Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 2 Hal. 41 – 46 (2013)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

IDENTIFIKASI STRUKTUR DASAR SMARANDACHE *NEAR-RING*

Identification of Basic Structure on Smarandache Near-Ring

YOHANA YUNET BAKARBESSY[1], HENRY W. M. PATTY[2] , ELVINUS R. PERSULESSY[3]

[1]*Mahasiswa JurusanMatematika FMIPA UNPATTI*

[2,3]*JurusanMatematika FMIPA UNPATTI*

Jl. Ir. M. Putuhena, KampusUnpatti, Poka-Ambon, Maluku

e-mail: henrywmpatty81@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas identifikasi struktur-struktur tersebut melalui definisi dan teorema dengan tahapan sebagai berikut : mengidentifikasi struktur ring dan perkembangannya seperti lapangan, near-ring dan near-field, mengidentifikasi struktur dasar Smarandache near-ring yang dibangun oleh near-ring dengan himpunan bagian sejatinya near-field, mengidentifikasi struktur dasar Smarandache near-ring lainnya berdasarkan perkembangan struktur dasar Smarandache near-ring. Hasil penelitian menunjukkan bahwa struktur Smarandache near-ring dapat juga teridentifikasi lewat himpunan yang merupakan Grup near-ring atas near-field Z_2 atau Z_p lainnya.

Kata kunci: *near-field, near-ring, Smarandache near-ring.*

PENDAHULUAN

Dalam salah satu klasifikasi aljabar yaitu aljabar abstrak, dipelajari struktur aljabar seperti grup dan ring yang didefinisikan dan diajarkan secara aksiomatis. Seiring berjalannya waktu, struktur grup maupun struktur ring terus mengalami perkembangan. Terlihat ketika aksioma-aksioma lain ditambahkan atau bahkan dilepas dari aksioma pembentukan struktur grup maupun ring maka muncul struktur aljabar baru. Misalnya dari grup, dikembangkan menjadi semigrup, sedangkan dari ring dikembangkan menjadi semiring juga lapangan (*field*).

Selain semiring dan lapangan, jika sifat komutatif terhadap $"+"$ dan sifat distributif kiri dilepas dari syarat terbentuknya ring, maka akan muncul struktur baru yang disebut "*Near-ring"*. Hal ini membuat ada beberapa perbedaan sifat antara *near-ring* dan ring, sehingga kajian tentang *near-ring* tetap menjadi topik yang menarik untuk diteliti.

Dalam perkembangannya, studi tentang *near-ring* tidak terlepas dari *near-field*, karena *near-field* dibentuk dari penambahan sifat identitas dan invers pada operasi pergandaan di *near-ring* sehingga *near-ring* dan *near-field* masing-masing memiliki karakteristik yang khusus.

Selanjutnya, jika dipunyai suatu *near-ring* dengan himpunan bagiannya yang *near-field* akan membuat struktur *near-ring* tersebut memiliki sifat atau karakteristik yang dikenal dengan nama *Smarandache near-ring*. Jadi, secara aljabar suatu himpunan N merupakan *Smarandache near-ring* jika memenuhi $(N,+,\cdot)$ *near-ring* dan $A \subset N$, dengan $(A,+,\cdot)$ *near-field*.

Berdasarkan uraian di atas, maka peneliti merasa tertarik untuk mempelajari dan membahas lebih dalam struktur dasar dari *Smarandache near-ring*.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam perkembangan aljabar abstrak, Florentin Smarandache menyusun konsep struktur aljabar khusus, yaitu suatu himpunan yang memiliki himpunan bagian sejati dengan struktur yang diperluas. Seperti konsep semigrup khusus yang membicarakan tentang semigrup dengan himpunan bagian sejatinya grup, konsep ring khusus yang membicarakan tentang ring dengan himpunan bagian sejatinya lapangan (Florentin Smarandache, 2000).

Oleh Padilla (1998) beberapa konsep ini diikuti dan diperkenalkan dengan nama struktur aljabar Smarandache, yang juga membicarakan konsep semigrup khusus yang kemudian diperkenalkan dengan nama

Smarandache semigrup, juga konsep ring khusus yang diperkenalkan dengan nama Smarandache ring.

Setelah menggabungkan konsep Smarandache ring dengan konsep ring, Vasantha Kandasamy kemudian memperkenalkan beberapa konsep baru dalam Smarandache ring yang sama sekali tidak dibahas oleh Padilla, dan menuangkannya dalam buku yang berjudul "Smarandache Ring" (W.B.V.Kandasamy, 2002).

Di tahun yang sama, Kandasamy kemudian menyusun lagi konsep *Smarandache near-ring* yang idenya berasal dari konsep Smarandache ring. Konsep ini berisi *near-ring* dengan himpunan bagian sejatinya *near-field*. *Near-ring* dan *near-field* masing-masing adalah salah satu perkembangan struktur ring dan lapangan. Oleh Kandasamy, konsep *Smarandache near-ring* diuraikan melalui beberapa definisi dan contoh.

Berdasarkan sumber tersebut dan didukung beberapa literatur lainnya, peneliti mencoba menyusun penelitian tentang identifikasi struktur dasar *Smarandache near-ring*.

Definisi 1 (*Near-ring*)
Diberikan himpunan $N \neq \emptyset$. Pada N didefinisikan operasi-operasi biner $"+"$ dan $"."$. Himpunan N disebut *near-ring* terhadap kedua operasi biner tersebut, jika memenuhi :
i) $(N,+)$ adalah grup.
ii) $(N,\cdot)$ adalah semigrup.
iii) Distributif Kanan
$$(\forall\, a,b,c\ \in N)(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$
Himpunan N terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya disebut *near-ring* dan dinotasikan dengan $(N,+,\cdot)$.

Contoh 1
Diberikan $(G,+)$ grup. Pada G didefinisikan operasi $"\cdot"$ sebagai berikut
$$(\forall a,b \in G\,)a\cdot b = a$$
Dapat ditunjukkan bahwa $(G,+,\cdot)$ merupakan *near-ring*.

Definisi 2 (*near-ring* abelian)
Suatu *near-ring* N dikatakan *near-ring* abelian jika N memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "+", yaitu
$$(\forall\, a,b,\in N)\ a+b = b+a$$

Contoh 2
Telah diketahui $M_{2\times 2} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\ \in \mathbb{R}\right\}$ terhadap operasi penjumlahan matriks biasa merupakan grup abelian dan $(M_{2\times2}\,,+,\cdot)$ memenuhi aksioma pembentukan *near-ring*, maka diperoleh $(M_{2\times2}\,,+,\cdot)$ merupakan *near-ring* abelian.

Definisi 3 (*near-ring* distributif)
Suatu *near-ring* N dikatakan *near-ring* distributif jika N memenuhi sifat distributif kiri, yaitu
$$(\forall\, a,b,c\ \in\ N)\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

Contoh 3
$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ merupakan *near-ring* distributif dengan $"+"$ dan $"\cdot"$ adalah operasi penjumlahan dan pergandaan pada himpunan $\mathbb{Z}$.

Definisi 4 (*near-ring* komutatif)
Suatu *near-ring* N dikatakan *near-ring* komutatif jika N memenuhi sifat komutatif terhadap operasi ".", yaitu
$$(\forall\, a,b\ \in\ N)\ a\cdot b = b\cdot a$$

Contoh 4
$(\mathbb{Z},+,\cdot), (\mathbb{Q},+,\cdot), (\mathbb{R},+,\cdot), (\mathbb{C},+,\cdot)$ merupakan *near-ring* komutatif dengan $"+"$ dan $"\cdot"$ berturut-turut adalah operasi penjumlahan dan pergandaan pada himpunan $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, dan $\mathbb{C}$.

Definisi 5
Diberikan $(N,+,\cdot)$ *near-ring*.
i) Elemen $e \in N$ disebut elemen satuan kiri terhadap operasi pergandaan jika
$$(\forall\, a \in N)\ ea = a$$
ii) Elemen $e \in N$ disebut elemen satuan kanan terhadap operasi pergandaan jika
$$(\forall\, a \in N)\ ae = a$$
iii) Elemen $e \in N$ disebut elemen satuan terhadap operasi pergandaan jika
$$(\forall\, a \in N)\ ea = ae = a$$

Definisi 6 (*near-ring* dengan elemen satuan)
Suatu *near-ring* N dikatakan *near-ring* dengan elemen satuan jika N memuat elemen satuan terhadap operasi pergandaan, yaitu
$$(\exists\, e \in N)\ (\forall\, a \in N) ae = ea = a$$

Contoh 5
$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ merupakan *near-ring* dengan elemen satuan 1.

Definisi 7
Misalkan $(N,+,\cdot)$ *near-ring* dengan elemen satuan e dan $a \in N$.
i) Elemen $s \in N$ disebut invers kiri dari a terhadap operasi pergandaan jika
$$sa = e$$
ii) Elemen $s \in N$ disebut invers kanan dari a terhadap operasi pergandaan jika
$$as = e$$
iii) Elemen $s \in N$ disebut invers dari a terhadap operasi pergandaan jika
$$sa = as = e$$
Invers dari a terhadap operasi pergandaan dinotasikan dengan a^{-1}.

Definisi 8 (*near-field*)
Near-ring $(M,+,\cdot)$ disebut *near-field*, jika
i) $(M,+,\cdot)$ adalah *near-ring* dengan elemen satuan
ii) Setiap elemen tak nol di M mempunyai invers terhadap pergandaan di M
$$(\forall\, a \in M)\ [a \neq 0 \Rightarrow (\exists a^{-1} \in M)\ aa^{-1} = a^{-1}a = e]$$

Contoh 6
Diberikan $\mathbb{R}^2 = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$ merupakan *near-field* terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan untuk setiap $a,b \in \mathbb{R}^2$ sebagai berikut :
i) $(a_1,\ a_2) + (b_1,\ b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
ii) $(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2) = (a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2)$

Definisi 9 (*subnear-ring*)
Diberikan $(N,+,\cdot)$ *near-ring* dan $(S,+)$ adalah subgrup dari *N*. *S* disebut *subnear-ring* jika memenuhi
$$S.S \subseteq S \text{ atau } (\forall a,b \in S) a.b \in S$$

Contoh 7
Diberikan$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ *near-ring*. $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ merupakan sub*near-ring* dari $\mathbb{Z}$.

Definisi 10
Diberikan $(N,+,\cdot)$ *near-ring* dan *I* adalah subgrup normal dari *N*.
i) *I* disebut ideal kanan dari *N* jika memenuhi $I.N \subseteq I$ atau $(\forall\, i \in I)\ (\forall a \in N) i.a \in I$
ii) *I* disebut ideal kiri dari *N* jika memenuhi $(\forall\, a,b \in N)\ (\forall i \in I)\ a(b+i) - ab \in I$
iii) *I* disebut ideal dari *N* jika *I* merupakan ideal kanan dan ideal kiri dari *N*.

Definisi 11
Diberikan $(G,\cdot)$ grup dan himpunan $N \neq \emptyset$. Dengan himpunan N adalah *near-ring* dengan elemen satuan dan komutatif atau himpunan N adalah *near-field*. NG adalah Grup *near-ring* dengan semua penjumlahan biasa yang berhingga dengan bentuk $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ dengan $\alpha_i \in N$ dan $g_i \in G$ jika memenuhi :
i) $\sum \alpha_i g_i = \sum \beta_i g_i \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$, dengan $\alpha_i,\ \beta_i \in N$
ii) $\sum \alpha_i g_i + \sum \beta_i g_i = \sum (\alpha_i + \beta_i)\, g_i$
iii) $\alpha_i g_i = g_i \alpha_i$
iv) $(\sum \alpha_i g_i)(\sum \beta_j h_j) = \sum[(\sum \alpha_i \beta_j) g_i h_j]$
Diasumsikan $1 \cdot g = g,\ \forall\, g \in G$

Contoh 8
Diberikan $Z_2 = \{0,1\}$ *near-field* dan $G = \langle g | g^2 = 1 \rangle$. Z_2G adalah grup *near-ring* dari grup G atas *near-field* Z_2.

Definisi 12
Diberikan $\{N_i\}$ adalah keluarga *near-ring* $(i \in I, I = \{1,2,\ldots,r\})$. $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_r = \times N_i$ yang didefinisikan terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan disebut *direct product* atas *near-ring* N_i.

Contoh 9
Diberikan $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ merupakan ring. $N = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(z,z) | z \in \mathbb{Z}\}$ terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan merupakan *near-ring*. Maka *N* *direct product* atas *near-ring* $\mathbb{Z}$.
Penyelesaian:
Karena $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ merupakan ring, jelas $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ juga merupakan *near-ring* sehingga $N = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(z,z) | z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan *near-ring*. Maka *N* *direct product* atas *near-ring* $\mathbb{Z}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Smarandache Near-ring

Definisi 13
Diberikan himpunan $N \neq \emptyset$ dengan A himpunan bagian sejati dari N atau ($A \subset N$ dan $A \neq N$). Pada N didefinisikan operasi-operasi biner "$+$" dan "$\cdot$". Himpunan N disebut *Smarandache near-ring (S-near-ring)* terhadap kedua operasi biner tersebut, jika memenuhi :
i) $(N,+,\cdot)$ adalah *near-ring*.
  a. $(N,+)$ adalah grup.
  b. $(N,\cdot)$ adalah semigrup.
  c. Distributif Kanan
  $(\forall\, a,b,c \in N)(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$
ii) $(A,+,\cdot)$ adalah *near-field*.
  a. $(A,+)$ adalah grup.
  b. $(A \setminus \{0\},\ \cdot)$ adalah grup.
  c. Distributif Kanan
  $(\forall\, a,b,c \in A)(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

Contoh 10
Diberikan $(Z_n,+,\cdot)$ ring dan $(Z_2,+,\cdot)$ *near-field* terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan modulo n. Himpunan Z_n dengan $n > 2$ merupakan *S-near-ring* dengan Z_2 merupakan himpunan bagian sejati dari Z_n atau ($Z_2 \subset Z_n$ dan $Z_2 \neq Z_n$).
Penyelesaian:
Jelas $Z_2 \subset Z_n$ dan $Z_2 \neq Z_n$, dengan $n > 2$.
i) $(Z_n,+,\cdot)$ *near-ring*
Karena $(Z_n,+,\cdot)$ ring, maka $(Z_n,+,\cdot)$ juga *near-ring* sehingga Z_n dengan $n > 2$ merupakan *near-ring.*

ii) $(Z_2,+,\cdot)$ *near-field*
I. $(Z_2,+)$ grup

Tabel 1 $(Z_2,+)$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa $(Z_2,+)$ memenuhi semua aksioma grup dengan elemen netral 0.

II. $(Z_2 \setminus \{0\},\cdot)$ grup

Tabel 2 $(Z_2 \setminus \{0\},\cdot)$

$\cdot$	1
1	1

Berdasarkan Tabel 2 terlihat bahwa $(Z_2 \setminus \{0\},\cdot)$ memenuhi semua aksioma grup dengan elemen satuan 1.

III. Distributif kanan
Ambil sebarang $a,b,c \in Z_2$
Akan ditunjukkan $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$
Untuk sebarang $a,b,c \in Z_2$, semua kemungkinan yang muncul adalah :

$a = 0;\ b = 0; c = 0$ $a = 1;\ b = 0;\ c = 0$
$a = 0;\ b = 0; c = 1$ $a = 1;\ b = 1; c = 0$
$a = 0;\ b = 1; c = 0$ $a = 1;\ b = 0; c = 1$
$a = 0; b = 1; c = 1$ $a = 1;\ b = 1; c = 1$

i. Ambil $a = 0;\ b = 0; c = 0$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c &= (0+0)\cdot 0\\ &= 0\cdot 0\\ &= 0\\ &= 0+0\\ &= 0\cdot 0+0\cdot 0\\ &= a\cdot c+b\cdot c\end{aligned}$$

ii. Ambil $a = 0;\ b = 0; c = 1$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c &= (0+0)\cdot 1\\ &= 0\cdot 1\\ &= 0\\ &= 0+0\\ &= 0\cdot 1+0\cdot 1\\ &= a\cdot c+b\cdot c\end{aligned}$$

iii. Ambil $a = 0;\ b = 1; c = 0$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c &= (0+1)\cdot 0\\ &= 1\cdot 0\\ &= 0\\ &= 0+0\\ &= 0\cdot 0+1\cdot 0\\ &= a\cdot c+b\cdot c\end{aligned}$$

iv. Ambil $a = 0;\ b = 1; c = 1$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c &= (0+1)\cdot 1\\ &= 1\cdot 1\\ &= 1\\ &= 0+1\\ &= 0\cdot 1+1\cdot 1\\ &= a\cdot c+b\cdot c\end{aligned}$$

v. Ambil $a = 1;\ b = 0;\ c = 0$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c &= (1+0)\cdot 0\\ &= 1\cdot 0\\ &= 0\\ &= 0+0\\ &= 1\cdot 0+0\cdot 0\\ &= a\cdot c+b\cdot c\end{aligned}$$

vi. Ambil $a = 1;\ b = 1; c = 0$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c &= (1+1)\cdot 0\\ &= 0\cdot 0\\ &= 0\\ &= 0+0\\ &= 1\cdot 0+1\cdot 0\\ &= a\cdot c+b\cdot c\end{aligned}$$

vii. Ambil $a = 1;\ b = 0; c = 1$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c &= (1+0)\cdot 1\\ &= 1\cdot 1\\ &= 1\\ &= 1+0\\ &= 1\cdot 1+0\cdot 1\\ &= a\cdot c+b\cdot c\end{aligned}$$

viii. Ambil $a = 1;\ b = 1; c = 1$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c &= (1+1)\cdot 1\\ &= 0\cdot 1\\ &= 0\\ &= 1+1\\ &= 1\cdot 1+1\cdot 1\\ &= a\cdot c+b\cdot c\end{aligned}$$

Berdasarkan I, II, III terbukti $(Z_2,+,\cdot)$ *near field*. Berdasarkan **i)** dan **ii)**, terbukti $(Z_n,+,\cdot)$ dengan $n > 2$ merupakan *S-near-ring*.

Smarandache subnear-ring

Definisi 14

Diberikan $(N,+,\cdot)$ *S-near-ring*. Himpunan $T \neq \emptyset$ dan T adalah himpunan bagian sejati dari N. Himpunan T disebut *Smarandache subnear-ring (S-subnear-ring)* dari N jika memenuhi:

$(T,+,\cdot)$ *S-near-ring*, yaitu:

i) $(T,+,\cdot)$ adalah *near-ring*
   a. $(T,+)$ adalah grup.
   b. $(T,\cdot)$ adalah semigrup.
   c. Distributif Kanan
   $(\forall\, a,b,c \in T)(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$

ii) S himpunan bagian sejati dari T atau ($S \subset T$ dan $S \neq T$), S *near-field*.
   a. $(S,+)$ adalah grup.
   b. $(S \setminus \{0\},\ \cdot)$ adalah grup.
   c. Distributif Kanan
   $(\forall\, a,b,c \in S)(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$

Contoh 11

Diberikan Z_2 *near-field*, S_n adalah grup simetrik atas bilangan berhingga n dan $H = S_3 = \{\rho_0,\ \rho_1, \rho_2,\ \mu_1,\ \mu_2, \mu_3\}$ dengan

$$\rho_0 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \quad \mu_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$
$$\rho_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$
$$\rho_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \quad \mu_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

dan ρ dan μ adalah permutasi-permutasi untuk himpunan $A = \{1,2,3\}$. Z_2S_n adalah grup *near-ring* atas *near-field* Z_2. Grup *near-ring* Z_2S_n juga merupakan *S-near ring* dan Z_2H adalah *S-subnear-ring* dengan $H \subset S_n$ dan $H \neq S_n$, serta $Z_2 \subset Z_2H$ dan $Z_2 \neq Z_2H$.

__**Penyelesaian:**__

Jelas $H \subset S_n$ dan $H \neq S_n$.

i) $(Z_2S_n,+,\circ)$ *S-near ring*

Karena S_n merupakan grup semua permutasi untuk himpunan berhingga A maka S_n merupakan grup terhadap pergandaan permutasi. Sehingga berdasarkan contoh 4.1.2. maka Z_2S_n merupakan grup *near-ring* sekaligus *S-near-ring* dengan himpunan bagian sejatinya Z_2 yang merupakan *near-field* .

ii) $(Z_2H,+,\circ)$ *S-near ring* dengan $Z_2H \subset Z_2S_n$

Sebelum dibuktikan $(Z_2H,+,\circ)$ *S-near ring* akan dibuktikan H merupakan grup terhadap pergandaan permutasi.

I. $(H,\circ)$ grup

Diberikan himpunan $A = \{1,2,3\}$, ρ dan μ adalah permutasi-permutasi untuk himpunan A.

$H = S_3 = \{\rho_0,\ \rho_1, \rho_2,\ \mu_1,\ \mu_2, \mu_3\}$ dengan

$$\rho_0 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \quad \mu_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$
$$\rho_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$
$$\rho_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \quad \mu_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

Tabel 3 $(H,\circ)$

$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Berdasarkan Tabel 3 terlihat bahwa $(H,\circ)$ memenuhi semua aksioma grup dengan elemen satuan $\rho_0 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

II. $(Z_2H,+,\circ)$ *S-near-ring*

Karena himpunan H merupakan grup terhadap pergandaan permutasi ρ dan μ untuk himpunan $A=\{1,2,3\}$ maka berdasarkan contoh 4.1.2. maka Z_2H merupakan grup *near-ring* sekaligus *S-near-ring* dengan himpunan bagian sejatinya Z_2 yang merupakan *near-field* .

Berdasarkan **i)** dan **ii)** maka Z_2H merupakan *S-subnear-ring* dengan $Z_2 \subset Z_2H$ dan $Z_2 \neq Z_2H$.

Selanjutnya akan dibahas struktur dasar *S-near-ring* lainnya yaitu *Smarandache* ideal pada *near-ring*.

Smarandache Ideal Pada Near-Ring

Definisi 15

Diberikan $(N,+,\cdot)$ *S-near ring*, I adalah subgrup normal dari N dan X *near-field* pada N.

a. I disebut Smarandache ideal kanan (S-ideal kanan) dari N jika memenuhi
$$I\cdot X \subseteq I \text{ atau } (\forall i \in I)(\forall x \in X)\ i\cdot x \in I$$

b. I disebut Smarandache ideal kiri (S-ideal kiri) dari N jika memenuhi
$$(\forall x,y \in X)(\forall i \in I)\ x(y+i) - xy \in I$$

c. I disebut Smarandache ideal (S-ideal) dari N jika I merupakan ideal kanan dan ideal kiri dari N.

Contoh 12

Diberikan Z_2 *near-field*,$M = Z_2\times Z_9 \times Z_5 = \{(a,b,c)|a\in Z_2, b\in Z_9, c\in Z_5\}$ merupakan *S-near-ring* dengan operasi penjumlahan dan pergandaan didefinisikan untuk setiap $a\in Z_2, b\in Z_9, c\in Z_5$ sebagai berikut:

i. $(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2)$

ii. $(a_1,b_1,c_1)\cdot(a_2,b_2,c_2) = (a_1\cdot a_2, b_1\cdot b_2, c_1\cdot c_2)$

dan $N = Z_2\times Z_2\times Z_2 = \{(x,y,z)|x,y,z\in Z_2\}$ *near field* dengan operasi penjumlahan dan pergandaan didefinisikan untuk setiap $x,y,z\in Z_2$ sebagai berikut:

i. $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

ii. $(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2) = (x_1\cdot x_2, y_1\cdot y_2, z_1\cdot z_2)$

Dengan $N\subset M$.

$O = Z_2\times Z_2\times\{0\} = \{(a,b,0)|a,b\in Z_2\}$ merupakan S-ideal dari M dengan *near-field* N dengan operasi penjumlahan dan pergandaan didefinisikan untuk setiap $a,b\in Z_2$ sebagai berikut :

i. $(a_1,b_1,0)+(a_2,b_2,0) = (a_1+a_2, b_1+b_2, 0)$

ii. $(a_1,b_1,0)\cdot(a_2,b_2,0) = (a_1\cdot a_2, b_1\cdot b_2, 0)$

<u>**Penyelesaian:**</u>

i) $(M,+,\cdot)$ *S-near-ring*

Berdasarkan contoh 4.1.1 maka Z_9, Z_5 merupakan near-ring dengan *near-field* Z_2 sehingga berdasarkan definisi 4.2.1 maka $M = Z_2\times Z_9\times Z_5$ merupakan *S-direct product* yang juga adalah *S-near-ring* terhadap operasi penjumlahan "$+$" dan pergandaan "$\cdot$" yang didefinisikan padanya.

ii) $(N,+,\cdot)$ *near-field*

I. $(N,+)$ grup

$N = Z_2\times Z_2\times Z_2$

$= \{(0,1)\times(0,1)\times(0,1)\}$

$= \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$

Berdasarkan perhitungan tabel klasik $N = Z_2\times Z_2\times Z_2$ terhadap operasi penjumlahab terlihat bahwa $(N,+)$ memenuhi semua aksioma grup dengan elemen netral $(0,0,0)$.

II. $(N\setminus\{0\},\cdot)$grup

Tabel 4. $(N\setminus\{0\},\cdot)$

(1,1,1)	(1,1,1)

Berdasarkan Tabel 4 terlihat bahwa $(N\setminus\{0\},\cdot)$ memenuhi semua aksioma grup dengan elemen satuan $(1,1,1)$.

III. Distributif kanan

Karena $N = Z_2\times Z_2\times Z_2$ dengan Z_2 merupakan *near-field* maka berdasarkan sifat 4.2.1 sifat distributif kanan berlaku pada himpunan N.

iii) O subgrup normal dari N

I. O subgrup N

Karena $O = Z_2\times Z_2\times\{0\}$ dan $N = Z_2\times Z_2\times Z_2$ maka $O\subset N$.

Selanjutnya akan dibuktikan himpunan O subgrup N.

Ambil sebarang $a,b\in O$. Akan ditunjukkan $a+b^*\in O$. Karena $a,b\in O$ maka

$a = (a_1,a_2,0)$, dengan $a_1,a_2\in Z_2$

$b = (b_1,b_2,0)$, dengan $b_1,b_2\in Z_2$

Karena $O = Z_2\times Z_2\times\{0\}$ dengan Z_2 merupakan *near-field* yang jelas juga merupakan *near-ring* maka berdasarkan pembuktian teorema 4.2.1 **i)** himpunan O juga merupakan *near-ring* sehingga himpunan O memiliki invers terhadap operasi "+". Selanjutnya, $b\in O$ maka b memiliki invers. Misalkan b^* merupakan invers b sehingga $b^*\in O$ maka $b^* = ({b^*}_1,{b^*}_2,0)$, dengan ${b^*}_1,{b^*}_2\in Z_2$

Selanjutnya,

$a+b^* = (a_1,a_2,0)+({b^*}_1,{b^*}_2,0)$

$= (a_1+{b^*}_1, a_2+{b^*}_2, 0)$

$= (c_1,c_2,0)\in O$

dengan $c_1 = a_1+{b^*}_1$ dan $c_2 = a_2+{b^*}_2$.

II. O subgrup normal dari N

Ambil sebarang $a\in O$ dan $b\in N$ Akan ditunjukkan $b+a+b^*\in O$.

Karena $a\in O$ dan $b\in N$ maka

$a = (a_1,a_2,0)$, dengan $a_1,a_2\in Z_2$

$b = (b_1,b_2,b_3)$, dengan $b_1,b_2,b_3\in Z_2$

Karena $b\in N$ dan N merupakan *near-field* maka b memiliki invers. Misalkan b^* merupakan invers b

sehingga
$b^* \in N$ maka $b^* = (b^*_1, b^*_2, b^*_3)$, dengan $b^*_1, b^*_2, b^*_3 \in Z_2$
Selanjutnya,

$$\begin{aligned} b + a + b^* &= (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, 0) + (b^*_1, b^*_2, b^*_3) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + 0) + (b^*_1, b^*_2, b^*_3) \\ &= (b_1 + a_1 + b^*_1, b_2 + a_2 + b^*_2, b_3 + b^*_3) \quad \text{(i)} \\ &= (b_1 + b^*_1 + a_1, b_2 + b^*_2 + a_2, b_3 + b^*_3) \quad \text{(ii)} \\ &= (0 + a_1, 0 + a_2, 0) \\ &= (a_1, a_2, 0) \in O \end{aligned}$$

Karena $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b^*_1, b^*_2, b^*_3 \in Z_2$ dan Z_2 merupakan *near-field* maka berlaku sifat asiosiatif terhadap penjumlahan sehingga berlaku (i) ke (ii).

iv) O S-ideal kanan dan juga S-ideal kiri

I. O S-ideal kanan
$(\forall a \in O)(\forall b \in N)\ a \cdot b \in O$
Ambil sebarang $a \in O$ dan $b \in N$.
Akan ditunjukkan $a \cdot b \in O$
Karena $a \in O$ dan $b \in N$ maka
$a = (a_1, a_2, 0)$, dengan $a_1, a_2 \in Z_2$
$b = (b_1, b_2, b_3)$, dengan $b_1, b_2, b_3 \in Z_2$
Selanjutnya,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1, a_2, 0) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 b_1, a_2 b_2, 0) \in O \end{aligned}$$

II. O S-ideal kiri
$(\forall a, b \in N)(\forall c \in O)\ a \cdot (b + c) - a \cdot b \in O$
Ambil sebarang $a, b \in N$ dan $c \in O$.
Akan ditunjukkan $a \cdot (b + c) - a \cdot b \in O$
Karena $a, b \in N$ dan $c \in O$ maka
$a = (a_1, a_2, a_3)$, dengan $a_1, a_2, a_3 \in Z_2$
$b = (b_1, b_2, b_3)$, dengan $b_1, b_2, b_3 \in Z_2$
$c = (c_1, c_2, 0)$, dengan $c_1, c_2 \in Z_2$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) - a \cdot b &= (a_1, a_2, a_3) \cdot [(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, 0)] \\ &\quad - (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + 0) - (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3) \\ &= (a_1(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2), a_3 b_3) - (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3) \\ &= (a_1 b_1 + a_1 c_1, a_2 b_2 + a_2 c_2, a_3 b_3) - (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3) \\ &= (a_1 b_1 + a_1 c_1 - a_1 b_1, a_2 b_2 + a_2 c_2 - a_2 b_2, a_3 b_3 - a_3 b_3) \\ &= (a_1 b_1 - a_1 b_1 + a_1 c_1, a_2 b_2 - a_2 b_2 + a_2 c_2, a_3 b_3 - a_3 b_3) \\ &= (0 + a_1 c_1, 0 + a_2 c_2, 0) \\ &= (a_1 c_1, a_2 c_2, 0) \in O \end{aligned}$$

Berdasarkan **i)**, **ii)**, **iii)**, **iv)** maka terbukti $O = Z_2 \times Z_2 \times \{0\}$ merupakan S-ideal dari M dengan *near-field*

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dan uraian pada bab-bab sebelumnya maka diperoleh beberapa kesimpulan antara lain :

1. Suatu struktur *Smarandache near-ring* tidak hanya teridentifikasi oleh suatu himpunan yang *near-ring* dengan himpunan bagian sejatinya yang *near-field* tetapi juga melalui suatu himpunan yang merupakan grup *near-ring* atas *near-field* Z_2 atau Z_p yang lainnya.
2. Suatu struktur *Smarandache subnear-ring* teridentifikasi oleh bukan hanya himpunan bagian tapi himpunan bagian sejati dari suatu himpunan yang merupakan *Smarandache near-ring* dengan himpunan bagian sejati tersebut juga teridentifikasi sebagai struktur *Smarandache near-ring*
3. Untuk mengidentifikasi struktur *Smarandache ideal* pada *near-ring* diperlukan himpunan yang merupakan *S-near-ring* dengan himpunan bagiannya yang bukan hanya merupakan subgrup normal tapi juga *near-field* dan memenuhi aksioma pembentukan *Smarandache Ideal.*

DAFTAR PUSTAKA

Dummit, D. S., R. M. Foote. 1999. *Abstract Algreba*, Second Edition, Jhon Wiliam. Inc, N. Y.p

Kandasamy, W. B. V. 2002. *Smarandache Near-rings*. American Research Press. Rehoboth.

Kandasamy, W. B. V. 2002. *Smarandache Rings*. American Research Press.Rehoboth.

Padilla, R. 1998. *The Smarandache Algebraic Structures*. Bulletin of Pure and Applied Sciences. Delhi.

Smarandache, F. 2000. *Special Algebraic Structures.* Collected papers. Abaddaba. Oradea.