Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 2 Hal. 27 – 30 (2013)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

KARAKTERISTIK RELASI KONGRUENSI PADA SEMIGRUP

Characterization of Congruence Relation on Semigrup

ELVINUS RICHARD PERSULESSY
Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, poka-Ambon
e-mail: richardelvinus@yahoo.com

ABSTRAK

Diberikan semigrup *S* dan *R* adalah suatu relasi ekuivalensi pada *S*. Relasi ekuivalensi *R* disebut relasi kongruensi pada *S* jika *R* kompatibel. Penelitian ini akan menjelaskan beberapa karakeristik yang dimiliki oleh relasi kongruensi *R* pada semigrup *S*.

Keywords: *Kompatibel,Relasi Ekuivalensi, Kongruensi*.

PENDAHULUAN

Himpunan $S \neq \varnothing$ yang dilengkapi dengan operasi biner "$\bullet$", ditulis $(S, \bullet)$ atau disingkat *S*, disebut semigrup jika terhadap operasi biner yang sama *S* memenuhi sifat asosiatif.

Jika pada S didefinisikan suatu relasi ekuivalensi *R* yang memenuhi sifat kompatibel kiri dan kompatibel kanan, maka relasi ekuivalensi *R* menjadi relasi kongruensi pada *S*.

Karena relasi kongruensi juga merupakan relasi ekuivalensi, maka S akan terpartisi menjadi kelas-kelas yang saling asing. Himpunan $xR = \{y \in S \mid (x, y) \in R\}$ adalah kelas ekuivalensi yang memuat *x*. Himpunan kelas-kelas ekuivalensi yang saling asing ini, selanjutnya disebut himpunan kuosen dari *S* dan dinotasikan dengan S/R.

Penelitian ini akan menjelaskan secara detail beberapa karakteristik relasi kongruensi pada semigrup *S*.

TINJAUAN PUSTAKA

Untuk menjelaskan karakteristik relasi kongruensi pada semigrup diperlukan beberapa konsep dasar tentang homomorfisma, kompatibilitas, dan kekongruenan yang dikaji dari Howie [1] dan Thierrin (1995). Selanjutnya, dalam buka *An Introduction to Semigroup Theory*, J. M Howie memberikan landasan teori tentang karakteristik relasi kongruensi pada semigrup yang dilengkapi oleh Spitznagel (1997) lewat tulisannya *Structure in Semigroup II*. [2] Berikut ini adalah beberapa definisi dan teorema yang melandasi penelitian ini.

Definisi 1.
Diberikan himpunan $S \neq \varnothing$ yang dilengkapi dengan operasi biner "$\bullet$".

$(S, \bullet)$, selanjutnya ditulis S, disebut semigrup terhadap operasi biner $(S, \bullet)$ jika S memenuhi sifat asosiatif

$$(\forall s_1, s_2 \in S)\left[(s_1 \bullet s_2) \bullet s_3 = s_1 \bullet (s_2 \bullet s_3)\right]$$

Definisi 2.
Misalkan $(S, \bullet)$ dan $(S', *)$ adalah dua semigrup.

a. Fungsi $\alpha : S \to S'$ dinamakan homomorfisma jika
$$(\forall x, y \in S)\left[\alpha(x \bullet y) = \alpha(x) * \alpha(y)\right]$$
b. Jika α homomorfisma yang surjektif, maka α disebut epimorfisma.
c. Jika α homomorfisma yang injektif, maka α disebut monomorfisma.
d. Jika α homomorfisma yang surjektif dan injektif, maka α disebut isomorfisma.

Definisi 3.
Suatu relasi R pada semigrup S disebut

i. Kompatibel kiri, jika
$$(\forall s, t, a \in S)\left[(s, t) \in R \Rightarrow (as, at) \in R\right].$$
ii. Kompatibel kanan, jika
$$(\forall s, t, a \in S)\left[(s, t) \in R \Rightarrow (sa, ta) \in R\right].$$

iii. Kompatibel, jika $(\forall s,t,s',t'\in S)$

$$\left[(s,s')\in R \ \&\ (t,t')\in R \Rightarrow (st,s't')\in R\right].$$

Relasi ekuivalensi yang kompatibel kiri disebut relasi kongruensi kiri.
Relasi ekuivalensi yang kompatibel kanan disebut relasi kongruensi kanan.
Relasi ekuivalensi yang kompatibel disebut relasi kongruensi.

Teorema 1
Relasi R pada semigrup S merupakan relasi kongruensi jika dan hanya jika R merupakan relasi kongruensi kiri dan relasi kongruensi kanan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 2
Diberikan S dan T semigrup.
Jika $\beta : S \to T$ adalah homomorfisma, maka $\beta\circ\beta^{-1}$ adalah relasi kongruensi pada S. Selanjutnya, $\beta\circ\beta^{-1}=\ker\beta$.
Bukti :
Karena $\beta : S\to T$, maka $\beta\circ\beta^{-1} : S\to S$. Akibatnya

$$\beta\circ\beta^{-1}=\left\{(x,y)\in S\times S \ \middle|\ (\exists z\in T),(x,z)\in\beta \text{ dan } (z,y)\in\beta^{-1}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in S\times S \ \middle|\ (\exists z\in T),(x,z)\in\beta \text{ dan } (y,z)\in\beta\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in S\times S \ \middle|\ x\beta=y\beta\right\}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $\beta\circ\beta^{-1}$ adalah relasi kongruensi.

i). Ambil sebarang $x\in S$. Karena $x\beta=y\beta$, maka jelas $(x,x)\in\beta\circ\beta^{-1}$. Jadi $\beta\circ\beta^{-1}$ refleksif.

ii). Ambil sebarag $x,y\in S$ dengan $(x,y)\in\beta\circ\beta^{-1}$.
Akan ditunjukkan $(y,x)\in\beta\circ\beta^{-1}$.
Karena $(x,y)\in\beta\circ\beta^{-1}$, maka $x\beta=y\beta$ atau $y\beta=x\beta$.
Ini berarti $(y,x)\in\beta\circ\beta^{-1}$. Jadi $\beta\circ\beta^{-1}$ simetris.

iii). Ambil $x,y,z\in S$ dengan $(x,y),(y,z)\in\beta\circ\beta^{-1}$.
Akan ditunjukkan $(x,z)\beta\circ\beta^{-1}$.
Karena $(x,y),(y,z)\in\beta\circ\beta^{-1}$, maka $x\beta=y\beta$ dan $y\beta=z\beta$. Akibatnya $x\beta=z\beta$ atau $(x,z)\beta\circ\beta^{-1}$.
Jadi $\beta\circ\beta^{-1}$ transitif.

iv). Ambil sebarang $x,y,z,t\in S$ dengan $(x,y),(z,t)\in\beta\circ\beta^{-1}$.
Karena $(x,y),(z,t)\in\beta\circ\beta^{-1}$, maka $x\beta=y\beta$ dan $z\beta=t\beta$.
Karena β homomorfisma, maka

$$(xz)\beta=(x\beta)(z\beta)$$
$$=(y\beta)(t\beta)$$
$$=(yt)\beta$$

Akibatnya $(xz,yt)\in\beta\circ\beta^{-1}$.

Dibentuk himpunan S/α dengan α adalah relasi kongruen pada semigrup S. Jika didefinisikan operasi biner "*" pada S/α dengan aturan $(a\alpha)*(b\alpha)=(ab)\alpha a$, untuk setiap $a\alpha,b\alpha\in S/\alpha$, diperoleh teorema berikut.

Teorema 3

a. $\left(S/\alpha, *\right)$ adalah semigrup.

b. Fungsi $\gamma : S\to S/\alpha$ dengan aturan

$$(\forall a\in S)\left[\gamma(a)=a\alpha\right]$$

merupakan homomorfisma.

c. Jika S dan T semigrup, dengan $\beta : S\to T$ homomorfisma, maka $\ker\beta=\beta\circ\beta^{-1}$ adalah relasi kongruensi pada S dan $\rho : S/\ker\beta\to T$ monomorfisma serta diagram berikut komutatif.

```tikzcd
S \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & T \\
S/\ker\beta \arrow[ur, "\rho"'] &
```

Bukti :

a. (i). Akan ditunjukkan S/α *well-defined.*

Ambil sebarang $a\alpha,b\alpha,a'\alpha,b'\alpha\in S/\alpha$ dengan $a\alpha=a'\alpha$ dan $b\alpha=b'\alpha$.

Karena $a\alpha=a'\alpha$ dan $b\alpha=b'\alpha$, maka $(a,a')\in\alpha$ dan $(b,b')\in\alpha$.

Karena $a,b,a',b'\in S$ dan α relasi kongruensi, maka $(ab,a'b')\in\alpha$.

Akibatnya $(ab)\alpha=(a'b')\alpha$ atau S/α.

(ii). Ambil sebarang $a\alpha,b\alpha,c\alpha\in S/\alpha$.

Akibatnya

$$((a\alpha)*(b\alpha))*(c\alpha)=(ab)\alpha*(c\alpha)$$
$$=(abc)\alpha$$
$$=(a\alpha)*(bc)\alpha$$
$$=(a\alpha)*((b\alpha)*(c\alpha))$$

Berlaku sifat asosiatif.

b. Akan ditunjukkan $\gamma : S \to {}^{S}\!/\!_{\alpha}$ adalah homomorfisma.

Ambil sebarang $a,b \in S$.

Diperoleh,

$$\begin{aligned}\gamma(ab) &= (ab)\alpha \\ &= (a\alpha)*(b\alpha) \\ &= \gamma(a)*\gamma(b)\end{aligned}$$

Jadi γ adalah homomorfisma.

c. Definisikan $\rho : {}^{S}\!/\!_{\ker\beta} \to T$ dengan aturan perkawanan $(\forall s \in S)\rho(a\ker\beta) = a\beta$.

c.1. Akan dibuktikan $\rho : {}^{S}\!/\!_{\ker\beta} \to T$ monomorfisma.

(i). Ambil sebarang $a\ker\beta,\ b\ker\beta \in {}^{S}\!/\!_{\ker\beta}$ dengan

$$a\ker\beta = b\ker\beta .$$

Karena $a\ker\beta = b\ker\beta$, maka $(a,b) \in \ker\beta$ atau $a\beta = b\beta$ atau $\rho(a\ker\beta) = \rho(b\ker\beta)$.

Jadi ρ *well-defined.*

(ii). Ambil sebarang $a\ker\beta,\ b\ker\beta \in {}^{S}\!/\!_{\ker\beta}$.

$$\begin{aligned}\rho(a\ker\beta\ b\ker\beta) &= \rho(ab)\ker\beta \\ &= (ab)\beta \\ &= (a\beta)(b\beta) \\ &= \rho(a\ker\beta)\rho(b\ker\beta)\end{aligned}$$

Jadi ρ homomorfisma.

(iii). Ambil sebarang $a\ker\beta,\ b\ker\beta \in {}^{S}\!/\!_{\ker\beta}$ dengan $\rho(a\ker\beta) = \rho(b\ker\beta)$.

Karena $\rho(a\ker\beta) = \rho(b\ker\beta)$, maka $a\beta = b\beta$ atau $(a,b) \in \ker\beta$ atau $a\ker\beta = b\ker\beta$.

Jadi ρ injektif.

Berdasarkan (i) – (iii) terbukti ρ monomorfisma.

c.2. Ambil sebarang $a \in S$. Diperoleh

$$\begin{aligned}(\rho \circ f)(a) &= \rho(f(a)) \\ &= \rho(a\ker\beta) \\ &= a\beta\end{aligned}$$

Terbukti diagram komutatif.

Teorema 4

Jika α dan β adalah relasi-relasi kongruensi pada semigrup S dan $\alpha \subseteq \beta$, maka terdapat homomorfisma $\gamma : {}^{S}\!/\!_{\alpha} \to {}^{S}\!/\!_{\beta}$ sehingga diagram berikut komutatif.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\beta*"] \arrow[d, "\alpha*"'] & {}^{S}\!/\!_{\beta} \\ {}^{S}\!/\!_{\alpha} \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

Bukti

i). Didefinisikan $\gamma : {}^{S}\!/\!_{\alpha} \to {}^{S}\!/\!_{\beta}$ dengan aturan perkawanan $\gamma(a\alpha) = a\beta$.

Akan ditunjukkan γ *well-defined.*

Ambil sebarang $a\alpha,\ b\alpha \in {}^{S}\!/\!_{\alpha}$ dengan $a\alpha = b\alpha$.

Karena $a\alpha = b\alpha$, maka $(a,b) \in \beta$ atau $a\beta = b\beta$ atau $\gamma(a\alpha) = \gamma(b\alpha)$.

Terbukti γ *well-defined.*

ii). Ambil sebarang $a\alpha,\ b\alpha \in {}^{S}\!/\!_{\alpha}$.

Berdasarkan $\gamma(a\alpha) = a\beta$ dan Teorema 3, diperoleh

$$\begin{aligned}\gamma((ab)\alpha) &= (ab)\beta \\ &= (a\beta)*(b\beta) \\ &= \gamma(a\alpha)*\gamma(b\alpha)\end{aligned}$$

Jadi terbukti $\gamma : {}^{S}\!/\!_{\alpha} \to {}^{S}\!/\!_{\beta}$ adalah homomorfisma.

iii).Ambil sebarang $a \in S$.

$$\begin{aligned}(\gamma \circ \alpha*)(a) &= \gamma(\alpha*(a)) \\ &= \gamma(a\alpha) \\ &= a\beta \\ &= \beta*(a)\end{aligned}$$

Terbukti diagram komutatif.

Teorema 5

Jika ρ_i , $i \in I$ adalah relasi kongruensi pada semigrup S, maka $\cap\{\rho_i \mid i \in I\}$ juga merupakan relasi kongruensi pada S.

Bukti

Ambil sebarang $s,t,s',t' \in S$ dengan $(s,t) \in \bigcap_{i\in I}\rho_i$ dan $(s',t') \in \bigcap_{i\in I}\rho_i$.

Akibatnya $(s,t) \in \rho_i$ dan $(s',t') \in \rho_i$ untuk setiap $i \in I$.

Karena ρ_i relasi kongruensi pada semigrup S, maka $(ss',tt') \in \rho_i$.

Akibatnya $(ss',tt') \in \bigcap_{i\in I}\rho_i$.

Terbukti $\cap\{\rho_i \mid i \in I\}$ merupakan relasi kongruensi pada S.

KESIMPULAN

1. Relasi kongruensi pada semigrup S akan membentuk struktur yang sama dengan subgrup normal pada grup dan ideal di ring.
2. Irisan relasi-relasi kongruensi pada semigrup S juga membentuk relasi kongruensi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Howie, J. M. (1976) *Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press. London.

[2] Spitznagel, C. R. (1997) *Strucutre in Semigroup II*. Seminar Notes.

[3] Spitznagel, C. R. (2000) *Congruence Lattices.* http://www.jcu.edu/math.pdf