

VEHICLE ROUTING PROBLEM TIME WINDOWS DENGAN PENGEMUDI SESEKALI

D. Lalang¹, B. P. Silalahi², F. Bukhari³

Abstrak

Pendistribusian barang merupakan salah satu hal penting dalam suatu kegiatan produksi. Dalam proses distribusi, semua perusahaan mengharapkan agar dapat meminimumkan biaya pendistribusian. Kendala yang sering dihadapi dalam pendistribusian barang ialah penentuan rute yang harus dilewati oleh kendaraan pengirim barang tersebut. Banyak strategi yang bisa digunakan untuk mengatasi permasalahan distribusi, salah satunya dengan menggunakan jasa pengemudi sesekali. Dalam penentuan rute, setiap perusahaan memiliki kendala yang berbeda-beda, seperti jumlah kendaraan yang digunakan, kapasitas kendaraan dan permintaan konsumen, jarak antar konsumen, dan ada juga kasus dimana konsumen ingin dilayani sesuai dengan *time windows* yang dimilikinya. Masalah penentuan rute yang optimal dapat diselesaikan dengan model dalam optimasi yaitu *Vehicle Routing Problem (VRP)*. Makalah ini bertujuan memformulasikan masalah pendistribusian pada model *Vehicle Routing Problem Time Windows* dengan pengemudi sesekali dalam menentukan rute optimal dimana tiap konsumen memiliki batasan waktu dengan menggunakan jasa pengemudi sesekali. Hasil *VRP time windows* dengan pengemudi sesekali menunjukkan bahwa model ini dapat digunakan untuk meminimalkan biaya pendistribusian.

Kata kunci: Distribusi, *vehicle routing problem*, pengemudi sesekali, optimasi, *time windows*.

2010 Mathematics Subject Classification: 97M40.

PENDAHULUAN

Pendistribusian barang dalam kegiatan produksi merupakan salah satu hal yang penting pada suatu perusahaan. Distribusi merupakan suatu proses penyaluran barang atau jasa dari produsen ke konsumen. Permasalahan yang sering dihadapi perusahaan dalam mendistribusikan barang adalah penentuan rute yang harus dilewati kendaraan yang mengantarkan barang hasil produksi. Dalam penentuan rute terdapat beberapa masalah atau kendala yang sering dialami seperti jumlah kendaraan yang harus digunakan, kapasitas kendaraan, permintaan konsumen yang berbeda-beda dan pada kasus tertentu ada konsumen yang ingin dilayani sesuai batasan waktu atau *time windows* yang dimilikinya. Penentuan waktu kapan konsumen dilayani merupakan masalah yang sulit untuk dipecahkan, karena setiap konsumen memiliki rentang waktu pelayanan yang berbeda-beda. Misalnya ada

¹ Mahasiswa S2 Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga, Bogor, 16680. Email: dhamar.ipb14@gmail.com

² Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail : bibparuhum@gmail.com

³ Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: fahren.bukhari@gmail.com

konsumen yang bisa dilayani kapan saja selama masih berada dalam rentang waktu buka sampai waktu tutup perusahaan, dan ada juga konsumen yang ingin dilayani hanya pada rentang waktu tertentu saja.

Kendaraan yang digunakan untuk melakukan pendistribusian harus mampu memenuhi setiap permintaan sesuai jarak antar konsumen. Hal tersebut membutuhkan biaya operasional yang cukup besar sehingga dibutuhkan penentuan rute untuk meminimumkan biaya operasional. Biaya operasional yang dimaksud terdiri dari biaya tetap penggunaan kendaraan dan biaya tetap perjalanan. Salah satu penyelesaian untuk meminimumkan biaya operasional adalah dengan menggunakan jasa pengemudi sesekali untuk mendistribusikan barang milik perusahaan kepada konsumen. Pengemudi sesekali yang dimaksud adalah masyarakat biasa yang memiliki kendaraan pribadi dan bukan berasal dari perusahaan. Penggunaan pengemudi sesekali mengakibatkan perusahaan tidak lagi memikirkan biaya operasional kendaraan dari pengemudi sesekali, tetapi perusahaan cukup membayar biaya imbalan ketika pengemudi sesekali melakukan pendistribusian berdasarkan jarak yang ditempuh.

Meminimumkan biaya dalam proses pendistribusian dengan cara mengoptimalkan rute sering dikenal dengan *vehicle routing problem*. *Vehicle routing problem* (VRP) adalah *combinatorial optimization* dan *integer programming problem* yang sering digunakan dalam banyak perencanaan dan proses pengambil keputusan, misalnya untuk menentukan rute optimal dalam proses pendistribusian barang dari perusahaan kepada konsumen [15, 21].

Penelitian tentang VRP *time windows* yang telah dilakukan antara lain yaitu Raditya [13] dan Meithania [11] menyelesaikan masalah VRP *time windows* yang diterapkan untuk meminimumkan jarak dan biaya pada pendistribusian produksi roti. Penelitian tersebut dilakukan dengan menggunakan metode *integer programming* dan metode Heuristik. Selanjutnya Archetti *et al.* [1] menyajikan VRP dengan pengemudi sesekali yaitu VRP untuk menentukan rute optimal.

Penelitian ini adalah pengembangan dari model penelitian Archetti *et al.* [1]. Pengembangan tersebut dilakukan dengan menambahkan kendala batasan waktu (*time windows*) untuk masalah pendistribusian. Formulasi model dilakukan yang bertujuan untuk menentukan rute yang optimal, agar dapat meminimumkan total biaya dalam pendistribusian saat menggunakan kendaraan milik perusahaan dan menentukan biaya sebagai imbalan bagi pengemudi sesekali. Sebagai referensi juga digunakan [2-6, 8-10, 12, 14, 16-20, 22].

TINJAUAN PUSTAKA

Linear Programming

Linear programming adalah suatu masalah dalam memaksimumkan satu atau meminimumkan suatu fungsi linear dengan mempertimbangkan kendala-kendala yang ada [7]. *Linear programming* memenuhi ketentuan-ketentuan sebagai berikut:

1. Tujuan masalah adalah untuk memaksimalkan keuntungan atau meminimumkan biaya dengan sebuah fungsi linear. Fungsi yang dimaksimalkan atau diminimumkan, disebut sebagai fungsi objektif.
2. Nilai-nilai pada variabel keputusan harus memenuhi suatu himpunan pembatas, setiap pembatas harus berupa persamaan linear atau pertaksamaan linear.
3. Pembatasan tanda untuk setiap variabel dalam masalah ini dan pembatas bergantung pada setiap variabel. Untuk sembarang variabel x_i , x_i haruslah variabel taknegatif ($x_i \geq 0$) atau variabel tak terbatas [23].

Integer Linear Programming

Integer linear programming merupakan salah satu masalah dalam memaksimalkan atau meminimumkan suatu fungsi linear. *Integer linear programming* sering disebut juga dengan *integer programming*, jika beberapa variabel atau semua variabel yang digunakan dalam *integer programming* ini adalah bilangan bulat taknegatif. *Integer programming* disebut juga dengan *pure integer programming*, jika semua variabel yang digunakan adalah berupa bilangan bulat. *Integer programming* disebut juga dengan *mixed integer programming*, jika hanya beberapa variabel yang digunakan atau tidak semua variabel yang digunakan berupa bilangan bulat. Sedangkan *integer programming* disebut juga dengan 0-1 *integer programming* jika semua variabel yang digunakan berupa variabel bernilai 0 atau 1[7].

Vehicle Routing Problem

Vehicle routing problem adalah *integer programming problem* yang sering digunakan dalam banyak perencanaan dan proses pengambil keputusan, misalnya untuk menentukan rute optimal dalam proses pendistribusian barang dari perusahaan kepada konsumen [15]. Selain itu *vehicle routing problem* dapat pula digunakan dalam proses pengumpulan sampah dan masalah-masalah lainnya yang berhubungan dengan jalur atau rute.

Vehicle routing problem ini menggunakan istilah depot untuk perusahaan atau produsen penghasil barang, dan node untuk konsumen dari perusahaan. Tujuan dari *vehicle routing problem* ini adalah meminimumkan total biaya dalam pendistribusian.

Vehicle routing problem yang sederhana dapat digambarkan sebagai berikut:

1. Kendaraan akan berangkat dari depot dan mengunjungi semua konsumen dan harus kembali lagi ke depot awal.
2. Setiap konsumen hanya boleh dikunjungi tepat satu kali oleh satu kendaraan.
3. Setiap kendaraan yang berangkat harus membawa barang dan banyaknya barang tersebut tidak kurang dari atau sama dengan kapasitas dari kendaraan yang digunakan.

4. Menyelesaikan masalah untuk menemukan suatu himpunan rute dalam mendistribusikan barang dari lokasi depot ke lokasi konsumen dengan biaya seminimum mungkin.

Vehicle Routing Problem with Time Windows

Vehicle routing problem with time windows (VRPTW) adalah masalah penentuan rute kendaraan dengan meminimumkan biaya untuk melayani seluruh konsumen dan memenuhi kendala kapasitas kendaraan dan *time windows* pada setiap konsumen dan depot. *Time windows* pada setiap konsumen didefinisikan sebagai selang waktu sehingga kendaraan dapat memulai pelayanan setelah waktu awal konsumen dimulai dan sebelum waktu akhir konsumen selesai. Jika kendaraan datang waktu awal konsumen maka kendaraan harus menunggu sampai tiba waktu awal konsumen dapat dilayani, dan kendaraan yang menunggu tidak dikenai biaya tambahan. Terdapat dua tipe *time windows* pada VRPTW, yaitu *hard time windows* dan *soft time windows*. Pada *hard time windows* kendaraan harus tiba di konsumen sebelum waktu akhir konsumen. Pada *soft time windows*, kendaraan boleh datang setelah waktu akhir konsumen dan dikenakan biaya tambahan [23].

Vehicle Routing Problem dengan Pengemudi Sesekali

Vehicle routing problem dengan pengemudi sesekali adalah *vehicle routing problem* yang menggunakan jasa kendaraan milik pengemudi sesekali dalam proses pendistribusian. Pengemudi sesekali yang dimaksud adalah masyarakat biasa yang memiliki kendaraan dan bisa digunakan untuk mengantarkan barang dari produsen kepada konsumen. Pengemudi sesekali akan diberikan imbalan oleh produsen, apabila mengantarkan barang kepada konsumen. Hal ini memungkinkan pemilik kendaraan yang tidak sepenuhnya menggunakan kendaraannya dalam keseharian untuk dapat menghasilkan uang dari kendaraan yang dimilikinya [1].

METODE PENELITIAN

Penelitian ini difokuskan pada penyelesaian dari model *vehicle routing problem time windows* (VRPTW) dengan pengemudi sesekali. Tahapan pertama diawali dengan memformulasikan model VRPTW dengan pengemudi sesekali menggunakan *integer programming*, setelah itu menentukan kendala-kendala yang sesuai dengan asumsi-asumsi yang ditetapkan, dan tahapan terakhir menyelesaikan masalah VRPTW dengan pengemudi sesekali kedalam skenario yang dibagi menjadi tiga kasus penyelesaian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Formulasi masalah

Formulasi model ini dilakukan dengan membuat fungsi objektif yang baru. Tujuan dari fungsi objektif ini adalah untuk meminimumkan total biaya dalam melakukan proses pendistribusian kepada konsumen dengan menggunakan 2 jenis kendaraan. Kendaraan tersebut adalah kendaraan milik perusahaan dan kendaraan milik pengemudi sesekali. Selain itu yang dilakukan adalah menentukan kendala-kendala yang bersesuaian pada formulasi masalah ini.

Fungsi objektif

Fungsi objektif yang digunakan dalam penelitian ini bertujuan meminimumkan biaya pendistribusian. Biaya ini terdiri dari penjumlahan biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan saat menggunakan kendaraan milik perusahaan, ditambah biaya pendistribusian yang dikeluarkan oleh perusahaan saat menggunakan kendaraan milik pengemudi sesekali.

Biaya pendistribusian yang dikeluarkan saat menggunakan kendaraan perusahaan secara matematis ditulis sebagai berikut,

$$P(k) = z_k w_k + \sum_{i,j \in N} c_k b_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

dan biaya pendistribusian yang dikeluarkan saat menggunakan kendaraan milik pengemudi sesekali ditulis sebagai berikut,

$$R(k) = \sum_{i,j \in N} c_{fk} b_{ij} x_{ijk} \quad (2)$$

Secara keseluruhan fungsi objektif yang bertujuan untuk meminimumkan total biaya dalam pendistribusian ini dapat ditulis dalam bentuk matematis sebagai berikut:

$$\min Z = \sum_{k \in K} P(k) + \sum_{k \in K} R(k). \quad (3)$$

Kendala-kendala

1. Setiap kendaraan akan berangkat dari depot dan tidak semua kendaraan harus digunakan:

$$\sum_{j \in J} x_{ijk} = w_k, \quad i \in I, \quad k \in K. \quad (4)$$

2. Kendaraan yang digunakan untuk mengantarkan barang kepada konsumen harus kembali ke depot:

$$\sum_{j \in J} x_{jik} = w_k, \quad i \in I, \quad k \in K. \quad (5)$$

3. Setiap konsumen akan dilayani tepat satu kali oleh sebuah kendaraan:

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in IUJ} x_{ijk} = 1, \quad j \in J. \quad (6)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in IUJ} x_{jik} = 1, \quad i \in J.$$

4. Jumlah permintaan dari setiap konsumen dalam sebuah rute, tidak melebihi kapasitas kendaraan:

$$\sum_{j \in J} d_j \sum_{i \in IUJ} x_{ijk} \leq Q_k, \quad k \in K. \quad (7)$$

5. Mencegah terjadinya *subtour* yang tidak *feasible*:

$$u_{ik} - u_{jk} + Nx_{ijk} \leq N - 1, \quad i, j \in J, \quad k \in K. \quad (8)$$

6. Kendaraan yang mengunjungi suatu konsumen, akan meninggalkan konsumen tersebut menuju ke konsumen lainnya:

$$\sum_{\substack{i \in IUJ \\ l \neq i}} x_{ilk} - \sum_{\substack{j \in IUJ \\ l \neq j}} x_{ljk} = 0, \quad l \in J, \quad k \in K \quad (9)$$

7. Tidak ada konsumen yang dikunjungi oleh kendaraan yang tidak digunakan oleh depot:

$$x_{ijk} \leq w_k, \quad i, j \in IUJ, \quad k \in K. \quad (10)$$

8. Tidak ada kendaraan yang berjalan dari konsumen ke konsumen yang sama:

$$x_{ijk} = 0, \quad i = j, \quad i, j \in J, \quad k \in K. \quad (11)$$

9. Kendala yang memperlihatkan hubungan antara jarak, kecepatan, dan waktu tempuh kendaraan angkut, dimana banyaknya waktu perjalanan dipengaruhi oleh jarak antar konsumen dan kecepatan kendaraan:

$$t_{ijk} = \frac{b_{ij}}{v_k}, \quad i, j, k, i \neq j. \quad (12)$$

10. Waktu pelayanan suatu kendaraan k yang menuju j dari i , tidak dapat tiba di j sebelum $s_{ik} + t_{ij}$ jadi jika $x_{ijk} > 0$ maka $y_{ik} + t_{ij} \leq y_{jk}$, atau dengan kata lain waktu pelayanan di konsumen i ditambah dengan waktu perjalanan dari konsumen i ke j harus kurang dari atau sama dengan waktu pelayanan di konsumen j . Bentuk linearnya adalah :

$$y_{ik} + s_i + t_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ijk}) \leq y_{jk}, \quad \forall i, j \in N, \quad \forall k \in K, \quad (13)$$

dengan M_{ij} adalah konstanta besar yang tidak kurang dari nilai maksimum dari $l_i + t_{ij} - e_i ; (i, j) \in A$.

11. Kendala yang menyatakan waktu pelayanan di setiap konsumen memenuhi *time windows* artinya dipastikan waktu pelayanan konsumen berada dalam selang waktu ditentukan oleh konsumen i :

$$\begin{aligned}
 e_i &\leq y_{ik}, & \forall i, k, i \geq 1 \\
 y_{ik} + s_i &\leq l_i & \forall i, k, i \geq 1, \\
 y_{ik} &\geq 0, & \forall i, k, i \neq 1.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

12. Variabel x_{ijk} dan w_k merupakan variabel biner:

$$\begin{aligned}
 x_{ijk} &= \begin{cases} 1, & \text{jika kendaraan } k \text{ berjalan dari lokasi } i \text{ ke lokasi } j \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} \\
 w_k &= \begin{cases} 1, & \text{jika kendaraan } k \text{ digunakan} \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Keterangan:

- u_{ik} = variabel tambahan untuk kendala eliminasi *subtour* untuk konsumen i .
- u_{jk} = variabel tambahan untuk kendala eliminasi *subtour* untuk konsumen j .
- v_k = kecepatan kendaraan k .
- t_{ijk} = lama perjalanan dari konsumen i ke konsumen j dengan kendaraan k .
- s_i = lama pelayanan konsumen i
- y_{ik} = waktu dilayani konsumen i
- $[e_i, l_i]$ = *time windows* yang menunjukkan waktu tercepat dan waktu terlama dalam melayani konsumen i
- M = konstanta positif yang nilainya relatif besar (10000)
- I = himpunan semua depot.
- J = himpunan semua konsumen.
- K = himpunan kendaraan.
- N = himpunan konsumen dan depot.
- d_j = permintaan dari konsumen j .
- Q_k = kapasitas kendaraan k (50 *crate*)

Menyelesaikan Masalah

Penyelesaian model VRP *time windows* dengan pengemudi sesekali ini dilakukan dengan menggunakan data pendistribusian produksi roti [11]. Data tersebut dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1 menunjukkan jarak antar konsumen dengan depot. Jarak ini ditulis dengan satuan kilometer (km), dimana 1 menyatakan distributor (depot) dan 2 sampai 11 menyatakan konsumen.

Tabel 2 merupakan daftar permintaan, waktu pelayanan, waktu awal dan akhir pelayanan dan batasan waktu (*time windows*) dari tiap konsumen, data ini di peroleh dari penelitian Meithania [11].

Dalam penyelesaian model ini juga menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Waktu pengiriman pada setiap konsumen dapat dilakukan kapan saja pada selang waktu pukul 07.00-16.00.

2. Jumlah kendaraan yang digunakan adalah 6 kendaraan. 3 kendaraan milik perusahaan yang dinotasikan dengan KR1 (kecepatan 0.5 km/menit), KR2 (kecepatan 0.7 km/menit), KR3 (kecepatan 1.2 km/menit) dan 3 kendaraan milik pengemudi sesekali yang dinotasikan dengan KS1 (kecepatan 0.5 km/menit), KS2 (kecepatan 0.7 km/menit), KS3 (kecepatan 1.3 km/menit).
3. Kapasitas masing-masing kendaraan 50 *crate*.
4. Biaya pendistribusian untuk kendaraan milik perusahaan adalah 5500 satuan nilai uang/km.
5. Biaya penggunaan untuk pengemudi milik perusahaan adalah 50000 satuan nilai uang.

Tabel 1 Jarak antarlokasi depot dan konsumen (km)

Jarak	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	28.6	27.3	29.3	27.3	29.4	29.8	20.9	16.5	33.6	29.8
2	28.6	0	4.3	7.7	5.8	6.8	10.2	9.6	8	13.7	6.8
3	27.3	4.3	0	11.4	9.9	8	8	8.1	8.3	8.4	3.4
4	29.3	7.7	11.4	0	4.6	6.4	15.9	14.7	13	12.4	11
5	27.3	5.8	9.9	4.6	0	10.5	16.8	16.8	11.1	15.6	13.3
6	29.4	6.8	8	6.4	10.5	0	16.8	15.3	12.1	7.2	5.7
7	29.8	10.2	8	15.9	16.8	16.8	0	11.1	18.7	17.5	7.2
8	20.9	9.6	8.1	14.7	16.8	15.3	11.1	0	5.4	14.4	11.2
9	16.5	8	8.3	13	11.1	12.1	18.7	5.4	0	19.6	10.8
10	33.6	13.7	8.4	12.4	15.6	7.2	17.5	14.4	19.6	0	10
11	29.8	6.8	3.4	11	13.3	5.7	7.2	11.2	10.8	10	0

Tabel 2 Banyaknya permintaan, waktu pelayanan dan *time windows*

<i>Node</i>	Jumlah permintaan pengiriman (<i>crate</i>)	Waktu pelayanan (menit)	Waktu awal dan akhir pelayanan [e_i, l_i]	<i>Time windows</i> (menit ke)
1	-	-	[0,0]	-
2	7	34	[13,160]	07.13-09.40
3	9	47	[16,158]	07.16-09.38
4	12	54	[27,164]	07.27-09.44
5	15	18	[40,131]	07.40-09.11
6	4	8	[11,102]	07.11-08.42
7	11	60	[30,180]	07.30-10.00
8	12	37	[34,134]	07.34-09.14
9	8	91	[6,177]	07.06-09.57
10	37	81	[23,130]	07.23-09.10
11	18	58	[18,119]	07.18-08.59

Hasil Penentuan Rute Kendaraan dan *Time Windows* yang Berlaku

Bagian ini memaparkan hasil dari implementasi model VRPTW dengan pengemudi sesekali. Tujuan akhir dari masalah ini adalah menemukan rute yang meminimumkan biaya pendistribusian yang dikeluarkan perusahaan saat kendaraan mengantarkan barang, dan kendaraan dapat menyesuaikan waktu kapan harus

melayani konsumen. Selanjutnya dalam masalah ini dibagi menjadi tiga kasus penyelesaian yang dilakukan dengan menggunakan biaya tetap penggunaan kendaraan 50000 dan biaya tetap perjalanan 5500 untuk kendaraan milik perusahaan. Biaya tersebut berlaku sama untuk setiap kasus, sedangkan biaya imbalan untuk pengemudi sesekali berbeda-beda pada setiap kasus. Pada kasus pertama, menggunakan imbalan sebesar 4000. Kasus kedua, menggunakan biaya imbalan sebesar 10000 dan kasus ketiga, menggunakan biaya imbalan sebesar 25000. Selanjutnya akan ditentukan juga *time windows* yang berlaku pada tiap konsumen disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3 Hasil penyelesaian model untuk setiap kasus.

Kasus 1				
Kendaraan	Rute yang terbentuk	Akumulasi jarak tempuh (km)	Akumulasi muatan	Biaya (Rp)
KR2	1-9-1	33	8	231500
KR3	1-11-3-1	60.5	27	382750
KS1	1-8-7-1	61.8	23	247200
KS2	1-2-5-4-1	89.8	34	273200
KS3	1-6-10-1	70.2	41	280800
Jumlah (nilai objektif)				1415450
Kasus 2				
Kendaraan	Rute optimal	Akumulasi jarak tempuh (km)	Akumulasi muatan	Biaya (Rp)
KR1	1-8-7-1	61.8	23	389900
KR2	1-2-5-4-1	89.8	34	425650
KR3	1-6-10-1	70.2	41	436100
KS2	1-11-3-1	60.5	27	605000
KS3	1-9-1	33	8	330000
Jumlah (nilai objektif)				2186650
Kasus 3				
Kendaraan	Rute optimal	Akumulasi jarak tempuh (km)	Akumulasi muatan	Biaya (Rp)
KR1	1-8-7-1	61.8	23	389900
KR2	1-2-5-4-1	89.8	34	425650
KR3	1-6-10-1	70.2	41	436100
KS1	1-9-1	33	8	1512500
KS3	1-11-3-1	60.5	27	825000
Jumlah (nilai objektif)				3589150

Tabel 3 menjelaskan hasil yang diperoleh dari masing-masing kasus. Misalnya pada kasus 1, terdapat 5 kendaraan yang digunakan dan masing-masing kendaraan KR2, KR3, KS1, KS2 dan KS3. Rute kendaraan KR2 adalah 1-9-1, rute kendaraan KR3 adalah 1-11-3-1, rute kendaraan KS1 adalah 1-8-7-1, rute kendaraan KS2 adalah 1-2-5-4-1, dan rute kendaraan KS3 adalah 1-6-10-1. Nilai objektif sebesar 1415450. Penjelasan ini berlaku untuk kasus dan rute-rute pada tiap kasus selanjutnya.

Hasil model *vehicle routing problem time windows* dengan pengemudi sesekali ini menunjukkan bahwa rute yang ditempuh oleh kendaraan milik

perusahaan dan kendaraan milik pengemudi sesekali adalah rute yang optimal, yaitu rute tersebut merupakan rute yang paling minimum pada proses pendistribusian kepada konsumen yang dapat meminimalkan biaya dalam proses pendistribusian. Lama pelayanan dan *time windows* telah diketahui, sedangkan lama perjalanan dan waktu konsumen mulai dilayani disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4 Hasil penyelesaian model dengan *Time windows* untuk setiap kasus.

Kasus 1					
Kendaraan	Rute	Lama perjalanan t_{ijk}	Waktu mulai dilayani (y_{ik})	Lama pelayanan s_{ik} (menit)	<i>Time windows</i> $[e_i, l_i]$
KR2	1-9	33	86	91	07.06-09.57
	9-1	33	-	-	-
KR3	1-11	24.83	50.16	58	07.18-08.59
	11-3	2.83	111	47	07.16-09.38
KS1	3-1	22.75	-	-	-
	1-8	41.8	41.8	37	07.34-09.14
	8-7	22.2	120	60	07.30-10.00
KS2	7-1	59.6	-	-	-
	1-2	40.85	43.14	34	07.13-09.40
	2-5	8.28	85.42	8	07.40-09.11
KS3	5-4	6.57	110	54	07.27-09.44
	4-1	41.85	-	-	-
	1-6	24.83	50.16	8	07.11-08.42
	6-10	22.2	111	81	07.23-09.10
	10-1	59.6	-	-	-
Kasus 2					
Kendaraan	Rute	Lama perjalanan t_{ijk}	Waktu mulai dilayani (y_{ik})	Lama pelayanan s_{ik} (menit)	<i>Time windows</i> $[e_i, l_i]$
KR1	1-8	41.8	41.8	37	07.34-09.14
	8-7	22.2	120	60	07.30-10.00
	7-1	59.6	-	-	-
KR2	1-2	40.85	40.85	34	07.13-09.40
	2-5	8.28	83.14	18	07.40-09.11
	5-4	6.57	107.71	54	07.27-09.44
	4-1	41.85	-	-	-
KR3	1-6	24.83	50.16	58	07.18-08.59
	6-10	2.83	111	47	07.16-09.38
	10-1	22.75	-	-	-
KS2	1-11	42.57	42.57	47	07.18-08.59
	11-3	4.85	111	58	07.16-09.38
	3-1	22.92	-	-	-
KS3	1-9	12.69	86	91	07.06-09.57
	9-1	12.69	-	-	-
Kasus 3					
Kendaraan	Rute	Lama perjalanan t_{ijk}	Waktu mulai dilayani (y_{ik})	Lama pelayanan s_{ik} (menit)	<i>Time windows</i> $[e_i, l_i]$
KR1	1-8	41.8	60.8	37	07.34-09.14
	8-7	22.2	120	60	07.30-10.00
	7-1	59.6	-	-	-
KR2	1-2	40.85	43.14	34	07.13-09.40
	2-5	8.28	85.42	18	07.40-09.11

	5-4	6.57	110	54	07.27-09.44
	4-1	41.85	-	-	-
KR3	1-6	24.5	24.5	8	07.11-08.42
	6-10	6	49	81	07.23-09.10
	10-1	28	-	-	-
KS1	1-9	33	86	91	07.06-09.57
	9-1	33	-	-	-
KS3	1-11	21	22.92	47	07.18-08.59
	11-3	2.61	111	58	07.16-09.38
	3-1	22.92	-	-	-

Hasil penyelesaian model VRPTW dengan pengemudi sesekali untuk kasus 1 pada Tabel 4, sebagai penjelasan dengan menggunakan kendaraan KR2 rute yang terbentuk adalah 1-8-7-1. Dari depot 1 ke konsumen 8 menghasilkan lama perjalanan 41.8 menit, dan konsumen mulai dilayani di menit ke-41.8 dengan lama pelayanan adalah 37 menit, maka total waktu yang dibutuhkan saat melakukan perjalanan dari depot 1 ke konsumen 8 ditambah lama pelayanan pada konsumen 8 adalah 78.8. Kemudian konsumen berangkat menuju konsumen 7 selama 22.2 menit, maka kendaraan tiba pada menit ke-101, dan konsumen dilayani pada menit ke-120, dengan lama pelayanan selama 60 menit maka total waktu yang dibutuhkan adalah 180 menit di mana total waktu ini diperoleh dari jumlah waktu perjalanan, waktu melayani dan lamanya pelayanan di konsumen 8 dan konsumen 7. Selanjutnya, setelah melakukan pelayanan di konsumen 8 dan konsumen 7, kendaraan melakukan perjalanan kembali ke depot yang membutuhkan waktu selama 59.6 menit, maka kendaraan tiba pada menit ke-239.6. Penjelasan ini juga berlaku pada rute-rute untuk ketiga kasus tersebut.

Jadwal perjalanan dan pelayanan yang dihasilkan pada formulasi model tidak kontinu, artinya terdapat jeda waktu sebagai toleransi keberangkatan suatu kendaraan. Waktu toleransi keberangkatan kendaraan tersebut dari berakhirnya waktu pelayanan pada agen tersebut sampai dengan waktu mulai pelayanan agen selanjutnya dikurangi dengan lama perjalanan ke agen selanjutnya. Setelah selesai mendistribusikan barang ke agen-agen, kendaraan harus kembali ke depot.

Penyelesaian model memberikan informasi disamping perusahaan menggunakan kendaraan miliknya sendiri dalam proses pendistribusian, perusahaan juga menggunakan kendaraan milik pengemudi sesekali untuk beberapa rute pendistribusian agar dapat meminimumkan total biaya dalam proses pendistribusian tersebut. Konsep kolaborasi antara kendaraan milik perusahaan dan kendaraan milik pengemudi sesekali dalam proses pendistribusian ini sangat berpengaruh dalam meminimumkan total biaya pada pendistribusian.

Total biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan pada penyelesaian model VRPTW dengan pengemudi sesekali akan minimum ketika perusahaan lebih banyak menggunakan kendaraan milik pengemudi sesekali dengan imbalan yang rendah, karena jika perusahaan melakukan pendistribusian dengan kendaraan milik sendiri, perusahaan harus menyiapkan biaya tetap penggunaan kendaraan. Sebaliknya jika perusahaan menggunakan kendaraan milik pengemudi sesekali, perusahaan cukup menyiapkan biaya imbalan kepada pengemudi sesekali yang

dihitung jarak/km ketika kendaraan milik pengemudi sesekali mengunjungi konsumen. Selain itu jasa pengemudi sesekali digunakan pada saat dibutuhkan, misalnya ketika rute optimal yang terbentuk melebihi banyaknya kendaraan yang tersedia, maka perusahaan menggunakan jasa pengemudi sesekali walaupun sebenarnya kapasitas kendaraan milik perusahaan dapat memenuhi semua permintaan konsumen.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Masalah penentuan rute optimal dalam pendistribusian dapat diformulasikan dengan *vehicle routing problem time windows* (VRPTW) dengan pengemudi sesekali, sehingga selain dapat diketahui rute pendistribusian optimal, tiap kendaraan juga dapat menyesuaikan waktu konsumen dapat dilayani.

Dalam penyelesaian model yang menggunakan 3 kasus penyelesaian, yaitu dengan memberikan biaya imbalan kepada pengemudi sesekali yang berbeda-beda pada tiap kasus. Penyelesaian masalah ini menggunakan *software* LINGO 11.0 dapat menghasilkan rute optimal yang memenuhi semua permintaan konsumen dan juga dapat meminimumkan total biaya yang dikeluarkan dalam proses distribusi ketika imbalan yang diberikan kepada pengemudi sesekali kecil.

Saran

Hasil penelitian ini telah dibahas penyelesaian dengan menggunakan 3 nominal kompensasi yang diberikan kepada pengemudi sesekali. Metode penyelesaian yang digunakan adalah metode eksak yaitu metode *integer linier programming*, sehingga penelitian ini dapat dikembangkan lagi dengan menggunakan metode pendekatan seperti metode heuristik dan metaheuristik sebagai penyelesaian.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Archetti C, Savelsbergh M, Speranza G. 2016. The vehicle routing problem with occasional drivers. *European Journal of Operational Research*. doi:10.1016/j.ejor.2016.03.049.
- [2] Bisilisin FY, Herdiyeni H, Silalahi BP. 2014. Optimasi K-Means clustering menggunakan particle swarm optimization pada sistem identifikasi tumbuhan obat berbasis citra. *Jurnal Ilmu Komputer dan Agri-Informatika*. 3(1): 37-46.
- [3] Estuningsih RD, Guritman S, Silalahi BP. 2014. Algorithm construction of HLI hash function. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 86(1): 23-36.
- [4] Fadhillah F, Silalahi BP, Ilyas M. 2014. Modifikasi stepsize pada metode steepest descent dalam pengoptimuman fungsi: kasus fungsi kuadrat diagonal. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya* 13(1): 47-60.
- [5] Haqueqy N, Silalahi BP, Sitanggang, IS. 2016. Uji komputasi algoritme varian metode Newton pada permasalahan optimasi nonlinear tanpa kendala. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya* 15(2): 63-76.

- [6] Idaman S, Silalahi BP, Guritman S. 2018. Penyelesaian arah vektor gradien untuk menentukan step size metode steepest descent pada fungsi nonlinear kuadratik banyak variabel. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya* 17(1): 47-59.
- [7] Kallehauge B, Larsen J, Madsen OBG, Solomon MM. 2005. *Vehicle routing with time windows*. Di dalam Desaulniers G *et al.*, editor. Column Generation. New York: Springer.
- [8] Kautsar MMA, Silalahi BP, Guritman S. 2018. Paradox in a d-dimensional transportation problem. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 118 (3): 547-557.
- [9] Making SRM, Silalahi BP, Bukhari F. 2018. Multi depot vehicle routing problem dengan pengemudi sesekali. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya* 17(1): 75-86.
- [10] Mayyani H, Silalahi BP, Aman A. 2017. Frequency determination of bus rapid transit (BRT) applied on service system of trans mataram metro bus to minimize the operational cost. *International Journal of Engineering and Management Research (IJEMR)* 7(6), 134-140.
- [11] Meithania. 2014. masalah penentuan rute kendaraan antarjemput roti [Skripsi]. Bogor (ID) : Institut Pertanian Bogor.
- [12] Pratamasyari DA, Silalahi BP, Guritman S. 2017. Kombinasi varian metode Newton dan metode Halley untuk menyelesaikan persamaan tak linier. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya* 16(2): 1-12.
- [13] Raditya A. 2009. Penggunaan metode heuristik pada VRP dalam meminimumkan banyaknya dan jarak tempuh kendaraan [Skripsi]. Bogor (ID) : Institut Pertanian Bogor.
- [14] Saifudin MA, Silalahi BP, Sitanggang IS. 2015. Star catalog generation for satellite attitude navigation using density based clustering. *Journal of Computer Science*. 11(12): 1082- 1089.
- [15] Sarker RA, Charles SN. 2008. *Optimization Modelling: A Practical Introduction*. New York (US): CRC Pr.
- [16] Silalahi BP. 2014. Kasus-kasus buruk penggunaan metode titik interior pada optimisasi linear. *Jurnal Matematika Integratif* 10(1): 9-17.
- [17] Silalahi BP. 2014. Sharper analysis of upper bound for the iteration complexity of an interiorpoint method using primal-dual full-Newton step algorithm. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 95(1): 69-80.
- [18] Silalahi BP, Dewi MS. 2014. Comparison of sensitivity analysis on linear optimization using optimal partition and optimal basis (in the simplex method) at some cases. *Published by Indonesian Mathematical Society*. Apr: 82-90.
- [19] Silalahi BP, Laila R, Sitanggang IS. 2017. A combination method for solving nonlinear equations. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 2017*. 166(1): 012011.
- [20] Silalahi BP, Wungguli D, Guritman S. 2015. Steepest descent method with new step sizes. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*. 9(7): 378-384.
- [21] Toth P, Vigo D. 2002. *The Vehicle Routing Problem*. Philadelphia (US): Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [22] Wihartiko FD, Buono A, Silalahi BP. 2017. Integer programming model for optimizing bus timetable using genetic algorithm. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 2017*. Vol. 166: 012016.
- [23] Winston WL. 2004. *Operations Research Applications and Algorithms*. Ed ke-4. New York (US): Duxbury.