

Konstruksi dan Analisis Dinamik Model Matematika Sistem Penangkapan Ikan (Studi Kasus Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong)

Nailul Izzati ¹*, Imamatul Ummah ²

^{1,2}Fakultas Teknik Universitas Hasyim Asy'ari Jombang Indonesia

e-mail: nailulizzati@unhasy.ac.id¹, imamatulummah@unhasy.ac.id²

Abstrak

Penangkapan ikan berlebihan di Laut Jawa menyebabkan populasi ikan terus menurun. Untuk menangani hal ini, diperlukan sosialisasi dan kajian terkait sistem penangkapan ikan. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi model matematika sistem penangkapan ikan yang mengacu pada kondisi Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong Kabupaten Lamongan. Model matematika yang telah dikonstruksi kemudian dianalisis kestabilannya dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa model matematika yang dikonstruksi memiliki tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan trivial, titik kesetimbangan tanpa penangkapan ikan dan titik kesetimbangan bioekonomis. Ketiga titik kesetimbangan yang diperoleh bersifat stabil bersyarat. Simulasi numerik menunjukkan bahwa tanpa tindakan penangkapan, populasi ikan dapat menjadi tidak seimbang, sedangkan penangkapan ikan yang tidak terkondisikan, yakni yang tidak memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan bioekonomis, dapat mengakibatkan kepunahan ikan.

Kata Kunci: analisis kestabilan, kriteria Routh-Hurwitz, model penangkapan ikan.

Abstract

Overfishing in Java Sea causes a great decline of the fish population. To deal with this problem, socialization and further study about fish harvesting system are required. The objective is to construct mathematical model of fish harvesting system that refers to the condition of Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong Kabupaten Lamongan. The constructed model are analyzed by Routh-Hurwitz criteria. The results showed that the model has three equilibriums, i.e. trivial, non-harvesting and bioeconomic ones. Those equilibriums are conditionally stable. Numerical simulations showed that without fish harvesting, the fish population could be unbalance, while the unconditioned fish harvesting could cause the fish extinction.

Keywords: fish harvesting model, stability analysis, Routh-Hurwitz criteria.

1 Pendahuluan

Laut Jawa memiliki potensi mencapai 836.000 ton per tahun. Eksploitasi terhadap potensi ikan di Laut Jawa dinilai berlebihan. Menurut Kepala Bidang Perikanan Tangkap Dinas Kelautan dan Perikanan Jawa Timur, Eryono, eksploitasi terhadap potensi ikan Laut Jawa telah mencapai 95 persen dari total populasi yang ada, sehingga hanya tersisa 5 persen bagi generasi yang akan

datang [1]. Di Kabupaten Lamongan, data kapal bongkar di Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong mencatat setidaknya 65.373 ton ikan ditangkap pada tahun 2017 oleh nelayan setempat [2], jumlah ini belum termasuk hasil tangkapan daerah lain.

Salah satu upaya pencegahan eksploitasi berlebihan terhadap sumber daya laut dilakukan pemerintah dengan mengeluarkan Peraturan Menteri Kelautan dan Perikanan Nomor 2 Tahun 2015 tentang larangan penggunaan alat tangkap pukat hela dan pukat tarik, termasuk di dalamnya adalah alat tangkap cantrang yang digunakan oleh mayoritas nelayan yang berlabuh di Brondong. Hingga tahun 2018, peraturan tersebut belum sepenuhnya dapat diterapkan karena nelayan merasa dirugikan secara sosial dan ekonomi. Oleh karena itu, diperlukan sosialisasi dan studi lebih lanjut tentang dampak penangkapan ikan secara berlebihan dan kajian solusinya.

Penelitian tentang perlindungan populasi ikan telah dilakukan dan masih terus dikembangkan dengan berbagai sudut pandang. Mulai dari dinamika kebijakan perikanan [3], dinamika oseanografi terhadap hasil tangkapan ikan [4] sampai pemodelan matematika kondisi stok ikan di perairan [5] dan penangkapan ikan. Berangkat dari model *predator-prey* Lotka-Volterra [6] dapat dibangun berbagai model matematika tentang penangkapan ikan. Diantaranya adalah model penangkapan ikan dengan fungsi respon yang bergantung pada *prey* [7], [8], dan *prey-dan-predator* [8], model penangkapan ikan di area perairan dilindungi [9], [10], model reaksi dinamis sistem *predator-prey* dengan tingkatan usia pada *predator* [11], [12], model biomatematis dengan pemilihan ikan tangkap [10], dan dampak aturan *maximum sustainable yield* pada sistem *predator-prey* [13].

Tujuan dari penelitian ini adalah mengkonstruksi sebuah model matematika yang menggambarkan sistem penangkapan ikan dengan mempertimbangkan adanya interaksi *predator-prey* bertingkat pada populasi ikan, serta hasil tangkapan ikan oleh nelayan. Analisis kestabilan kemudian dilakukan untuk mengetahui perilaku variabel-variabel pada sistem. Terakhir, dilakukan simulasi numerik untuk mengetahui perilaku sistem.

2 Metode Penelitian

Tahap-tahap yang dilakukan pada penelitian ini adalah konstruksi model, analisis kestabilan, dan simulasi numerik. Konstruksi model dilakukan dengan membentuk sistem persamaan diferensial yang merepresentasikan sistem penangkapan ikan oleh nelayan yang berlabuh di Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong Kabupaten Lamongan. Analisis kestabilan dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz [14]. Untuk melakukan analisis kestabilan, mula-mula dicari titik kesetimbangan sistem dan matriks Jacobinya. Titik kesetimbangan yang diperoleh kemudian disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi sehingga didapatkan persamaan karakteristik.

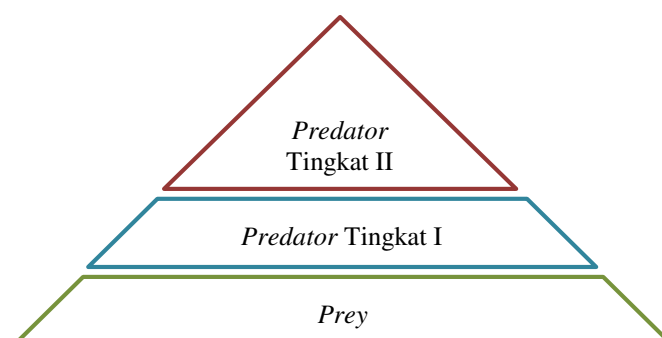
Dari koefisien-koefisien persamaan karakteristik dibentuk tabel kriteria Routh-Hurwitz. Titik kesetimbangan sistem disebut stabil jika tidak terdapat perubahan tanda pada kolom pertama tabel kriteria Routh-Hurwitz. Simulasi numerik dilakukan dengan metode Runge-Kutta Order Empat [15] dan menggunakan *software* MATLAB.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dibahas konstruksi model, analisis kestabilan dan simulasi numerik model matematika sistem penangkapan ikan oleh nelayan yang berlabuh di Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong.

3.1 Konstruksi Model

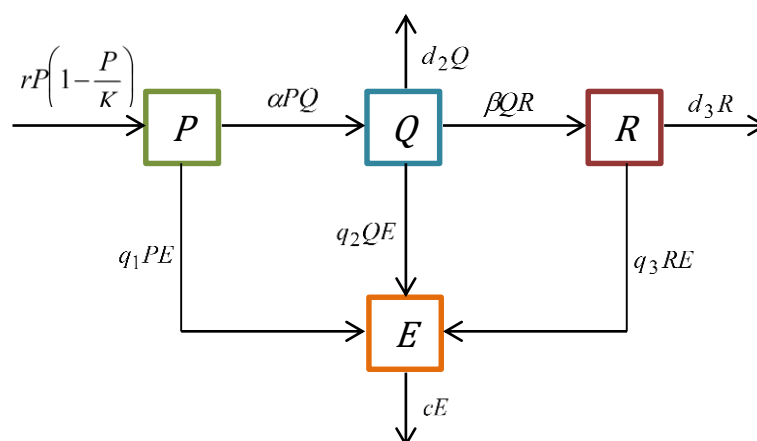
Menurut data kapal bongkar Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong, terdapat 35 jenis ikan hasil tangkapan nelayan yang menggunakan alat tangkap cantrang. 35 jenis ikan tersebut adalah Alu-alu/Kucul, TogeK/Ayam-ayam, Balak/Beloso, Banyar, Baronang/Sadar, Bawal Hitam/Dorang, Bentol/Lencam, Biji Nangka/Jenggol, Bukur/Jaket, Cucut, Cumi-cumi, Grobyak/Ikan Sebelah, Gulama/Tiga Wajah/Tetet, Kakap Merah/Bambangan, Kapasan, Kembung, Kerapu, Kerong-kerong/Kerok, Kuniran, Kurisi, Kwee Putih, Layang, Layur, Lemadang, Lemuru, Manyung, Mata Besar/Swanggi, Pari/Pe, Peperek/Dodok, Selar, Tembang/Juwi, Tenggiri, Tonang/Cendro/Remang, Tongkol, dan Campuran [16]. Jika jenis-jenis ikan tersebut diasumsikan terbagi menjadi tiga golongan, yaitu *prey*, *predator* tingkat I, dan *predator* tingkat II, maka posisi ketiganya dalam rantai makanan dapat diilustrasikan dengan Gambar 1. Semua jenis ikan yang berada di tingkatan paling bawah rantai makanan diasumsikan sebagai *prey*, yaitu TogeK, Balak, Banyar, Baronang, Bawal Hitam, Bentol, Biji Nangka, Bukur, Cumi-cumi, Gulama, Kapasan, Kembung, Kerong-kerong, Kuniran, Kurisi, Kwee Putih, Layang, Lemuru, Mata Besar, Peperek, Selar, Tembang, Tongkol, dan Campuran. Sedangkan semua jenis ikan yang memangsa *prey* diasumsikan sebagai *predator* tingkat I, yaitu Grobyak, Kakap Merah, Kerapu, Layur, Lemadang, dan Manyung. Dan semua jenis ikan yang memangsa *predator* tingkat I adalah *predator* tingkat II, yaitu Alu-alu, Cucut, Pari, Tenggiri, dan Tonang.



Gambar 1 Piramida Rantai Makanan

Model yang dikonstruksi mempertimbangkan empat buah variabel, yaitu populasi *prey* (P), *predator* tingkat I (Q), *predator* tingkat II (R), dan hasil penangkapan ikan (E). Berdasarkan studi literatur, pengumpulan data Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong dan hasil wawancara dengan nelayan sekitar, berikut adalah beberapa asumsi yang digunakan dalam konstruksi model:

1. Perubahan populasi *prey* dipengaruhi oleh persamaan logistik,
2. *Prey* adalah mangsa dari *predator* tingkat I, sedangkan *predator* tingkat I adalah mangsa dari *predator* tingkat II. Tidak terdapat kanibalisme dalam rantai makanan,
3. Terdapat kematian alami pada *predator* tingkat I dan tingkat II,
4. Ikan yang ditangkap oleh nelayan adalah semua jenis ikan (*prey*, *predator* tingkat I, dan *predator* tingkat II),
5. Laju penangkapan ikan diasumsikan sebagai rasio antara total tangkapan ikan per tahun dengan potensi ikan Laut Jawa per tahun,
6. Hasil penangkapan ikan merupakan selisih dari hasil penjualan ikan dan biaya operasional yang dibutuhkan untuk melaut, kedua hal ini dipengaruhi oleh *stiffness coefficient*,
7. Harga jual ikan diperoleh dari nilai rata-rata harga jual dari ketigapuluhlima jenis ikan tangkapan,
8. Biaya operasional dan waktu melaut diasumsikan sama untuk tiap keberangkatan kapal nelayan.

**Gambar 2** Diagram Kompartemen Model Matematika Sistem Penangkapan Ikan

Dengan mempertimbangkan asumsi-asumsi tersebut, dapat dibangun sistem persamaan diferensial yang menggambarkan sistem penangkapan ikan oleh nelayan Lamongan yang

diberikan oleh sistem persamaan (1)-(4). Interaksi antara keempat variabel pada model disajikan dengan diagram kompartemen pada Gambar 2.

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha PQ - q_1 PE, \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha PQ - d_1 Q - \beta QR - q_2 QE, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta QR - d_2 R - q_3 RE, \quad (3)$$

$$\frac{dE}{dt} = \gamma [p(q_1 P + q_2 Q + q_3 R) - c] E. \quad (4)$$

dengan

r : laju kelahiran *prey*,

K : *carrying capacity*,

α : laju pemangsaan *prey* oleh *predator* tingkat I,

β : laju pemangsaan *predator* tingkat I oleh *predator* tingkat II,

γ : *stiffness coefficient*,

d_1 : tingkat kematian alami *predator* tingkat I,

d_2 : tingkat kematian alami *predator* tingkat II,

q_1 : laju penangkapan *prey*,

q_2 : laju penangkapan *predator* tingkat I,

q_3 : laju penangkapan *predator* tingkat II,

p : harga jual ikan,

c : total biaya operasional yang dibutuhkan oleh nelayan untuk melaut.

3.2 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan dari sistem (1)-(4) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0. \text{ Penyelesaian persamaan } \frac{dP}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0 \text{ menghasilkan tiga}$$

titik keseimbangan dari sistem (1)-(4), yaitu titik keseimbangan trivial $T(0,0,0,0)$, titik

keseimbangan tanpa tindakan penangkapan ikan $T^0(P^0, Q^0, R^0, 0)$ dan titik keseimbangan bio-

ekonomis $T^*(P^*, Q^*, R^*, E^*)$, dengan

$$P^0 = \frac{K}{r} \left(r - \alpha \frac{d_2}{\beta} \right), \quad Q^0 = \frac{d_2}{\beta}, \quad R^0 = \frac{1}{\beta} \left(\alpha \frac{K}{r} \left(r - \alpha \frac{d_2}{\beta} \right) - d_1 \right),$$

$$P^* = \frac{K}{r} \left(r - \frac{\alpha}{\beta} (d_2 + q_3 E^*) - q_1 E^* \right), \quad Q^* = \frac{d_2 + q_3 E^*}{\beta},$$

$$R^* = \frac{\alpha K}{\beta r} \left(r - \frac{\alpha}{\beta} (d_2 + q_3 E^*) - q_1 E^* \right) - \frac{d_1}{\beta} - \frac{q_2}{\beta} E^*,$$

$$E^* = \frac{p(q_1 K \beta^2 r - q_1 K \alpha \beta d_2 + q_2 d_2 \beta r + q_3 \alpha K \beta r - q_3 \alpha^2 K d_2 - q_3 d_1 \beta r) - c \beta^2 r}{p(2q_3 q_1 \alpha \beta K + q_1^2 \beta^2 K + q_3^2 \alpha^2 K)}.$$

Titik kesetimbangan bioekonomis adalah titik kesetimbangan yang memungkinkan adanya aspek biologi dan ekonomi. Dalam hal ini, dimungkinkan adanya penangkapan ikan, namun populasi ikan tetap ada.

3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Matriks Jacobian dari sistem persamaan (1)-(4) diberikan oleh matriks (5),

$$J(P, Q, R, E) = \begin{bmatrix} j_1 & -\alpha P & 0 & -q_1 P \\ \alpha Q & j_2 & -\beta Q & -q_2 Q \\ 0 & \beta R & j_3 & -q_3 R \\ \gamma q_1 E & \gamma q_2 E & \gamma q_3 E & j_4 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

dengan

$$j_1 = r \left(1 - \frac{2P}{K} \right) - \alpha Q - q_1 E, \quad j_2 = \alpha P - d_1 - \beta R - q_2 E, \quad j_3 = \beta Q - d_2 - q_3 E,$$

$$j_4 = \gamma [p(q_1 P + q_2 Q + q_3 R) - c].$$

Untuk menganalisa kestabilan titik kesetimbangan, maka masing-masing titik kesetimbangan disubstitusikan ke matriks Jacobian.

Substitusi titik kesetimbangan trivial ke dalam matriks Jacobian (5) menghasilkan

$$J(0,0,0,0) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c\gamma \end{bmatrix},$$

Sehingga dengan menyelesaikan persamaan $|J(0,0,0,0) - \lambda I| = 0$ diperoleh persamaan karakteristik (6).

$$\lambda^4 + (-r + d_1 + d_2 + c\gamma)\lambda^3 + (-rd_1 - rd_2 - rc\gamma + d_1 d_2 + d_1 c\gamma + d_2 c\gamma)\lambda^2 + (-rd_1 d_2 - rcd_1 \gamma - rcd_2 \gamma + d_1 d_2 c\gamma)\lambda - rcd_1 d_2 \gamma = 0, \tag{6}$$

Tabel kriteria Routh-Hurwitz dari persamaan karakteristik (6) adalah

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^4 & A_0 & A_2 & A_4 \\ \lambda^3 & A_1 & A_3 & \\ \lambda^2 & B_1 & A_4 & \end{array},$$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^1 & C_1 \\ \lambda^0 & A_4 \end{array}$$

dengan

$$A_0 = 1, A_1 = -r + d_1 + d_2 + c\gamma, A_2 = -rd_1 - rd_2 - rc\gamma + d_1d_2 + d_1c\gamma + d_2c\gamma,$$

$$A_3 = -rd_1d_2 - rcd_1\gamma - rcd_2\gamma + d_1d_2c\gamma, A_4 = -rcd_1d_2\gamma, B_1 = \frac{A_1 \cdot A_2 - A_3}{A_1}, \text{ dan}$$

$$C_1 = \frac{B_1 \cdot A_3 - A_1 \cdot A_4}{B_1}.$$

Sehingga titik kesetimbangan trivial bersifat stabil jika $A_1 \geq 0, B_1 \geq 0, C_1 \geq 0$ dan $A_4 \geq 0$.

Substitusi titik kesetimbangan $T^0(P^0, Q^0, R^0, 0)$ ke dalam matriks Jacobian (5) menghasilkan matriks (7).

$$J(P^0, Q^0, R^0, 0) = \begin{bmatrix} j_{01} & -\frac{\alpha K}{r} \left(r - \alpha \frac{d_2}{\beta} \right) & 0 & -\frac{q_1 K}{r} \left(r - \alpha \frac{d_2}{\beta} \right) \\ \frac{\alpha d_2}{\beta} & j_{02} & -d_2 & -\frac{q_2 d_2}{\beta} \\ 0 & \alpha \frac{K}{r} \left(r - \alpha \frac{d_2}{\beta} \right) - d_1 & j_{03} & -\frac{q_3}{\beta} \left(\alpha \frac{K}{r} \left(r - \alpha \frac{d_2}{\beta} \right) - d_1 \right) \\ 0 & 0 & 0 & j_{04} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

dengan

$$j_{01} = -r + \frac{2\alpha d_2}{\beta}, \quad j_{02} = 0, \quad j_{03} = 0,$$

$$j_{04} = \frac{pq_1\gamma K r \beta^2 - pq_1\alpha\gamma K d_2\beta + pq_2\gamma d_2 r \beta + pq_3\alpha\gamma K r \beta - pq_3\alpha^2\gamma K d_2 - pq_3\gamma d_1 r \beta - \gamma c r \beta^2}{r\beta^2}.$$

Penyelesaian $|J(P^0, Q^0, R^0, 0) - \lambda I| = 0$ menghasilkan persamaan karakteristik (8).

$$\begin{aligned} & \lambda^4 - (j_{01} + j_{04})\lambda^3 + \left(j_{01}j_{04} + \alpha K d_2 - \frac{\alpha^2 K d_2^2}{r\beta} + d_1d_2 + \frac{\alpha^2 K d_2}{\beta} - \frac{\alpha^3 K d_2^2}{r\beta^2} \right) \lambda^2 \\ & + \left(\frac{\alpha^2 K d_2^2 j_{01}}{r\beta} - \alpha K d_2 j_{01} + d_1d_2 j_{01} - \alpha K d_2 j_{04} + \frac{\alpha^2 K d_2^2 j_{04}}{r\beta} + d_1d_2 j_{04} \right. \\ & \left. - \frac{\alpha^2 K j_{04} d_2}{\beta} + \frac{\alpha^3 K j_{04} d_2^2}{r\beta^2} \right) \lambda + \alpha K d_2 j_{01} j_{04} - \frac{\alpha^2 K d_2^2 j_{01} j_{04}}{r\beta} - d_1d_2 j_{01} j_{04} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

Tabel kriteria Routh-Hurwitz dari persamaan karakteristik (8) diberikan oleh tabel di bawah ini.

$$\begin{array}{l|lll} \lambda^4 & a_0 & a_2 & a_4 \\ \lambda^3 & a_1 & a_3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll} \lambda^2 & b_1 & b_2 \\ \lambda^1 & c_1 & c_2 \\ \lambda^0 & D_1 & \end{array}$$

dengan

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -j_{01} - j_{04}, \quad a_2 = j_{01}j_{04} + d_1d_2 + \alpha Kd_2 \left(1 - \frac{\alpha d_2}{r\beta} + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha^2 d_2}{r\beta^2} \right),$$

$$a_3 = -\alpha Kd_2 j_{01} - \alpha Kd_2 j_{04} + d_1d_2 j_{01} + d_1d_2 j_{04} + \frac{\alpha^2 Kd_2}{\beta} \left(\frac{d_2 j_{01}}{r} + \frac{d_2 j_{04}}{r} - j_{04} + \frac{\alpha j_{04} d_2}{r\beta} \right),$$

$$a_4 = d_2 j_{01} j_{04} \left(\alpha K - \frac{\alpha^2 Kd_2}{r\beta} - d_1 \right),$$

$$\begin{aligned} b_1 = \frac{1}{r\beta^2} & \left[-pq_1 \gamma K r^2 \beta^2 + pq_1 \alpha \gamma K d_2 r \beta - pq_2 \gamma d_2 r^2 \beta - pq_3 \alpha \gamma K r^2 \beta + pq_3 \alpha^2 \gamma K d_2 r + pq_3 \gamma d_1 r^2 \beta \right. \\ & + \gamma r^2 \beta^2 + 2d_1 d_2 r \beta^2 + \alpha^2 K d_2 r \beta - \alpha^3 K d_2^2 + 2pq_1 \alpha \gamma K d_2 r \beta - 2pq_1 \alpha^2 \gamma K d_2^2 + 2pq_2 \alpha \gamma d_2^2 r \\ & + 2pq_3 \alpha^2 \gamma K d_2 r - \frac{2pq_3 \alpha^3 \gamma K d_2^2}{\beta} - 2pq_3 \alpha \gamma d_1 d_2 r - 2\alpha \gamma d_2 r \beta + \frac{1}{\psi} \left\{ pq_1 \alpha^3 d_2^2 \gamma K^2 r \beta^2 \right. \\ & - pq_1 \alpha^4 K^2 d_2^3 \gamma \beta + pq_2 \alpha^3 K d_2^3 \gamma r \beta + pq_3 \alpha^4 K^2 d_2^2 \gamma r \beta - pq_3 \alpha^5 K^2 d_2^3 \gamma - pq_3 \alpha^3 K d_2^2 \gamma d_1 r \beta \\ & - \alpha^3 K d_2^2 \gamma r \beta^2 - \alpha^2 d_2 pq_1 \gamma K^2 r^2 \beta^3 + \alpha^3 K^2 d_2^2 r \beta^2 pq_1 \gamma - \alpha^2 K pq_2 \gamma d_2^2 r^2 \beta^2 \\ & \left. \left. - \alpha^3 K^2 d_2 r^2 \beta^2 pq_3 \gamma + \alpha^4 K^2 d_2^2 r \beta pq_3 \gamma + \alpha^2 K d_2 r^2 \beta^2 pq_3 \gamma d_1 + \alpha^2 K d_2 \gamma r^2 \beta^3 \right\} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi = & -r^2 \beta^2 + 2\alpha d_2 r \beta + pq_1 \gamma K r \beta^2 - pq_1 \alpha \gamma K d_2 \beta + pq_2 \gamma d_2 r \beta + pq_3 \alpha \gamma K r \beta - pq_3 \alpha^2 \gamma K d_2 \\ & - pq_3 \gamma d_1 r \beta - \gamma r \beta^2, \end{aligned}$$

$$b_2 = \alpha K d_2 j_{01} j_{04} - \frac{\alpha^2 K d_2^2 j_{01} j_{04}}{r\beta} - d_1 d_2 j_{01} j_{04},$$

$$c_1 = \frac{\left(-\alpha K d_2 r \beta^2 + d_1 d_2 r \beta^3 \alpha^2 K d_2^2 \right) (j_{01} + j_{04}) \left(1 - \frac{j_{01} j_{04} r \beta^2 \psi}{\xi \psi + \zeta} \right) + \alpha^2 K d_2 j_{04} (\alpha d_2 - r \beta)}{r\beta^2},$$

$$\begin{aligned} \xi = & -pq_1 \gamma K r^2 \beta^2 + pq_1 \alpha \gamma K d_2 r \beta - pq_2 \gamma d_2 r^2 \beta - pq_3 \alpha \gamma K r^2 \beta + pq_3 \alpha^2 \gamma K d_2 r + pq_3 \gamma d_1 r^2 \beta \\ & + \gamma r^2 \beta^2 + 2d_1 d_2 r \beta^2 + \alpha^2 K d_2 r \beta - \alpha^3 K d_2^2 + 2pq_1 \alpha \gamma K d_2 r \beta - 2pq_1 \alpha^2 \gamma K d_2^2 \\ & + 2pq_2 \alpha \gamma d_2^2 r + 2pq_3 \alpha^2 \gamma K d_2 r - \frac{2pq_3 \alpha^3 \gamma K d_2^2}{\beta} - 2pq_3 \alpha \gamma d_1 d_2 r - 2\alpha \gamma d_2 r \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta = & pq_1 \alpha^3 d_2^2 \gamma K^2 r \beta^2 - pq_1 \alpha^4 K^2 d_2^3 \gamma \beta + pq_2 \alpha^3 K d_2^3 \gamma r \beta + pq_3 \alpha^4 K^2 d_2^2 \gamma r \beta \\ & - pq_3 \alpha^5 K^2 d_2^3 \gamma - pq_3 \alpha^3 K d_2^2 \gamma d_1 r \beta - \alpha^3 K d_2^2 \gamma r \beta^2 - \alpha^2 d_2 pq_1 \gamma K^2 r^2 \beta^3 \\ & + \alpha^3 K^2 d_2^2 r \beta^2 pq_1 \gamma - \alpha^2 K pq_2 \gamma d_2^2 r^2 \beta^2 - \alpha^3 K^2 d_2 r^2 \beta^2 pq_3 \gamma \\ & + \alpha^4 K^2 d_2^2 r \beta pq_3 \gamma + \alpha^2 K d_2 r^2 \beta^2 pq_3 \gamma d_1 + \alpha^2 K d_2 \gamma r^2 \beta^3, \end{aligned}$$

$$c_2 = 0, \quad D_1 = \alpha K d_2 j_{01} j_{04} - \frac{\alpha^2 K d_2^2 j_{01} j_{04}}{r\beta} - d_1 d_2 j_{01} j_{04}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan sistem tanpa adanya penangkapan ikan $T^0(P^0, Q^0, R^0, 0)$ bersifat stabil jika pertidaksamaan (9), (10), (11) dan {(12) atau (13) atau (14)} berikut ini dipenuhi.

$$r^2 \beta^2 + p q_1 \alpha \gamma K d_2 \beta + p q_3 \alpha^2 \gamma K d_2 + p q_3 \gamma d_1 r \beta + \gamma c r \beta^2 \geq 2 \alpha d_2 r \beta + p q_1 \gamma K r \beta^2 + p q_2 \gamma d_2 r \beta + p q_3 \alpha \gamma K r \beta. \quad (9)$$

$$(\xi \psi + \zeta) \alpha^2 K d_2 j_{04} (\alpha d_2 - r \beta) \geq (\alpha K d_2 r \beta^2 - d_1 d_2 r \beta^3 \alpha^2 K d_2^2) (j_{01} + j_{04}) (\xi \psi + \zeta - j_{01} j_{04} r \beta^2 \psi). \quad (10)$$

$$\xi \psi + \zeta \geq 0. \quad (11)$$

$$2 \alpha d_2 \geq r \beta. \quad (12)$$

$$p q_1 \gamma K r \beta^2 + p q_2 \gamma d_2 r \beta + p q_3 \alpha \gamma K r \beta \geq p q_1 \alpha \gamma K d_2 \beta + p q_3 \alpha^2 \gamma K d_2 + p q_3 \gamma d_1 r \beta + \gamma c r \beta^2. \quad (13)$$

$$\alpha K r \beta \geq \alpha^2 K d_2 + d_1 r \beta. \quad (14)$$

Sedangkan substitusi titik kesetimbangan bioekonomis $T^*(P^*, Q^*, R^*, E^*)$ ke matriks Jacobian (5) menghasilkan matriks

$$J(P^*, Q^*, R^*, E^*) = \begin{bmatrix} j_{11}^* & j_{12}^* & j_{13}^* & j_{14}^* \\ j_{21}^* & j_{22}^* & j_{23}^* & j_{24}^* \\ j_{31}^* & j_{32}^* & j_{33}^* & j_{34}^* \\ j_{41}^* & j_{42}^* & j_{43}^* & j_{44}^* \end{bmatrix}, \quad (15)$$

dengan

$$j_{11}^* = r \left(1 - \frac{2P^*}{K} \right) - \alpha Q^* - q_1 E^*, \quad j_{12}^* = -\frac{\alpha K}{r} \left(r - \frac{\alpha}{\beta} (d_2 + q_3 E^*) - q_1 E^* \right), \quad j_{13}^* = 0,$$

$$j_{14}^* = -\frac{q_1 K}{r} \left(r - \frac{\alpha}{\beta} (d_2 + q_3 E^*) - q_1 E^* \right), \quad j_{21}^* = \frac{\alpha d_2 + q_3 \alpha E^*}{\beta}, \quad j_{22}^* = 0,$$

$$j_{23}^* = -d_2 - q_3 E^*, \quad j_{24}^* = \frac{-q_2 d_2 - q_2 q_3 E^*}{\beta}, \quad j_{31}^* = 0,$$

$$j_{32}^* = \frac{\alpha K}{r} \left(r - \frac{\alpha}{\beta} (d_2 + q_3 E^*) - q_1 E^* \right) - d_1 - q_2 E^*, \quad j_{33}^* = 0,$$

$$\begin{aligned}
 j_{34}^* &= -\frac{q_3 \alpha K}{\beta r} \left(r - \frac{\alpha}{\beta} (d_2 + q_3 E^*) - q_1 E^* \right) + \frac{q_3 d_1}{\beta} + \frac{q_2 q_3}{\beta} E^*, \\
 j_{41}^* &= \frac{\gamma q_1 (q_1 K \beta^2 r - q_1 K \alpha \beta d_2 + q_2 d_2 \beta r + q_3 \alpha K \beta r - q_3 \alpha^2 K d_2 - d_1 \beta r) - \gamma q_1 c \beta^2 r}{(q_1 K \alpha \beta q_3 + q_1^2 \beta^2 r K - q_2 q_3 \beta r + q_3^2 \alpha^2 K + q_3 q_1 \alpha \beta K + q_2 \beta r)}, \\
 j_{42}^* &= \frac{\gamma q_2 (q_1 K \beta^2 r - q_1 K \alpha \beta d_2 + q_2 d_2 \beta r + q_3 \alpha K \beta r - q_3 \alpha^2 K d_2 - d_1 \beta r) - \gamma q_2 c \beta^2 r}{(q_1 K \alpha \beta q_3 + q_1^2 \beta^2 r K - q_2 q_3 \beta r + q_3^2 \alpha^2 K + q_3 q_1 \alpha \beta K + q_2 \beta r)}, \\
 j_{43}^* &= \frac{\gamma q_3 (q_1 K \beta^2 r - q_1 K \alpha \beta d_2 + q_2 d_2 \beta r + q_3 \alpha K \beta r - q_3 \alpha^2 K d_2 - d_1 \beta r) - \gamma q_3 c \beta^2 r}{(q_1 K \alpha \beta q_3 + q_1^2 \beta^2 r K - q_2 q_3 \beta r + q_3^2 \alpha^2 K + q_3 q_1 \alpha \beta K + q_2 \beta r)}, \\
 j_{44}^* &= \gamma [p(q_1 P^* + q_2 Q^* + q_3 R^*) - c].
 \end{aligned}$$

Kemudian dari penyelesaian persamaan $|J(P^*, Q^*, R^*, E^*) - \lambda I| = 0$ dihasilkan persamaan karakteristik (16).

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0, \tag{16}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= 1, \quad \alpha_1 = -(j_{11}^* + j_{44}^*), \\
 \alpha_2 &= j_{11}^* j_{44}^* - j_{24}^* j_{42}^* - j_{23}^* j_{32}^* - j_{34}^* j_{43}^* - j_{12}^* j_{21}^* - j_{14}^* j_{41}^*, \\
 \alpha_3 &= j_{11}^* j_{24}^* j_{42}^* + j_{11}^* j_{23}^* j_{32}^* + j_{11}^* j_{34}^* j_{43}^* - j_{23}^* j_{34}^* j_{42}^* - j_{24}^* j_{32}^* j_{43}^* + j_{23}^* j_{32}^* j_{44}^* \\
 &\quad + j_{12}^* j_{21}^* j_{44}^* - j_{12}^* j_{24}^* j_{41}^* - j_{14}^* j_{21}^* j_{42}^*, \\
 \alpha_4 &= j_{11}^* j_{23}^* j_{34}^* j_{42}^* + j_{11}^* j_{24}^* j_{32}^* j_{43}^* - j_{11}^* j_{23}^* j_{32}^* j_{44}^* - j_{12}^* j_{23}^* j_{34}^* j_{41}^* \\
 &\quad + j_{12}^* j_{21}^* j_{34}^* j_{43}^* - j_{14}^* j_{21}^* j_{32}^* j_{43}^* + j_{14}^* j_{23}^* j_{32}^* j_{41}^*.
 \end{aligned}$$

Tabel kriteria Routh-Hurwitz untuk persamaan karakteristik (16) adalah sebagai berikut

$$\begin{array}{c|ccc}
 \lambda^4 & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\
 \lambda^3 & \alpha_1 & \alpha_3 & \\
 \lambda^2 & \beta_1 & \beta_2 & \\
 \lambda^1 & \chi_1 & \chi_2 & \\
 \lambda^0 & \delta_1 & &
 \end{array}$$

dengan

$$\beta_1 = \frac{\tau}{(j_{11}^* + j_{44}^*)},$$

$$\begin{aligned} \tau = & j_{11}^* j_{44}^* - j_{11}^* j_{24}^* j_{42}^* - j_{11}^* j_{23}^* j_{32}^* - j_{11}^* j_{34}^* j_{43}^* - j_{11}^* j_{12}^* j_{21}^* - j_{11}^* j_{14}^* j_{41}^* \\ & + j_{11}^* j_{44}^* - j_{24}^* j_{42}^* j_{44}^* - j_{23}^* j_{32}^* j_{44}^* - j_{34}^* j_{43}^* j_{44}^* - j_{12}^* j_{21}^* j_{44}^* - j_{14}^* j_{41}^* j_{44}^* \\ & + j_{11}^* j_{24}^* j_{42}^* + j_{11}^* j_{23}^* j_{32}^* + j_{11}^* j_{34}^* j_{43}^* - j_{23}^* j_{34}^* j_{42}^* - j_{24}^* j_{32}^* j_{43}^* + j_{23}^* j_{32}^* j_{44}^* \\ & + j_{12}^* j_{21}^* j_{44}^* - j_{12}^* j_{24}^* j_{41}^* - j_{14}^* j_{21}^* j_{42}^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & j_{11}^* j_{23}^* j_{34}^* j_{42}^* + j_{11}^* j_{24}^* j_{32}^* j_{43}^* - j_{11}^* j_{23}^* j_{32}^* j_{44}^* - j_{12}^* j_{23}^* j_{34}^* j_{41}^* \\ & + j_{12}^* j_{21}^* j_{34}^* j_{43}^* - j_{14}^* j_{21}^* j_{32}^* j_{43}^* + j_{14}^* j_{23}^* j_{32}^* j_{41}^*, \end{aligned}$$

$$\chi_1 = \frac{1}{\tau} [\tau \alpha_3 + \alpha_1^2 \beta_2], \chi_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \delta_1 = & j_{11}^* j_{23}^* j_{34}^* j_{42}^* + j_{11}^* j_{24}^* j_{32}^* j_{43}^* - j_{11}^* j_{23}^* j_{32}^* j_{44}^* - j_{12}^* j_{23}^* j_{34}^* j_{41}^* \\ & + j_{12}^* j_{21}^* j_{34}^* j_{43}^* - j_{14}^* j_{21}^* j_{32}^* j_{43}^* + j_{14}^* j_{23}^* j_{32}^* j_{41}^*. \end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan $T = (P^*, Q^*, R^*, E^*)$ adalah stabil jika memenuhi pertaksamaan (17)-(20).

$$j_{11}^* + j_{44}^* \leq 0. \quad (17)$$

$$\tau < 0. \quad (18)$$

$$\tau \alpha_3 + \alpha_1^2 \beta_2 \leq 0. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} j_{11}^* j_{23}^* j_{34}^* j_{42}^* + j_{11}^* j_{24}^* j_{32}^* j_{43}^* + j_{12}^* j_{21}^* j_{34}^* j_{43}^* + j_{14}^* j_{23}^* j_{32}^* j_{41}^* \geq \\ j_{11}^* j_{23}^* j_{32}^* j_{44}^* + j_{12}^* j_{23}^* j_{34}^* j_{41}^* + j_{14}^* j_{21}^* j_{32}^* j_{43}^*. \end{aligned} \quad (20)$$

3.4 Simulasi Numerik

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi numerik disajikan dalam Tabel 1. Dengan menggunakan nilai parameter-parameter tersebut, diperoleh titik kesetimbangan tanpa penangkapan ikan T^0 (0.9798, 6.2500e-004, 0.6111, 0) dan titik kesetimbangan bioekonomis T^* (0.9126, 0.1378, 0.5234, 1.8292). Melalui perhitungan MATLAB, diketahui bahwa nilai parameter-parameter pada Tabel 1 tidak memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan tanpa penangkapan ikan maupun titik kesetimbangan bioekonomis. Oleh karena itu, perilaku solusi sistem tidak akan stabil menuju titik kestabilan T^0 dan T^* .

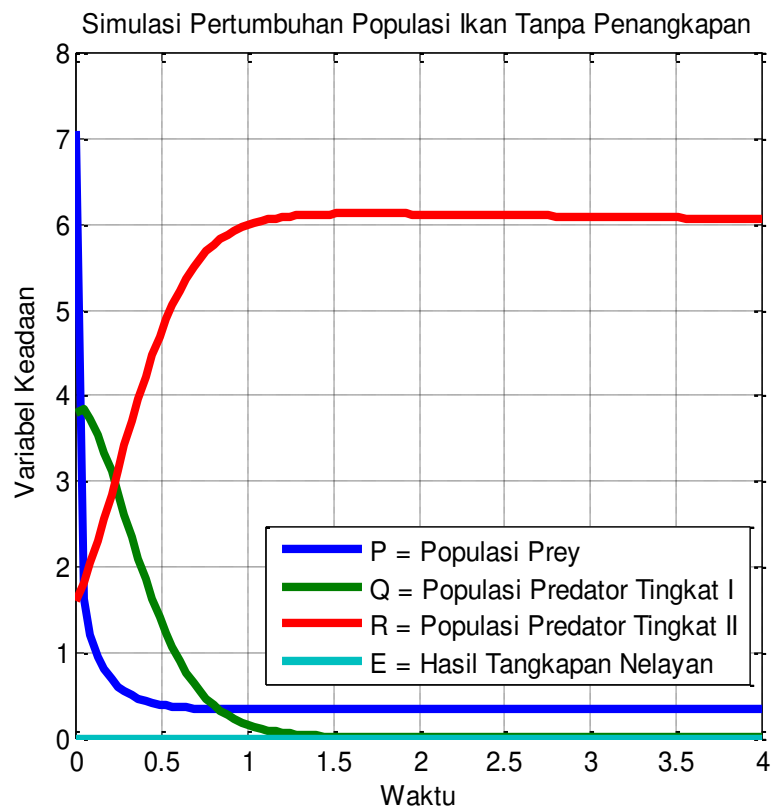
Tabel 1. Nilai Parameter dalam Simulasi Numerik

Parameter	Nilai
r	1.8
K	0.98

α	0.5
β	0.8
γ	0.25
d_1	0.001
d_2	0.0005
p	13

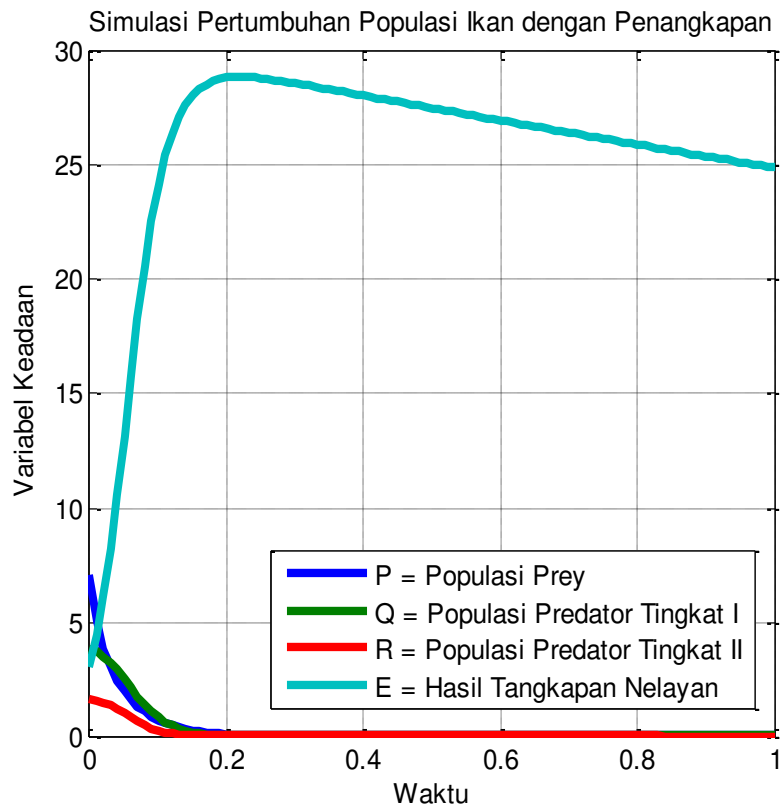
Tanpa adanya tindakan penangkapan ikan, tidak akan ada ikan yang tertangkap dan tidak ada biaya operasional yang dikeluarkan oleh nelayan. Oleh karena itu, pada simulasi model pertumbuhan populasi ikan tanpa penangkapan, digunakan nilai parameter $q_1 = q_2 = q_3 = c = 0$. Pada simulasi tanpa penangkapan ikan, digunakan kondisi awal dari populasi *prey* adalah 7.1, populasi *predator* tingkat I adalah 3.8, populasi *predator* tingkat II adalah 1.6, dan hasil tangkapan nelayan adalah 0. Gambar 3 menunjukkan perilaku solusi sistem (1)-(4) tanpa adanya penangkapan ikan. Tanpa adanya penangkapan ikan, populasi *predator* tingkat I terus menurun sampai akhirnya mencapai nilai nol. Populasi *predator* tingkat II setelah mengalami peningkatan dari populasi awal menjadi 6.1322, mengalami penurunan sampai mencapai 6.0678. Populasi *prey* yang setelah mengalami penurunan, mengalami peningkatan dari nilai 0.3307 menjadi 0.3399. Sedangkan hasil tangkapan nelayan, konstan bernilai nol.

Perilaku solusi sistem pada Gambar 3 disebabkan oleh nilai parameter $\beta > \alpha$. Oleh karena laju pemangsaan *predator* tingkat II terhadap *predator* tingkat I (β) adalah lebih besar daripada laju pemangsaan *predator* I terhadap *prey* (α). Maka tanpa adanya penangkapan ikan, populasi *predator* tingkat II sebagai pemangsa yang menempati posisi paling tinggi pada piramida makanan, menjadi maksimal. Akibatnya, populasi *predator* tingkat I, sebagai mangsa dari *predator* tingkat II, menjadi semakin menurun. Dengan penurunan populasi *predator* tingkat I, populasi *prey* mengalami peningkatan.

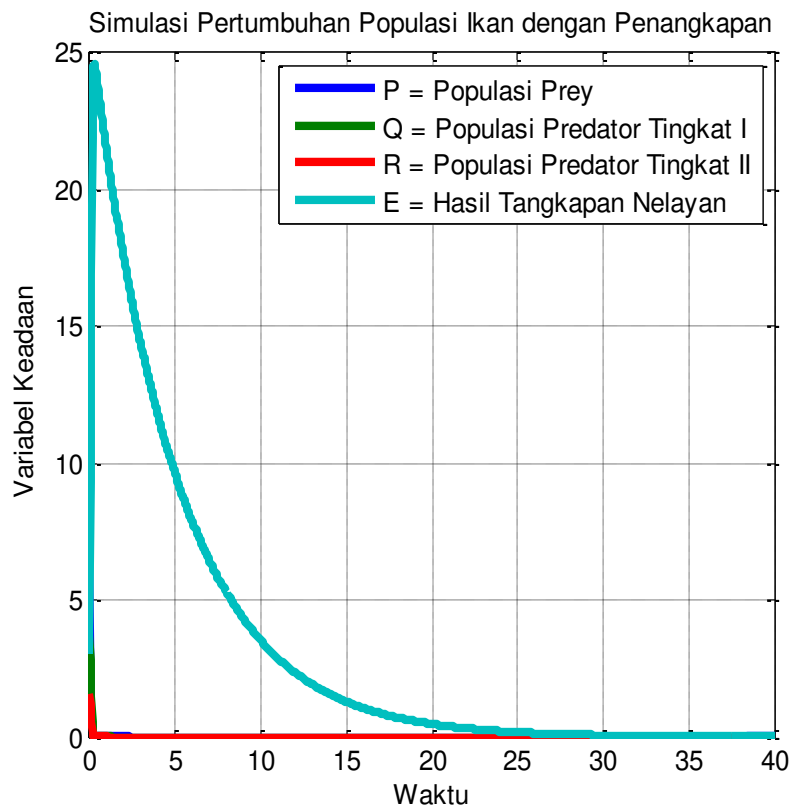


Gambar 3 Simulasi Pertumbuhan Populasi Ikan Tanpa Adanya Penangkapan

Dalam simulasi model dengan penangkapan ikan, digunakan kondisi awal populasi *prey*, *predator* tingkat I, dan tingkat II yang sama, yaitu 7.1, 3.8, dan 1.6, tetapi dengan hasil tangkapan nelayan mula-mula yang berbeda, yaitu $E_0 = 3$, dan nilai parameter $q_1 = 0.03$, $q_2 = 0.02$, $q_3 = 0.06$, $c = 0.8$.



(a)



(b)

Gambar 4 Simulasi Pertumbuhan Populasi Ikan dengan Penangkapan Oleh Nelayan

Gambar 4 menunjukkan perilaku solusi sistem (1)-(4) dengan penangkapan. Adanya penangkapan ikan oleh nelayan, dengan tingkat tertangkapnya ikan sebesar 3% untuk *prey*, 2% untuk *predator* tingkat I, dan 6% untuk *predator* tingkat II, mengakibatkan populasi semua ikan, baik *prey*, *predator* tingkat I dan II mengalami penurunan sampai akhirnya mencapai titik nol dan hasil tangkapan nelayan mencapai nilai tertinggi $E = 24.6218$. Ketiadaan stok ikan, mengakibatkan tidak adanya tangkapan ikan. Hal ini ditunjukkan oleh grafik nilai E yang terus menurun dan akhirnya mencapai titik nol.

4 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

- Sistem penangkapan ikan dengan mempertimbangkan interaksi *predator-prey* bertingkat dan pendapatan nelayan dapat dimodelkan secara matematis.
- Model matematika yang dibangun mempunyai tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan trivial, titik kesetimbangan tanpa adanya penangkapan ikan dan titik kesetimbangan bioekonomis. Ketiga titik kesetimbangan bersifat stabil bersyarat.
- Hasil simulasi menunjukkan bahwa tidak adanya penangkapan ikan dapat mengakibatkan ketidakseimbangan populasi ikan yang ditandai oleh kepunahan *predator* tingkat I yang mengakibatkan kepunahan *predator* tingkat II. Sedangkan penangkapan ikan yang tidak terkondisikan, yakni yang tidak memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan bioekonomis, dapat mengarah ke kepunahan seluruh populasi ikan.
- Penelitian selanjutnya dapat membahas strategi penangkapan ikan yang optimal agar populasi ikan dapat terjaga dan berkembangbiak secara optimal. Selain itu, pada penelitian selanjutnya dapat digunakan parameter-parameter yang mengacu pada data sesungguhnya.

5 Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih dihaturkan kepada Kepala Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong beserta staf, dan para nelayan pesisir Lamongan yang telah memberikan informasi terkait sistem penangkapan ikan, alat tangkap dan hasil tangkapan ikan di kawasan setempat.

6 Daftar Pustaka

- [1] H. Hazliansyah dan O. Lukmansyah, *Pemanfaatan Potensi Ikan Laut Jawa Melampaui Batas*. Dipetik 11 April 2017, dari Republika Online: <http://www.republika.co.id/berita/nasional/daerah/15/03/24/nlpkty-pemanfaatan-potensi->

- ikan-laut-jawa-melebihi-batas, 24 Maret 2015.
- [2] D. Sutisna, *Profil Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong Tahun 2017*. PPN Brondong, 2018.
- [3] S. K. Widodo, “Dinamika Kebijakan Tentang Perikanan dan Transformasi Budaya Nelayan Pantai Utara Jawa,” *Sabda*, vol. 6, no. 1, pp. 30-39, 2011.
- [4] K. I. Suniada, F. Islamy, A. J. Saputra, S. Hadianti, R. M. P. Mahardhika, dan E. Susilo, “Dinamika Oseanografi Terhadap Hasil Tangkapan Ikan Pelagis PPN Pengambangan dari Data Satelit MODIS,” *Prosiding Seminar Nasional Penginderaan Jauh 2015*, 2015.
- [5] S. B. Susilo, “Kondisi Stok Ikan Perairan Pantai Selatan Jawa Barat,” *Jurnal Ilmu-ilmu Perairan dan Perikanan Indonesia*, vol. 16, no. 1, pp. 39-46, 2009.
- [6] J. Murray, *Mathematical Biology I: An Introduction*. Springer, 2002.
- [7] S. Chakraborty, S. Pal, dan N. Bairagi, “Predator-Prey Interaction with Harvesting: Mathematical Study with Biological Ramifications,” *Applied Mathematical Modelling* 36, pp. 4044-4059, 2012.
- [8] N. C. Apreutesei. “An Optimal Control Problem for a Prey-Predator System with a General Functional Response,” *Applied Mathematics Letters* 22, pp. 1062-1065, 2009.
- [9] L. Yunfei, R. Yuan, dan Y. Pei, “A Prey-Predator Model with Harvesting for Fishery Resource with Reserve Area,” *Applied Mathematical Modelling* 37, pp. 3048-3062, 2013.
- [10] B. Mondal, “Bio-mathematical Prey-Predator Model with Marine Protect Area (MPA) and Harvesting,” *International Journal of Scientific & Engineering Research*, vol. 5, issue 9, pp. 858-868, 2014.
- [11] S. K. Chattopadhyay dan T. K. Kar, “A Dynamic Reaction Model of a Prey-predator System with Stage-structure for Predator,” *Modern Applied Science*, pp. 183-195, 2010.
- [12] K. Chakraborty, M. Chakraborty dan T. K. Kar, “Optimal Control of Harvest and Bifurcation of a Prey-Predator Model with Stage Structure,” *Applied Mathematics and Computation* 217, pp. 8778-8792, 2011.
- [13] T. K. Kar dan B. Gosh, “Impacts of Maximum Sustainable Yield Policy to Prey-predator Systems,” *Ecological Modelling* 250, pp. 134-142. 2013.
- [14] Subiono, *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2013.
- [15] D. K. Chaturvedi, *Modeling and Simulation of Systems Using MATLAB and Simulink*. CRC Press, 2010.
- [16] Tim Rekap Data PPN Brondong, *Data Kapal Bongkar Pelabuhan Perikanan Nusantara Brondong Januari 2018 (WPP 712)*. PPN Brondong, 2018.