Jurnal Barekeng
Vol. 8 No. 2 Hal. 33 – 39 (2014)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan
© Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2014

# KLASIFIKASI *NEAR-RING*
*Classifications of Near Ring*

**ELVINUS RICHARD PERSULESSY**
*Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, poka-Ambon
E-mail: richardelvinus@yahoo.com

## ABSTRAK

Sebagimana pada grup dan ring, struktur-struktur baru yang berkaitan dengan keduanya dapat dibentuk dengan menambahkan ciri-ciri baru pada kedua struktur tersebut. Ciri-ciri baru inilah yang berperan dalam membentuk klasifikasi grup dan ring. *Near-ring* sebagai salah satu struktur yang terbentuk dari ring mengalami hal yang sama. Penelitian ini bertujuan untuk memperkenalkan jenis-jenis *near-ring* yang berperan dalam mengklasifikasi *near-ring* dan karakteristik yang timbul sebagai akibatnya, terutama yang berkaitan dengan ketunggalan elemen identitas dan invers.

**Kata kunci:** *Klasifikasi, Near-ring, Ring*.

## PENDAHULUAN

Himpunan $R \neq \varnothing$ disebut ring jika terhadap operasi penjumlahan $R$ merupakan grup abelian, terhadap operasi pergandaan $R$ tertutup dan asosiatif serta pada R berlaku sifat distributif. Jika $N \neq \varnothing$ adalah himpunan yang memiliki semua syarat untuk menjadi ring kecuali sifat komutatif dan distributif kiri, maka $N$ disebut *near-ring*.

*Near-ring* memiliki banyak sifat yang diperoleh dengan cara membandingkan sifat-sifat yang ada dalam ring. Sifat-sifat tersebut bisa saja sama dengan sifat-sifat yang ada dalam ring, namun ada juga yang sangat berbeda. Perbedaan dan persamaan sifat inilah yang membentuk klasifikasi pada *near-ring* yang akan dibahas dalam penelitian ini.

## TINJAUAN PUSTAKA

Dalam perkembangan Matematika Aljabar khususnya teori ring, L. Dickson memperkenalkan konsep *near-field*. Konsep ini membicarakan tentang lapangan yang hanya memenuhi salah satu dari sifat distribusi (distribusi kiri atau distibusi kanan). Selanjutnya, sekitar tahun 1930, Wietlandt menggunakan konsep ini untuk menyusun syarat-syarat untuk mengembangkan konsep *near-ring* [2].

Dalam bukunya yang berjudul "*Near-Rings*", Günter Pilz memberikan pemahaman mendasar tentang *near-ring* melalui definisi dan contoh. Ia juga membandingkan sifat-sifat yang ada dalam ring untuk disesuaikan dalam konsep *near-ring* dan menghasilkan sifat-sifat yang baru. [2]

**Definisi 1.**
Diberikan $G \neq \varnothing$. Pada $G$ didefinisikan operasi biner $"*"$. $G$ disebut grup terhadap terhadap operasi biner $"*"$ jika memenuhi sifat

a. Tertutup $(\forall g_1, g_2 \in G)\ \ g_1 * g_2 \in G$.
b. Asosiatif
$(\forall g_1, g_2, g_3 \in G)\ \ (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$.
c. Ada elemen netral
$(\exists e \in G)(\forall g \in G)\ \ e * g = g * e = g$.
d. Setiap elemen memiliki invers
$(\forall g \in G)(\exists\, g^{-1} \in G)\ g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

Himpunan $G$ yang membentuk grup terhadap operasi $"*"$ yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan $(G, *)$.

**Definisi 2.**
Misalkan $(G, *)$ adalah grup. $G$ disebut grup abelian jika memenuhi sifat komutatif, yaitu

$$(\forall g_1, g_2 \in G)\ \ g_1 * g_2 = g_2 * g_1$$

**Definisi 3.**
Himpunan $S \neq \varnothing$ merupakan semigrup terhadap operasi biner "$*$" jika memenuhi sifat

a. Tertutup $(\forall s_1, s_2 \in S)$ $s_1 * s_2 \in S$.
b. Asosiatif
$(\forall s_1, s_2, s_3 \in S)$ $(s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3)$.

Himpunan $S$ yang membentuk semigrup terhadap operasi "$*$" yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan $(S, *)$.

**Definisi 4.**
Diberikan himpunan $R \neq \varnothing$ . Pada $R$ didefinisikan operasi-operasi biner "$+$" dan "$\cdot$". Himpunan $R$ disebut ring terhadap kedua operasi biner tersebut, jika :

I. Terhadap operasi "$+$", $(R, +)$ adalah grup abelian.
II. Terhadap operasi "$\cdot$" memenuhi sifat
  i). Tertutup $(\forall a, b \in R)$ $a \cdot b \in R$.
  ii). Asosiatif $(\forall a, b, c \in R)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
III. i). Distributif Kiri
  $(\forall a, b, c \in R)$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
  ii). Distributif Kanan
  $(\forall a, b, c \in R)$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Himpunan $R$ yang membentuk ring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan $(R, +, \cdot)$.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### *Near-Ring*

**Definisi 5.**
Diberikan himpunan $N \neq \varnothing$ . Pada $N$ didefinisikan operasi-operasi biner "$+$" dan "$\cdot$". Himpunan $N$ disebut *near-ring* terhadap kedua operasi biner tersebut, jika memenuhi :

i). $(N, +)$ adalah grup.
ii). $(N, \cdot)$ adalah semigrup.
iii). Distributif kanan
$(\forall a, b, c \in N)$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Himpunan $N$ yang membentuk *near-ring* terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan $(N, +, \cdot)$.

Contoh 1:
Misalkan $(G, +)$ grup, maka $F(G) = \{f : G \to G\}$ (himpunan semua fungsi dari $G$ ke $G$) merupakan *near-ring* terhadap operasi penjumlahan dan komposisi fungsi dengan aturan sebagai berikut :
$(\forall f, g \in F(G))$ $(\forall x \in G)$
i). $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
ii). $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

**Bukti**
I. $(F(G), +)$ grup.

a. Tertutup
Ambil sebarang $f, g \in F(G)$.
Akan ditunjukkan $f + g \in F(G)$.
$f \in F(G) \Leftrightarrow f(x) \in G$ dan
$g \in F(G) \Leftrightarrow g(x) \in G$.
$f + g \in F(G) \Leftrightarrow (f + g)(x) \in G$
Ambil sebarang $x \in G$, maka
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Karena $f(x) \in G$, $g(x) \in G$ dan $G$ grup maka $f(x) + g(x) \in G$.
Karena $f(x) + g(x) \in G$ maka $(f + g)(x) \in G$ atau $f + g \in F(G)$.

b. Asosiatif
Ambil sebarang $f, g, h \in F(G)$.
Akan ditunjukkan $(f + g) + h = f + (g + h)$.
Ambil sebarang $x \in G$, maka
$$\begin{aligned}[(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= [f + (g + h)](x)\end{aligned}$$
Berdasarkan sifat kesamaan dua fungsi maka terbukti $(f + g) + h = f + (g + h)$.

c. Terdapat elemen netral
Ambil sebarang $f \in F(G)$.
Akan ditunjukkan terdapat $g \in F(G)$ sehingga $f + g = g + f = f$.
Ambil sebarang $x \in G$ maka
$(f + g)(x) = f(x)$
$f(x) + g(x) = f(x)$
karena $f(x) \in G$ dan $G$ grup maka $-f(x) \in G$.
$$\begin{aligned}-f(x) + f(x) + g(x) &= -f(x) + f(x) 0 + g(x) \\ 0 + g(x) &= 0 \\ g(x) &= 0 \\ g(x) &= O(x) \quad ,\end{aligned}$$
dimana $(\forall x \in G)$ $O(x) = 0$.
Menurut kesamaan dua fungsi diperoleh $g = O$.
Bukti untuk $g + f = f$ sejalan.

d. Setiap elemen punya invers

Ambil sebarang $f \in F(G)$.

Akan ditunjukkan terdapat $f^{-1} \in F(G)$ sehingga $f + f^{-1} = f^{-1} + f = O$.

Ambil sebarang $x \in G$ maka

$$\left(f + f^{-1}\right)(x) = O(x)$$

$$f(x) + f^{-1}(x) = O(x)$$

$$f(x) + f^{-1}(x) = 0$$

karena $f(x) \in G$ dan $G$ grup maka $-f(x) \in G$.

$$-f(x) + f(x) + f^{-1}(x) = -f(x) + 0$$

$$f^{-1}(x) = -f(x)$$

Menurut kesamaan dua fungsi diperoleh $f^{-1} = -f$.

Bukti untuk $f^{-1} + f = O$ sejalan.

II. $(F(G), \circ)$ semigrup.

a. Tertutup

Ambil sebarang $f, g \in M(G)$.

Akan ditunjukkan $f \circ g \in F(G)$.

$f \in F(G) \Leftrightarrow f(x) \in G$ dan

$g \in F(G) \Leftrightarrow g(x) \in G$.

$f \circ g \in F(G) \Leftrightarrow (f \circ g)(x) \in G$

Ambil sebarang $x \in G$ maka

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Karena $g(x) \in G$ maka $f[g(x)] \in G$.

Karena $f[g(x)] \in G$ maka $(f \circ g)(x) \in G$ atau $f \circ g \in F(G)$.

b. Asosiatif

Ambil sebarang $f, g, h \in F(G)$.

Akan ditunjukkan $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Ambil sebarang $x \in G$ maka

$$\begin{aligned}[(f \circ g) \circ h](x) &= (f \circ g)[h(x)] \\ &= f[g(h(x))] \\ &= f[(g \circ h)(x)] \\ &= [f \circ (g \circ h)](x)\end{aligned}$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua fungsi maka terbukti $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

III. Distributif Kanan

Ambil sebarang $f, g, h \in F(G)$.

Akan ditunjukkan $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

Ambil sebarang $x \in G$, maka

$$\begin{aligned}[(f + g) \circ h](x) &= (f + g)[h(x)] \\ &= f[h(x)] + g[h(x)] \\ &= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) \\ &= [f \circ h + g \circ h](x)\end{aligned}$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua fungsi maka terbukti $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

Berdasarkan I, II dan III terbukti bahwa $(F(G), +, \circ)$ *near-ring*.

Pada contoh ini distributif kiri tidak berlaku karena

$$\begin{aligned}[f \circ (g + h)](x) &= f[(g + h)(x)] \\ &= f[g(x) + h(x)]\end{aligned}$$

Namun, belum tentu

$$f[g(x) + h(x)] = f[g(x)] + f[h(x)].$$

Terlihat bahwa fungsi $f$ harus linier atau homomorfisma agar memenuhi kondisi di atas.

Contoh 2:

Telah diketahui bahwa $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ dan $(\mathbb{Z}, +)$ masing-masing merupakan grup. Berdasarkan Contoh 1, maka dapat diperoleh $(F(\mathbb{R}), +, \circ)$, $(F(\mathbb{Q}), +, \circ)$ dan $(F(\mathbb{Z}), +, \circ)$ masing-masing merupakan *near-ring*.

Contoh 3:

Berdasarkan Contoh 1 juga dapat diperoleh bahwa

$$F_0(G) = \{f : G \to G \mid f(0) = 0\}$$

merupakan *near-ring* terhadap operasi penjumlahan "+" dan komposisi "$\circ$" fungsi.

Contoh 4:

Diberikan $(G, +)$ grup. Pada $G$ didefinisikan operasi "$\cdot$" sebagai berikut

$$(\forall a, b \in G)\ a \cdot b = a$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(G, +, \cdot)$ merupakan *near-ring*.

**Bukti**

I. $(G, +)$ grup.

Jelas dari yang diketahui.

II. $(G, \cdot)$ semigrup

a. Tertutup

Ambil sebarang $a, b \in G$.

Akan ditunjukkan $a \cdot b \in G$.

Karena $a \cdot b = a$ dan $a \in G$ maka terbukti $a \cdot b \in G$.

b. Asosiatif
Ambil sebarang $a,b,c \in G$.
Akan ditunjukkan $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot b \\ &= a \cdot (b \cdot c)\end{aligned}$$

III. Distributif kanan
Ambil sebarang $a,b,c \in G$.
Akan ditunjukkan $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

$$\begin{aligned}(a+b) \cdot c &= a+b \\ &= a \cdot c + b \cdot c\end{aligned}$$

Berdasarkan I, II dan III terbukti bahwa $(G,+,\cdot)$ *near-ring*.

Contoh 5:
Jelas bahwa semua ring pasti merupakan *near-ring*.

**Sifat-sifat Dasar *Near-ring***

Pada bagian ini akan dibahas sifat-sifat dasar dari *near-ring* yang berkaitan dengan elemen netral dan invers terhadap penjumlahan.

**Teorema 1.**
Jika $N$ *near-ring* dan 0 elemen netral terhadap penjumlahan, maka $(\forall a, b, c \in N)$ berlaku

i). $-(a+b) = -b-a$.
ii). $0 \cdot a = 0$.
iii). $(-a)b = -ab$.
iv). $(a-b)c = ac - bc$

Tiga bagian pertama dari Teorema 1 di atas memperlihatkan perbedaan antara ring dan *near-ring*. Bagian pertama muncul karena pada *near-ring* tidak berlaku sifat abelian, sedangkan pada bagian kedua dan ketiga belum tentu berlaku $a \cdot 0 = 0$ dan $a(-b) = -ab$. Hal ini dapat diperlihatkan dengan contoh berikut.

Contoh 6:
Telah diketahui $(M(\mathbb{R}),+,\circ)$ *near-ring*.
Ambil $f, O \in (M(\mathbb{R}),+,\circ)$
dimana $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$f(x) = 3x+2 \text{ dan } O(x) = 0.$$

Selanjutnya,

$$(f \circ O)(x) = f[O(x)] = f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \neq O(x)$$

Contoh 7:
Telah diketahui $(M(\mathbb{R}),+,\circ)$ *near-ring*.
Ambil sebarang $f,\ g \in (M(\mathbb{R}),+,\circ)$
dimana $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$f(x) = x^2 \text{ dan } g(x) = x+2.$$

$$\begin{aligned}[f \circ (-g)](x) &= f[-g(x)] \\ &= f[-(x+2)] \\ &= f[-x-2] \\ &= (-x-2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4\end{aligned}$$

sedangkan,

$$\begin{aligned}-[f \circ g](x) &= -f[g(x)] \\ &= -f(x+2) \\ &= -(x+2)^2 \\ &= -(x^2+4x+4) \\ &= -x^2 - 4x - 4\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $f \circ (-g) \neq -(f \circ g)$. Untuk kasus ini fungsi *f* haruslah merupakan fungsi ganjil agar berlaku

$$f \circ (-g) = -(f \circ g).$$

Berdasarkan kasus pada Contoh 6 maka muncul definisi berikut.

**Definisi 6.**
Diberikan $(N,+,\cdot)$ *near-ring*.
Himpunan $N_0 = \{a \in N \mid a0 = 0\}$ disebut simetris nol bagian dari *N*.
Jika $N = N_0$ maka *N* disebut simetris nol.

Contoh 8:
Telah diketahui $F(G)$ *near-ring*, maka

$$F_0(G) = \{f : G \to G \mid f(0) = 0\}$$

merupakan simetris nol bagian dari $F(G)$.

Contoh 9:
Jelaslah bahwa semua ring pasti merupakan simetris nol.

**Klasifikasi *Near-ring***

Berdasarkan definisi *near-ring* dapat dilihat bahwa untuk menjadi *near-ring*, himpunan *N* tidak harus memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "+" dan "$\cdot$" serta tidak harus mempunyai elemen satuan terhadap operasi "$\cdot$". Pada bagian ini akan membahas lebih jauh tentang jenis-jenis *near-ring*.

Mengawali bagian ini akan diberikan definisi penting tentang near-ring abelian.

**Definisi 7.**
Suatu *near-ring* *N* dikatakan *near-ring* abelian jika *N* memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "+", yaitu

$$(\forall a, b \in N)\ a+b = b+a$$

Contoh 10:
Telah diketahui $\left(F(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ dan $\left(F(\mathbb{Z}),+,\cdot\right)$ adalah *near-ring*. Terhadap operasi "+" , R dan Z juga memenuhi sifat komutatif, maka $\left(F(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ dan $\left(F(\mathbb{Z}),+,\cdot\right)$ merupakan *near-ring* abelian.

**Definisi 8**
Suatu *near-ring* $N$ dikatakan *near-ring* distributif jika $N$ memenuhi sifat distributif kiri, yaitu

$$(\forall a, b, c \in N)\ a(b+c) = ab+ac$$

Contoh 11:
Himpunan $F_0(G)=\{f : G \to G \mid f(0)=0\}$ merupakan *near-ring* distributif.

**Bukti**
Dari Contoh 3 telah diketahui bahwa $F_0(G)$ merupakan *near-ring*.
Akan ditunjukkan pada $F_0(G)$ berlaku sifat distributif kiri atau

$$(\forall f, g, h \in F_0(G))\ f \circ (g+h) = (f \circ g)+(f \circ h)$$

Ambil sebarang $f, g, h \in F_0(G)$.

$$\begin{aligned}
\left[f \circ (g+h)\right](0) &= f\left[(g+h)(0)\right] \\
&= f\left[g(0)+h(0)\right] \\
&= f(0+0) \\
&= f(0) \\
&= 0 \\
&= 0+0 \\
&= f(0)+f(0) \\
&= f(g(0))+f(h(0)) \\
&= [f \circ g](0)+[f \circ h](0) \\
&= \left[(f \circ g)+(f \circ h)\right](0)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat kesamaan dua fungsi maka terbukti

$$f \circ (g+h) = (f \circ g)+(f \circ h).$$

Contoh 12:
Jelaslah bahwa setiap ring pasti merupakan *near-ring* distributif.

**Definisi 9**
Suatu *near-ring* $N$ dikatakan *near-ring* komutatif jika $N$ memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "$\cdot$", yaitu

$$(\forall a, b \in N)\ ab = ba$$

Contoh 13:
Himpunan

$$F_0(G)=\{f : G \to G \mid f(0)=0\}$$

merupakan *near-ring* komutatif.

Contoh 14:
$(Z,+,\cdot)$, $(Q,+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ merupakan *near-ring* komutatif dengan "+" dan "$\cdot$" beruturut-turut adalah operasi penjumlahan dan pergandaan pada himpunan Z, Q, R dan C.

Karena *near-ring* dikembangkan dari ring, maka terdapat hubungan antara dua struktur tersebut. Hal ini akan diperlihatkan oleh teorema berikut .

**Teorema 2.**
Misalkan $(N,+,\cdot)$ *near-ring*.

i). $N$ abelian dan komutatif jika dan hanya jika $N$ ring komutatif.
ii). $N$ abelian dan distributif jika dan hanya jika $N$ ring.
iii). Jika $N$ distributif dan $N \cdot N = N$ maka $N$ ring

**Bukti**

i). $\Rightarrow$). Diketahui $N$ *near-ring* abelian dan komutatif.
Akan ditunjukkan $N$ ring komutatif
Karena $N$ *near-ring* abelian maka cukup ditunjukkan bahwa pada $N$ berlaku sifat distributif kiri atau $(\forall a,b,c \in N)\ a(b+c) = ab+ac$
Ambil sebarang $a,b,c \in N$.
Karena $N$ *near-ring* maka berlaku sifat distributif kanan

$$(b+c)a = ba+ca$$

Karena $N$ *near-ring* komutatif maka
$(b+c)a = a(b+c)$ dan $ba+ca = ab+ac$
Jadi diperoleh $a(b+c) = ab+ac$.
Karena pada $N$ berlaku sifat abelian dan distributif kiri maka terbukti bahwa $N$ ring. Karena $N$ *near-ring* komutatif maka terbukti bahwa $N$ ring komutatif.

$\Leftarrow$). Diketahui $N$ ring komutatif.
Akan ditunjukkan $N$ *near-ring* abelian dan komutatif.
Karena $N$ ring komutatif maka jelas bahwa $N$ *near-ring* abelian dan komutatif.

ii). $\Rightarrow$). Diketahui $N$ *near-ring* abelian dan distributif.
Akan ditunjukkan $N$ ring.
Karena $N$ distributif maka pada $N$ berlaku sifat distributif kiri.
Karena pada $N$ berlaku sifat abelian dan distributif kiri maka terbukti bahwa $N$ ring.

$\Leftarrow$). Diketahui $N$ ring.
Akan ditunjukkan $N$ *near-ring* abelian dan distributif .

Karena *N* ring maka jelas terbukti bahwa *N near-ring* abelian dan distributif.

iii). Diketahui *N* distributif dan $N \cdot N = N$.
Akan ditunjukkan *N* ring.
Akan digunakan bagian ii). di atas untuk membuktikannya.
Telah diketahui bahwa *N* distributif maka tinggal dibuktikan bahwa *N* abelian.
Ambil sebarang $m, n \in N$.
Harus ditunjukkan bahwa $m+n = n+m$.
Karena $m, n \in N$ dan $N \cdot N = N$ maka

$$(\exists\, a,b,c,d \in N)\; m = ab \text{ dan } n = cd.$$

Selanjutnya,

$$(a+c)(d+b) = ad + ab + cd + cb$$

dan

$$(a+c)(d+b) = ad + cd + ab + cb$$

sehingga

$$ad + ab + cd + cb = ad + cd + ab + cb$$

$$(-ad) + ad + ab + cd + cb + (-bc)$$
$$= (-ad)ad + cd + ab + cb + (-bc)$$
$$ab + cd = cd + ab$$
$$m + n = n + m$$

Terbukti bahwa *N* abelian.
Jadi, karena pada *N* berlaku sifat abelian dan distributif kiri maka terbukti *N* ring.

**Definisi 10.**
Diberikan *N near-ring*.

i). $e \in N$ disebut elemen satuan kiri terhadap operasi pergandaan jika $(\forall a \in N)\; ea = a$.

ii). $e \in N$ disebut elemen satuan kanan terhadap operasi pergandaan jika $(\forall a \in N)\; ae = a$.

iii). $e \in N$ disebut elemen satuan terhadap operasi pergandaan jika $(\forall a \in N)\; ea = ae = a$

**Definisi 11.**
Suatu *near-ring N* dikatakan *near-ring* dengan elemen satuan jika *N* memuat elemen netral terhadap operasi pergandaan, yaitu

$$(\exists\, e \in N)(\forall a \in N)\; ae = ea = a$$

Contoh 15:
Elemen satuan pada *near-ring* $F(G)$ adalah fungsi identitas *e*, yakni $e(x) = x$ , $\forall x \in G$.

Contoh 16
$(Z,+,\cdot)$, $(Q,+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ dan $(\mathbb{C},+,\cdot)$ adalah *near-ring* dengan elemen satuan 1.
Pada *near-ring* elemen satuan belum tentu tunggal dan bisa saja yang dimiliki hanya elemen satuan kiri atau elemen satuan kanan. Contoh berikut akan memperlihatkan hal tersebut.

Contoh 17:
Berdasarkan contoh 4 telah diketahui bahwa $(G,+,\cdot)$ *near-ring*.
Ambil $a,b,c \in G$ dimana $b \neq c$.
Dengan menggunakan operasi pergandaan yang telah didefinisikan diperoleh

$$ab = a \text{ dan } ac = a$$

Terlihat bahwa *b* dan *c* merupakan elemen satuan kanan dari *a* namun $b \neq c$.
Terlihat juga bahwa *G* tidak memiliki elemen satuan kiri karena $(\nexists\, e \in G)(\forall a \in G)\; ea = a$.

Teorema berikut memperlihatkan hubungan antara elemen satuan dan sifat abelian pada *near-ring* serta menunjukkan kondisi yang harus dipenuhi oleh *N* agar *N* abelian.

**Teorema 3**
Diberikan $(N,+,\cdot)$ *near-ring* dengan elemen satuan *e*. Jika $(\forall n \in N)\; n(-e) = -n$ maka *N* abelian.

**Bukti**
Diketahui $(N,+,\cdot)$ *near-ring* dan $(\forall n \in N)\; n(-e) = -n$.
Akan ditunjukkan *N* abelian atau

$$(\forall m,n \in N)\; m+n = n+m.$$

Ambil sebarang $m,n \in N$.

$$m+n = [(-m)(-e)] + [(-n)(-e)]$$
$$= (-m-n)(-e)$$
$$= -(-m-n)$$
$$= n+m$$

Karena $m+n = n+m$ maka terbukti *N* abelian.

**Teorema 4.**
Jika *N near-ring* dengan elemen satuan *e* dan $a \in N$ maka

i). $(-e)a = -a$

ii). $(-e)(-e) = e$

**Bukti**

i). Akan ditunjukkan $-a = (-e)a$ atau invers dari *a* adalah $(-e)a$.

$$a + (-e)a = e \cdot a + (-e)a$$
$$= (e + (-e))a$$
$$= 0 \cdot a$$
$$= 0$$

Jadi $a + (-e)a = 0$ atau $(-e)a = -a$.

ii). Dari i). ambil $a = -e$ diperoleh

$$(-e)(-e) = -(-e)$$
$$= e$$

**Definisi 12.**
Misalkan *N near-ring* dengan elemen satuan *e* dan $a \in N$ .

i). $s \in N$ disebut invers kiri dari *a* terhadap operasi pergandaan jika $s\,a = e$ .

ii). $s \in N$ disebut invers kanan dari *a* terhadap operasi pergandaan jika $a\,s = e$ .

iii). $s \in N$ disebut invers dari *a* terhadap operasi pergandaan jika $s\,a = a\,s = e$ .

Invers perkalian dari *a* dinotasikan dengan $a^{-1}$.

Pada *near-ring* invers terhadap pergandaan juga belum tentu tunggal. Hal ini akan diperlihatkan dengan contoh berikut.

Contoh 18
Berdasarkan Contoh 4 telah diketahui bahwa $(G,+,\cdot)$ *near-ring*.
Ambil $a,b,c,d \in G$ dimana $c \neq d$ .
Karena $a\,b = a$ maka dapat dikatakan bahwa *b* merupakan elemen satuan kanan dari *a*. Selanjutnya,

$$b\,c = b \text{ dan } b\,d = b$$

Terlihat bahwa *c* dan *d* merupakan invers kanan dari *a* namun $c \neq d$ .

**Teorema 5.**
Diberikan $(N,+,\cdot)$ *near-ring* dengan elemen satuan *e* dan $a,b \in N$ . Jika *a* dan *b* masing-masing mempunyai invers maka *ab* juga mempunyai invers yaitu $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

**Bukti**
Akan ditunjukkan $(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = e$ .

$$(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = a\left(bb^{-1}\right)a^{-1}$$
$$= a\,e\,a^{-1}$$
$$= aa^{-1}$$
$$= e$$

Karena $(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = e$ maka terbukti $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

## KESIMPULAN

1. Posisi elemen netral pada pergandaan sebarang elemen dengan elemen netral sangat menentukan apakah hasilnya elemen netral atau bukan.
2. Ciri khusus yang ditambahkan pada suatu *near-ring* membentuk jenis *near-ring* yang baru. Hal inilah sangat membantu dalam mengklasifikasikan *near-ring*.
3. Elemen identitas dan invers suatu elemen tidak tunggal.

## DAFTAR PUSTAKA

A. Adkins, William, dkk. *Algebra*. (1992) Springer. New York.

Pilz, Günter. (1983) *Near-Rings*. North-Holland. New York.

Abbasi, S. Jaban. Iqbal, Kahkashan. (2007). *On Near-Integral Domain*. Technology Forces. Pakistan