operasi terner perkalian, pembuktian teorema akan diuraikan secara lengkap seperti pada paper Chaudhari,J.N dan Ingale,K.J (2016)

2 Teori Ideal pada Semiring Faktor

2.1 Ideal Pada Semiring

Pada subbab ini akan diberikan definisi – definisi ideal yang terkait dengan pembahasan pada bab 3

Definisi 2.1 [4] *Himpunan tak kosong R terhadap operasi biner "$+$" dan "$\cdot$" disebut semiring, apabila untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku*

a. *Bersifat asosiatif terhadap operasi biner "$+$" yaitu $(a + b) + c = a + (b + c)$*
b. *Bersifat komutatif terhadap operasi biner "$+$" yaitu $a + b = b + a$*
c. *Terdapat elemen $0 \in R$ yang memenuhi $r + 0 = 0 + r = r$ dan $r0 = 0r = 0$ untuk sebarang $r \in R$.*
d. *Bersifat asosiatif terhadap operasi biner "$\cdot$" yaitu $(ab)c = a(bc)$*
e. *Bersifat distributive terhadap dua operasi biner "$+$" dan "$\cdot$" yaitu*
   (i) $a(b + c) = ab + ac$
   (ii) $(a + b)c = ac + bc$

Definisi 2.2 [4] *Jika R adalah semiring dan $I \subseteq R$, maka I dikatakan ideal pada semiring R apabila untuk sebarang $x, y \in I$ dan $r \in R$ memenuhi :*

a. $x + y \in I$,
b. $rx \in I$ *dan* $xr \in I$.

Selanjutnya akan didefinisikan jenis – jenis ideal pada semiring *R*

Definisi 2.3 [1] *Jika R adalah semiring , $I \subseteq R$ dan I ideal pada semiring R maka*

(i) Ideal *I* disebut ideal prima jika $ab \in I,\ a, b \in R$ maka $a \in I$ atau $b \in I$
(ii) Ideal *I* disebut Q-ideal jika ada himpunan Q subset dari R sehingga

$$R = \bigcup_{q \in Q} q + I$$

dan jika $q_1, q_2 \in Q$, maka $(q_1 + I) \cap (q_2 + I) \neq \emptyset \Leftrightarrow q_1 = q_2$

(iii) Ideal A dikatakan ideal perluasan subtraktif dari I, jika untuk sebarang $x \in I$ dan $y \in R$ yang memenuhi $x + y \in A$, maka berakibat $y \in A$.

2.2 Ideal Pada Semiring Ternari

Pada subbab ini akan diberikan definisi – definisi ideal yang terkait dengan pembahasan pada bab 3. Pada konsepnya perbedaan semiring dengan semiring ternari pada operasi perkalian.

Definisi 2.4 [2] *Himpunan tak kosong R terhadap operasi biner penjumlahan dan operasi terner perkalian ditulis $(R, +, \cdot)$ disebut semiring ternari jika untuk setiap $a, b, c, d, e \in R$*

(a) *Bersifat asosiatif terhadap operasi biner "+" yaitu* $(a+b)+c=a+\ (b+c)$
(b) *Bersifat komutatif terhadap operasi biner "+" yaitu* $a+b=b+a$
(c) *Terdapat elemen* $0 \in R$ *yang memenuhi* $a+0=0+a=a$ *dan* $ab0=a0b=0ab=0$
(d) *Bersifat asosiatif terhadap operasi terner "·" yaitu* $(abc)de=a(bcd)e=ab(cde)$
(e) *R distributive terhadap operasi biner penjumlahan dan operasi terner perkalian yaitu*
   (i) $(a+b)cd=acd+bcd$
   (ii) $a(b+c)d=abd+acd$
   (iii) $ab(c+d)=abc+abd$

$\mathbb{Z}_0^+$ (himpunan bilangan bulat nonnegatif) dan $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ merupakan semiring sekaligus semiring ternari tetapi $\mathbb{Z}_0^-$ (himpunan bilangan bulat nonpostitif) dan $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ merupakan semiring ternari tetapi bukan semiring karena terhadap operasi perkalian bukan operasi terner sehingga setiap semiring pasti semiring ternari tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Selanjutnya akan didefinisikan ideal pada semiring ternari

Definisi 2.5 [2]
I himpunan bagian dari semirings R, I disebut ideal pada R jika untuk setiap $x, y \in I$ *dan* $r, s \in R$ *berlaku*
   (i) $x+y \in I$
   (ii) $rsx, rxs, xrs \in I$

Selanjutnya akan didefinisikan jenis – jenis ideal pada semiring ternari *R*

Definisi 2.6 [3] *Jika R adalah semiring ternari ,* $I \subseteq R$ *dan I ideal pada semiring ternari R maka*
(i) *Ideal I disebut ideal prima jika* $abc \in I,\ a, b, c \in R$ *maka* $a \in I$ *,* $b \in I$ *atau* $c \in I$
(ii) *Ideal I disebut Q-ideal jika ada himpunan Q subset dari R sehingga*
$$R=\bigcup_{q\in Q} q+I$$
dan jika $q_1, q_2\ \in Q$*, maka* $(q_1+I)\cap(q_2+I)\neq\emptyset \Leftrightarrow q_1=q_2$
(iii) *Ideal A dikatakan ideal perluasan subtraktif dari I , jika untuk sebarang* $x \in I$ *dan* $y \in R$ *yang memenuhi* $x+y \in A$*, maka berakibat* $y \in A$.

Pada definisi ideal diatas terlihat bahwa definisi ideal pada semiring ternari sama dengan definisi ideal pada semiring apabila terkait dengan operasi biner penjumlahan.

2.3 Karakterisasi Ideal pada Semiring Faktor

Pada subbab ini akan diberikan teorema – teorema yang telah diperoleh pada paper [1] terkait dengan Karakterisasi Ideal pada Semiring Faktor.

Lemma berikut ini adalah hubungan antara ideal perluasan subtraktif dengan Q-ideal

Lemma 2.1[1]. *Misalkan I dan A adalah ideal pada semiring R dengan $I \subseteq A$. Jika I adalah Q-ideal pada semiring R, maka ideal A merupakan ideal perluasan subtraktif dari I jika dan hanya jika I adalah $A \cap Q$-ideal pada A.*

Misalkan I adalah Q-ideal pada semiring R maka terbentuk semiring faktor $R/I_{(Q)}$ dengan operasi biner "$\oplus$" dan "$\odot$" yang didefinisikan sebagai berikut: Untuk sebarang $q_1 + I, q_2 + I \in R/I_{(Q)}$ dengan $q_1, q_2 \in Q$ berlaku :

a. $(q_1 + I) \oplus (q_2 + I) = q_3 + I$ dimana $q_1 + q_2 + I \subseteq q_3 + I$ untuk suatu $q_3 \in Q$, dan
b. $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) = q_4 + I$ dimana $q_1 q_2 + I \subseteq q_4 + I$ untuk suatu $q_4 \in Q$.

Teorema 2.1[1]. *Misalkan I dan A masing – masing adalah ideal pada semiring R dengan $I \subseteq A$. Jika I adalah Q-ideal pada semiring R, maka pernyataan di bawah ini ekivalen.*

a. A adalah ideal perluasan subtraktif dari I;
b. I adalah $A \cap Q$-ideal dari A;
c. $A/I_{(A \cap Q)}$ adalah ideal pada semiring faktor $R/I_{(Q)}$.

Teorema 2.2[1]. *Misalkan I adalah Q-ideal pada semiring R maka himpunan L adalah ideal pada semiring faktor $R/I_{(Q)}$ jika dan hanya jika terdapat ideal perluasan subtraktif A dari I dan $L = A/I_{(A \cap Q)}$ dimana $A = \{x \in R \mid x + I \subseteq q + I \in L \text{ untuk suatu } q \in Q\}$.*

Teorema 2.3 [1] *Misalkan I adalah Q-ideal dan P adalah ideal perluasan subtraktif dari I pada semiring R maka Ideal P adalah ideal prima pada semiring R jika dan hanya jika ideal $P/I_{(P \cap Q)}$ merupakan ideal prima pada semiring faktor $R/I_{(Q)}$.*

3 Pembahasan

Pada bab ini akan diberikan teorema yang telah diperoleh pada paper [3] terkait dengan karakterisasi ideal, ideal perluasan subtraktif dan ideal prima pada semiring ternari faktor. Pembuktian pada teorema yang terkait dengan operasi biner penjumlahan akan dikaitkan pada subbab 2.3.

Lemma 3.1[3]. *Misalkan I dan A adalah ideal pada semiring ternari R dengan $I \subseteq A$. Jika I adalah Q-ideal pada semiring ternari R, maka ideal A merupakan ideal perluasan subtraktif dari I jika dan hanya jika I adalah $A \cap Q$-ideal pada A.*

Bukti:

Operasi pada Ideal perluasan subtraktif dan Q-ideal adalah operasi biner penjumlahan sehingga dari lemma 2.1 maka jelas lemma 3.1 terbukti

Misalkan I adalah Q-ideal pada semiring ternari R maka terbentuk semiring ternari faktor $R/I_{(Q)}$ dengan operasi biner "$\oplus$" dan "$\odot$"yang didefinisikan sebagai berikut: Untuk sebarang $q_1 + I, q_2 + I, q_3 + I \in R/I_{(Q)}$ dengan $q_1, q_2, q_3 \in Q$ berlaku :

a. $(q_1 + I) \oplus (q_2 + I) = q_4 + I$ dimana $q_1 + q_2 + I \subseteq q_4 + I$ untuk suatu $q_4 \in Q$, dan
b. $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = q_5 + I$ dimana $q_1 q_2 q_3 + I \subseteq q_5 + I$ untuk suatu $q_5 \in Q$.

Teorema 3.1[3]. *Misalkan I dan A masing – masing adalah ideal pada semiring ternari R dengan $I \subseteq A$. Jika I adalah Q-ideal pada semiring ternari R, maka pernyataan di bawah ini ekivalen.*

a. A adalah ideal perluasan subtraktif dari I
b. I adalah $A \cap Q$-ideal dari A
c. $A/I_{(A\cap Q)}$ adalah ideal pada semiring ternari faktor $R/I_{(Q)}$.

Bukti:

$(a) \Rightarrow (b)$ Jelas, dari lemma 3.1

$(b) \Rightarrow (c)$

(1) Ambil sebarang $a_1 + I, a_2 + I \in A/I_{(A\cap Q)}$ maka dari teorema 2.1 $\big((b) \Rightarrow (c)\big)$ diperoleh $(a_1 + I) \oplus (a_2 + I) \in A/I_{(A\cap Q)}$

(2) ambil sebarang $a + I \in A/I_{(A\cap Q)}$ dan $r + I, s + I \in R/I_{(Q)}$ dengan $a \in A \cap Q$,dan $r, s \in Q$. Setelah itu $(r + I) \odot (s + I) \odot (a + I) = (b + I)$ dimana $rsa + I \subseteq b + I$ untuk suatu $b \in Q$. Dengan demikian berlaku $rsa + i_1 = b + i_2$ untuk suatu $i_1, i_2 \in I$. Dikarenakan A adalah ideal pada semiring ternari R dengan $I \subseteq A$, sehingga diperoleh $rsa + i_1 \in A$ dan berakibat $b + i_2 \in A$. Dikarenakan I adalah $A \cap Q$-ideal dari A, menurut Lemma 3.1 diperoleh bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif dari I, sehingga dari $b + i_2 \in A$ diperoleh $b \in A$ dan berakibat $b \in A \cap Q$. Oleh karena itu $b + I \in A/I_{(A\cap Q)}$ atau $(r + I) \odot (s + I) \odot (a + I) \in A/I_{(A\cap Q)}$. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $(r + I) \odot (a + I) \odot (s + I) \in A/I_{(A\cap Q)}$ dan $(a + I) \odot (r + I) \odot (s + I) \in A/I_{(A\cap Q)}$

$(c) \Rightarrow (a)$ Jelas, Operasi Ideal perluasan subtraktif adalah operasi biner penjumlahan dan teorema 2.1 $(c) \Rightarrow (a)$

Teorema 3.2[3]. *Misalkan I adalah Q-ideal pada semiring ternari R maka himpunan L adalah ideal pada semiring ternari faktor $R/I_{(Q)}$ jika dan hanya jika terdapat ideal perluasan subtraktif A dari I dan $L = A/I_{(A\cap Q)}$ dimana* A=$\{x \in R \mid x + I \subseteq q + I \in L \text{ untuk suatu } q \in Q\}$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Dari teorema 2.2 maka berlaku

(i) $L = A/I_{(A\cap Q)}$
(ii) $I \subset A$
(iii) Jika $x, y \in A$ maka berlaku $x + y \in A$
(iv) Jika $x \in I$ dan $x + y \in A$ maka $y \in A$

Sehingga tinggal ditunjukkan syarat terhadap operasi terner perkalian agar Himpunan $A = \{x \in R \mid x + I \subseteq q + I \in L$ untuk suatu $q \in Q\}$ merupakan ideal perluasan subtraktif dari I dan $L = A/I_{(A \cap Q)}$.
Ambil $r, s \in R$ dan $a \in A$ artinya $a + I \subseteq q + I \in L$ untuk suatu $q \in Q$ maka $rsa + I \subseteq rsq + I \subseteq q^* + I$ untuk suatu $q^* \in Q$ dimana $(r + I)(s + I)(q + I) = q^* + I$. Karena $L = A/I_{(A \cap Q)}$ ideal pada semiring ternari faktor $R/I_{(Q)}$ dan $q + I \in L$ maka $(r + I)\,(s + I)\,(q + I) = q^* + I \in L$ sehingga $rsa + I \subseteq rsq + I \subseteq q^* + I \in L$ akibanya $rsa \in A$
($\Leftarrow$) Jelas menurut Teorema 3.1

Teorema 3.3[3] *Misalkan I adalah Q-ideal dan P adalah ideal perluasan subtraktif dari I pada semiring ternari R maka Ideal P adalah ideal prima pada semiring ternari R jika dan hanya jika ideal $P/I_{(P \cap Q)}$ merupakan ideal prima pada semiring ternari faktor $R/I_{(Q)}$.*
Bukti:
($\Rightarrow$)
Akan ditunjukkan bahwa ideal $P/I_{(P \cap Q)}$ merupakan ideal prima pada semiring $R/I_{(Q)}$ Ambil sebarang $q_1 + I, q_2 + I, q_3 + I \in R/I_{(Q)}$ dimana $q_1, q_2, q_3 \in Q$ yang memenuhi $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = (q_4 + I) \in P/I_{(P \cap Q)}$, dimana $q_1q_2q_3 + I \subseteq q_4 + I$ untuk suatu $q_4 \in P \cap Q$ sehingga berlaku $q_1q_2q_3 + i_1 = q_4 + i_2$ untuk suatu $i_1, i_2 \in I$. Dikarenakan ideal P adalah ideal pada semiring ternari R dengan $I \subseteq P$, sehingga dari $q_4 \in P$ dan $i_2 \in P$ diperoleh $q_4 + i_2 \in P$ dan berakibat $q_1q_2q_3 + i_1 \in P$. Dan juga dikarenakan ideal P adalah ideal perluasan subtraktif dari I, dengan demikian dari $q_1q_2q_3 + i_1 \in P$ diperoleh $q_1q_2q_3 \in P$ kemudian oleh karena ideal P adalah ideal prima pada semiring P, sehingga diperoleh $q_1 \in P$, $q_2 \in P$ atau $q_3 \in P$. Oleh karena itu $q_1 \in P \cap Q, q_2 \in P \cap Q$ atau $q_3 \in P \cap Q$ maka diperoleh $q_1 + I \in P/I_{(P \cap Q)}$, $q_2 + I \in P/I_{(P \cap Q)}$ atau $q_3 + I \in P/I_{(P \cap Q)}$.Dengan demikian terbukti bahwa ideal $P/I_{(P \cap Q)}$ merupakan ideal prima pada semiring ternari $R/I_{(Q)}$.
($\Leftarrow$)
Akan ditunjukkan bahwa ideal P adalah ideal prima pada semiring R. Ambil sebarang $abc \in P$ dengan $a, b, c \in R$. Telah diketahui bahwa I adalah $Q -$ ideal pada semiring R , dengan demikian terdapat secara tunggal $q_1, q_2, q_3, q_4 \in Q$ yang memenuhi $a \in q_1 + I$, $b \in q_2 + I$, $c \in q_3 + I$ dan $abc \in (q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = (q_4 + I)$ dimana $q_1q_2q_3 + I \subseteq q_4 + I$. Oleh karena $abc \in q_4 + I$, sehingga berlaku $abc = q_4 + i$ untuk suatu $i \in I$. Kemudian, karena $abc \in P$ didapatlah $q_4 + i \in P$. Sebagaimana diketahui bahwa P adalah ideal perluasan subtraktif dari I, dengan demikian dari $q_4 + i \in P$ diperoleh $q_4 \in P$ sehingga $q_4 \in P \cap Q$ dan berakibat $q_4 + I \in P/I_{(P \cap Q)}$. Dikarenakan ideal $P/I_{(P \cap Q)}$ adalah ideal prima pada semiring $R/I_{(Q)}$, oleh karenanya dari $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = (q_4 + I) \in P/I_{(P \cap Q)}$ diperoleh $a \in (q_1 + I) \in P/I_{(P \cap Q)}, b \in (q_1 + I) \in P/I_{(P \cap Q)}$ atau $c \in q_2 + I \in P/I_{(P \cap Q)}$ sehingga

(i) $a \in (q_1 + I) \in P/I_{(P \cap Q)}$ artinya $q_1 \in P \cap Q$ akibatnya $a = q_1 + i_1 \in P$
(ii) $b \in (q_2 + I) \in P/I_{(P \cap Q)}$ artinya $q_2 \in P \cap Q$ akibatnya $b = q_2 + i_1 \in P$
(iii) $c \in (q_3 + I) \in P/I_{(P \cap Q)}$ artinya $q_3 \in P \cap Q$ akibatnya $c = q_3 + i_1 \in P$

4 Kesimpulan

Pada pembahasan terlihat bahwa karakterisasi ideal, ideal perluasan subtraktif, ideal prima pada semiring faktor sama dengan karakterisasi ideal, ideal perluasan subtraktif, ideal prima pada semiring ternari faktor.

5 Pustaka

[1] Chaudhari, J. N and D. R. Bonde **“**Ideal Theory in Quotient Semirings “Thai Journal of Mathematics, Volume 12 Number 1: 95–101, 2014

[2] Chaudhari, J. N and Ingale K. J. “On Partioning and Subtractive Ideals of Ternary Semirings”. Kyungpook Math. Journal 51(1), Hal. 69-76, 2011

[3] Chaudhari, J. N. and Ingale K. J. ”Subtractive Extension of Ideals in Semirings “Thai Journal of Mathematics , Volume 14 Number 3 : 615–625, 2016

[4] Gupta, V and Chaudhari, J.N “Prime Ideals in Semirings”, Bull. Malays.SCI.Soc(2)34(2) 417-421,2011

[5] Setyawati, DW dan Soleha, "Bentuk – bentuk Ideal pada Semirings (Z^+,+,.) dan semiring (Z^+,$\oplus$,$\odot$)” pada Jurnal Sains dan Matematika Universitas Negeri Surabaya edisi Oktober 2014

[6] Setyawati, DW and Soleha ”On Some Types of Ideals in Semirings $(S_{nxn}(\mathbb{Z}_0^+), +, .)$ and Semiring $(S_{nxn}(\mathbb{Z}_0^+),\oplus,\odot)$ ”, International Mathematical Forum, Vol 11, 2016 , HIKARI Ltd,2016