

**ANALISIS PROBLEMATIKA PERKULIAHAN ANALISIS REAL**Molli Wahyuni<sup>✉</sup>

*Dosen Tidak Tetap pada Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai  
Mahasiswa S3 Program Studi Ilmu Pendidikan Orientasi Matematika dan IPA (MIPA)  
Universitas Negeri Padang  
[whykpr@gmail.com](mailto:whykpr@gmail.com)*

**ABSTRAK**

*Artikel ini disusun bertujuan untuk menyajikan berbagai permasalahan yang terjadi pada perkuliahan analisis real pada umumnya yang dialami oleh mahasiswa program sarjana matematika dan sarjana pendidikan matematika. Mata kuliah Analisis Real bertujuan untuk mendidik peserta kuliah agar: a) memiliki pengetahuan dasar analisis matematika, khususnya tentang bilangan, barisan, fungsi, limit, dan turunan, b) mampu bernalar secara logis dan mengekspresikan hasil penerapannya secara tertulis, sistematis dan rigorous. Analisis real merupakan salah satu mata kuliah yang sering dianggap oleh mahasiswa yang kuliah pada program studi matematika dan pendidikan matematika. Pada makalah ini, penulis memaparkan berbagai alternatif solusi yang disarankan dapat dilakukan untuk membantu mahasiswa dalam menghadapi perkuliahan analisis real. Upaya perbaikan kualitas juga dapat dilakukan oleh dosen diantaranya dengan melakukan sejumlah intervensi, menerapkan Lesson Study, menerapkan pendekatan RME, pengembangan buku teks analisis real.*

**Kata Kunci :** *Analisis Real, Lesson Study, RME*

**ABSTRACT**

*This article was compiled aims to present a wide range of problems that occur in the course of real analysis is generally experienced by undergraduate students in mathematics and mathematics education scholars. Real Analysis courses aimed at educating participants courses in order to: a) have a basic knowledge of mathematical analysis, especially about numbers, sequences, functions, limits, and derivatives, b) is able to reason logically and express the results in writing them reason, systematic and rigorous. Analysis estate is one of the subjects that are often considered by students who study on courses of mathematics and mathematics education. In this paper, the authors describe the various alternatives suggested solutions can be done to help students in the face of real analysis lectures. Quality improvement efforts can also be conducted by lecturers include making a number of interventions, applying Lesson Study, apply the RME approach, textbook development real analysis.*

**Keywords :** *Real analysis, LessonStudy, Realistik Mathematic Education (RME)*

---

✉ Corresponding author:

Address : Bankinang, Kabupaten Kampar, Riau

Email : [whykur@gmail.com](mailto:whykur@gmail.com)

ISSN 2579-9258

---

## Pendahuluan

Proses pembelajaran matematika di perguruan tinggi membutuhkan kemampuan kognitif tingkat tinggi, seperti kemampuan analisis, sintesis, dan evaluasi, tidak hanya sekedar ingatan pengetahuan faktual ataupun aplikasi sederhana dari berbagai formula atau prinsip. Mahasiswa diharapkan mampu untuk bernalar dengan baik dan mengekspresikan hasil penalarannya secara tertulis, sistematis dan ketat (*Rigorous*). Kemampuan ini dapat diperoleh melalui kegiatan pembuktian.

Mengingat pentingnya kemampuan pembuktian matematik dalam pembelajaran matematika maka *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (2000) telah menekankan adanya pembuktian dalam matematika sekolah, yang juga mencerminkan pergeseran ke arah pemecahan masalah dan berpikir kritis. Tapi untuk mengkonstruksi bukti yang lebih rumit diberikan pada perkuliahan di perguruan tinggi. Kurikulum matematika harus mencakup banyak dan beragam pengalaman yang memperkuat dan memperluas keterampilan penalaran logis siswa sehingga semua siswa dapat: (1) mengenal penalaran dan pembuktian sebagai aspek-aspek fundamental matematika, (2) membuat konjektur dan memeriksa kebenaran dari konjektur itu, (3) mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan pembuktian

matematik, dan (4) memilih dan menggunakan bermacam-macam jenis penalaran dan metode pembuktian.

Dalam matematika, pembuktian adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Pembuktian adalah penerapan sejumlah berhingga langkah-langkah logis dari apa yang diketahui (aksioma, prinsip-prinsip atau hasil yang telah dibuktikan sebelumnya) dan menerapkan prinsip-prinsip logika, untuk menciptakan argumen deduktif yang valid guna mencapai suatu kesimpulan menggunakan aturan inferensi yang dapat diterima. Argumen-argumen ini dapat berasal dari premis pernyataan itu sendiri, teorema-teorema lainnya, definisi, dan dapat juga berasal dari postulat dimana sistem matematika tersebut berasal. Yang dimaksud logis di sini, adalah semua langkah pada setiap argumen harus dijustifikasi oleh langkah sebelumnya.

Pembuktian memegang peranan yang sangat penting dalam matematika karena pembuktian merupakan bagian yang mutlak dan mendasar dalam matematika dan bagian yang tidak terpisahkan dari matematika. Karena merupakan bagian yang esensial dalam melakukan *doing*, komunikasi, dan *recording* matematika. Peran pembuktian yaitu: 1) untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan itu benar, 2) untuk menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar, 3)

untuk mengkomunikasikan pengetahuan matematika, 4) untuk menemukan atau menciptakan matematika baru, atau 5) mensistematisasikan pernyataan menjadi sistem aksiomatis.

Untuk itu mahasiswa matematika harus memiliki kemampuan melakukan pembuktian matematik. Dalam pembuktian matematik terdapat dua kemampuan yaitu kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti. Maka berargumentasi secara matematik dan melakukan pembuktian haruslah menjadi bagian yang esensial bagi mahasiswa yang belajar matematika. Karena itu pengkajian tentang pengajaran dan pembelajaran pembuktian adalah komponen kunci dalam peningkatan pembelajaran matematika secara menyeluruh. Ada beberapa alasan mengapa perlu diberikan pengajaran pembuktian yaitu: 1) bukti adalah bagian yang integral dalam matematika, 2) untuk verifikasi dan penemuan fakta, 3) untuk pengembangan kemampuan berpikir logis dan kritis siswa, dan 4) mempercepat dan meningkatkan pemahaman matematik siswa.

Salah satu mata kuliah yang mendukung hal tersebut adalah Analisis Real. Mata kuliah Analisis Real diberikan pada Program Studi Matematika dan Pendidikan Matematika perguruan tinggi di Indonesia. Mata kuliah Analisis Real bertujuan untuk mendidik peserta kuliah

agar: a) memiliki pengetahuan dasar analisis matematika, khususnya tentang bilangan, barisan, fungsi, limit, dan turunan, b) mampu bernalar secara logis dan mengekspresikan hasil pernalarannya secara tertulis, sistematis dan *rigorous*. Melalui perkuliahan Analisis Real, mahasiswa berlatih untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan itu benar, menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar, mengkomunikasikan pengetahuan matematika, dan menuliskannya dalam bahasa yang logis dan sistematis. Kemampuan tersebut dapat ditingkatkan melalui kegiatan pembuktian. Kegiatan pembuktian banyak dilakukan dalam mata kuliah Analisis Real yang sarat dengan definisi, lemma, dan teorema. Agar mahasiswa dapat memahami Analisis Real dengan baik maka mahasiswa dituntut untuk dapat memahami setiap lemma dan teorema yang dipelajari. Salah satu syarat agar hal tersebut tercapai adalah mahasiswa harus mempunyai kemampuan dalam membuktikan lemma dan teorema yang dipelajari dan beberapa permasalahan yang terkait dengan penerapan definisi, lemma, dan teorema. Dengan demikian, peningkatan pemahaman mahasiswa dalam Analisis Real dapat dilakukan melalui peningkatan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian. Namun dalam kenyataan ditemui bahwa banyak

mahasiswa mengalami kesulitan dalam pembuktian.

Berdasarkan pengalaman mengajar mata kuliah Analisis Real di Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai Riau, ditemukan bahwa mahasiswa biasanya mengalami kesulitan dalam beberapa hal yaitu: 1) menilai kebenaran dari sebuah pernyataan, 2) memahami informasi, 3) menemukan ide, dan 4) menuliskan ide.

Yuslenita Muda (2017), salah seorang dosen Universitas Islam Negeri Suska Pekanbaru yang kini sedang kuliah di University of Essex Colchester Inggris yang sedang mendalami tentang analisis real mengungkapkan bahwa analisis real dirasakan sulit oleh mahasiswa karena terlalu abstrak, meskipun namanya real. Mahasiswa sering tidak paham dari mana proses pembuktian harus dimulai. Beberapa solusi yang pernah ia tempuh untuk memperbaiki kualitas perkuliahan dan membantu mahasiswa menyelesaikan permasalahan analisis real antara lain membimbing mahasiswa menyelesaikan masalah step by step, memberikan ilustrasi dalam bentuk gambar, memberikan metode terbaik dan dosen juga bertanya kepada rekan sejawat.

Kelemahan dan kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika antara lain:

1. Mahasiswa tidak dapat menyatakan definisi dengan bahasanya sendiri.

2. Intuisi pemahaman terhadap suatu konsep yang dimiliki mahasiswa sedikit.
3. *Concept images* untuk mengerjakan pembuktian tidak cukup.
4. Mahasiswa tidak dapat dan tidak berkeinginan membuat contoh sendiri.
5. Mahasiswa tidak mengetahui bagaimana menggunakan definisi untuk
6. memperoleh struktur pembuktian yang menyeluruh.
7. Mahasiswa tidak dapat memahami dan menggunakan bahasa dan notasi matematik.
8. Mahasiswa tidak mengetahui bagaimana memulai pembuktian.

Agar dapat membuat pembuktian matematik dengan baik, mahasiswa dituntut memiliki pengetahuan-pengetahuan prasyarat, misalnya logika matematika dan metode pembuktian dalam matematika. Dengan dimilikinya pengetahuan prasyarat tidak menjamin bahwa mahasiswa dapat mengembangkan dan mengkomunikasikan suatu bukti. Untuk dapat mengembangkan dan mengkomunikasikan suatu pembuktian matematika dengan baik, mahasiswa dituntut untuk memiliki kreativitas, intuisi, dan pengalaman. Memiliki intuisi berarti memiliki kemampuan untuk membuat

konjektur yang merupakan bagian yang sangat penting dalam proses pembuktian matematik. Sedangkan memiliki kreativitas berarti memiliki kemampuan untuk menyatakan persoalan dalam berbagai model yang operasional. Kreativitas, intuisi, dan pengalaman dapat dikembangkan dan disediakan melalui pembelajaran.

Beberapa hasil penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa sangat sulit mengkonstruksi bukti sekalipun bukti sederhana atau rutin sekalipun. Hasil-penelitian tersebut diantaranya adalah pengantar pembuktian (Moore, 1994), analisis real (Bills and Tall, 1998) dan , aljabar abstrak (Weber 2001). Mahasiswa pada umumnya tidak menentukan apa yang dinyatakan dalam sebuah bukti (Resio and Godino: 2001) dan mahasiswa tidak dapat menentukan apakah suatu bukti valid atau tidak.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah sebagai berikut :

- a. Mengapa mahasiswa kesulitan dalam mengkonstruksi pembuktian pada mata kuliah analisis real?
- b. Bagaimana upaya untuk meningkatkan kemampuan berfikir mahasiswa dalam mata kuliah Analisis Real?

## **Kajian Teori**

### **1. Kesulitan Belajar**

Di dalam proses pembelajaran maupun perkuliahan terdapat beberapa faktor yang menjadi penghambat keberhasilan dalam proses belajar mengajar. Kesulitan dalam belajar merupakan salah satu faktor penghambat dalam mencapai tujuan pembelajaran yang telah ditetapkan. Faktor-faktor tersebut dapat digolongkan menjadi dua golongan, yaitu faktor intern dan faktor ekstern. Faktor intern adalah faktor yang ada di dalam diri individu yang sedang belajar, sedangkan faktor ekstern adalah faktor yang ada di luar individu (Slameto, 2010:54). Kedua faktor tersebut mempunyai arti yang sangat penting dalam rangka membantu seseorang dalam mencapai prestasi belajar yang sebaik-baiknya.

Adapun faktor-faktor intern yang dimaksud terdiri dari (1) Faktor jasmaniah: faktor kesehatan dan cacat tubuh. (2) Faktor psikologis: intelegensi, perhatian, minat, bakat, motivasi, kematangan, dan kesiapan. (3) Faktor kelelahan. Sedangkan faktor ekstern yang dimaksud terdiri dari (1) Faktor keluarga: cara orang tua mendidik, relasi antaranggota keluarga, suasana rumah, keadaan ekonomi keluarga, pengertian orang tua, dan latar belakang kebudayaan. (2) Faktor sekolah: metode mengajar, kurikulum, relasi guru dengan siswa, relasi siswa dengan siswa,

disiplin sekolah, alat pelajaran waktu sekolah, standar pelajaran di atas ukuran, keadaan gedung, metode belajar, dan tugas rumah. (3) Faktor masyarakat: kegiatan siswa dalam masyarakat, mass media, teman bergaul, dan bentuk kehidupan masyarakat, (Slameto, 2010:54).

## 2. Miskonsepsi

Miskonsepsi dapat dipandang sebagai suatu pengertian yang tidak akurat terhadap konsep, penggunaan konsep yang salah, klasifikasi contoh-contoh yang salah, dan hubungan konsep-konsep yang tidak benar. Bentuk miskonsepsi dapat berupa kesalahan konsep, hubungan yang tidak benar antar konsep, dan gagasan intuitif atau pandangan yang keliru (Suparno, 2005) dalam Sastradi (2013).

Miskonsepsi terbentuk secara alami dan tidak terelakkan dari bagian proses belajar. Miskonsepsi sering dibawa siswa dari tingkat sekolah dasar sampai ke perguruan tinggi. Konsep massa, gaya berat, berat/beban, kelembaman massa dan massa gravitasi juga merupakan konsep yang paling sering menimbulkan miskonsepsi di dalam ilmu fisika oleh para siswa, dari sekolah menengah hingga ke universitas (Gonen, 2008) dalam Sastradi (2013).

Penyampaian informasi yang kurang jelas dan kurang lengkap yang diterima oleh siswa dalam proses belajar juga diduga sebagai penyebab terjadinya

miskonsepsi. Bahkan pemilihan strategi pengajaran yang kurang tepat, misalnya penggunaan analogi yang kurang tepat, dapat juga mengganggu proses berpikir siswa dan mendapat kesulitan dalam memahami konsep-konsep yang dipelajari.

Miskonsepsi mahasiswa dapat dideteksi dengan : a) memberi tes diagnostik pada awal perkuliahan atau pada setiap akhir pembahasan. Bentuknya dapat berupa tes obyektif pilihan ganda atau bentuk lain seperti menggambarkan diagram fisika atau vektoris, grafik, atau penjelasan dengan kata-kata; b) memberi tugas-tugas terstruktur misalnya tugas mandiri atau kelompok sebagai tugas akhir pengajaran atau tugas pekerjaan rumah ;c) memberi pertanyaan terbuka, pertanyaan terbalik (*reverse question*) atau pertanyaan yang kaya konteks (*context-rich problem*); d) mengoreksi langkah-langkah yang digunakan siswa atau mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal esai; e) mengajukan pertanyaan-pertanyaan terbuka secara lisan kepada siswa atau mahasiswa; f) mewawancarai misalnya dengan menggunakan kartu pertanyaan.

## 3. Kemampuan Matematik

Sumarmo dan Hendriana (2014:19), kemampuan matematik dapat diklasifikasikan dalam lima kompetensi utama yaitu: pemahaman matematik, pemecahan masalah, komunikasi matematik, koneksi matematik, dan

penalaran matematik. Kemampuan yang lebih tinggi diantaranya adalah kemampuan berfikir kritis matematik dan kemampuan berfikir kreatif matematik.

#### **a. Pemahaman Matematik**

Pemahaman matematik (*mathematical understanding*) dalam hal ini berbeda dengan pemahaman yang terdapat pada taksonomi bloom. Pemahaman matematik memiliki tingkat kedalaman tutunan kognitif yang berbeda. Selain mengetahui suatu teorema, pemahaman matematis juga akan memberikan kemampuan untuk menguasai aspek-aspek dalam membuktikan serta aplikasi dari teorema tersebut.

#### **b. Pemecahan Masalah Matematik**

Pemecahan masalah matematik merupakan suatu proses memecahkan masalah tidak secara langsung melainkan harus melalui cara lain terlebih dahulu.

#### **c. Koneksi Matematik**

Pentingnya memiliki kemampuan koneksi matematik (NCTM, 1989) : memahami konsep matematika, menjelaskna keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat,

efisien dan tepat dalam menyelesaikan masalah.

#### **d. Komunikasi Matematik**

Komponen tujuan pembelajaran (NCTM, 1999): mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram atau ekspresi matematika untuk memperjelas keadaan atau masalah dan memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, sikap rasa ingin tahu, perhatian dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam menyelesaikan masalah.

#### **e. Penalaran Matematik**

- 1) Penalaran induktif. Merupakan suatu penarikan kesimpulan berdasarkan pengamatan terhadap data terbatas sehingga nilai kebenarannya bersifat probabilistik.
- 2) Penalaran deduktif. Merupakan penarikan kesimpulan berdasarkan aturan yang disepakati sehingga nilai kebenarannya bersifat mutlak.

#### **f. Berfikir Kritis Matematik**

Berfikir kritis merupakan berfikir reflektif yang beralasan dan difokuskan penetapan apa yang

dipercayai atau dilakukan. Indikator kemampuan berfikir kritis adalah:

- 1) Memfokuskan diri pada pertanyaan
- 2) Menganalisis dan mengklarifikasi pertanyaan, jawaban dan argumen
- 3) mempertimbangkan sumber yang terpercaya
- 4) Mengamati dan menganalisis deduksi
- 5) Menginduksi dan menganalisis induksi
- 6) Merumuskan eksplanatori, kesimpulan dan hipotesis
- 7) Menarik pertimbangan yang bernilai
- 8) Menetapkan suatu aksi
- 9) Berinteraksi dengan orang lain.
- 10) Jika dihubungkan dengan Taksonomi Bloom maka berfikir kritis sebanding dengan analisis, sintesis dan evaluasi dari suatu konsep.

#### **g. Berfikir Kreatif Matematik**

Ciri-ciri komponen berfikir kreatif yaitu :

- 1) Ciri-ciri *Fluency*
  - a) Mencetuskan banyak ide, banyak jawaban, banyak penyelesaian masalah, banyak pertanyaan dengan lancar
- 2) Ciri-ciri *Flexibility*
  - a) Menghasilkan gagasan, jawaban atau pertanyaan yang variasi, dapat melihat masalah dari sudut pandang yang berbeda
  - b) Mencari banyak alternatif atau arah yang berbeda-beda
  - c) Mampu mengubah cara pendekatan atau cara pemikiran
- 3) Ciri-ciri *Originality*
  - a) Mampu melahirkan ungkapan baru yang unik
  - b) Memikirkan cara yang tidak lazim untuk mengungkapkan diri
  - c) Mampu membuat kombinasi-kombinasi yang tidak lazim dari bagian-bagian atau unsur-unsur.
- 4) Ciri-ciri *Elaboration*
  - a) Mampu memperkaya dan mengembangkan suatu gagasan atau produk
  - b) Menambah atau memerinci detail-detail dari suatu objek,

gagasan, atau situasi hingga menjadi lebih menarik.

## **Analisis dan Pemecahan Masalah**

### **1. Problematika Perkuliahan Analisis Real**

Dalam kehidupan sehari-hari individu secara normal menggunakan argumentasi informal yang bersifat institusional bergantung konteks dan suasana emosionalnya (Miller: 1991). Menurut Fernandes (Recio: 2002), ciri utama argumen ini adalah : (a) diaplikasikan pada isu yang relevan oleh orang yang membuat argumen, (b) argumen ini dinamis tergantung konteks dan situasi, (c) diaplikasikan pada tugas-tugas terbuka, samar, dan tidak deduktif, (d) menggunakan bahasa sehari-hari, bukan bahasa simbol dan formal, (e) digunakan dalam semua ranah pengetahuan, termasuk dalam matematika dan sains. Miller-Jones (1991), mahasiswa memiliki kesulitan membedakan argumentasi intuitif yang mereka gunakan dalam kehidupan sehari-hari dari pemikiran deduktif yang dikehendaki dalam perkuliahan. Recio dan Godino (2001) menyebutkan bahwa banyak teknik bukti yang salah justru digunakan dalam domain non-matematik. Misalnya, menarik konklusi umum dengan menguji beberapa kasus khusus biasanya digunakan dalam sains dan ilmu sosial.

Polya (Recio and Godino: 2002) mempelajari penalaran intuitif dalam matematika. Beliau memandang penalaran intuitif sebagai penalaran yang digunakan untuk memformulasikan dugaan matematika dan menamakannya *palusible reasoning*. Garuti (1998), terdapat kontinuitas dalam memproduksi dugaan dan mengkonstruksi bukti, oleh karena itu argumen matematika informal dapat mendasari level awal bukti matematika.

Faktor-faktor penyebab munculnya kesulitan dalam memproduksi bukti valid dikalangan mahasiswa telah banyak diungkap melalui hasil-hasil penelitian. Yackel dan Cobb (1996) menyebutkan istilah *sociomathematical norms* untuk menyatakan bagaimana pengaruh lingkungan seperti buku teks, komentar guru, dan umpan balik tugas-tugasnya menentukan kepercayaan matematika mahasiswa termasuk tindakannya. Dreyfus (1999) mengklaim bahwa “ apa yang sebuat dengan justifikasi matematika yang diterima “ adalah suatu contoh dari *sociomathematic norm*. Seperti yang telah dikemukakan di atas, perbedaan karir akademik mahasiswa, perbedaan tipe dari justifikasi yang dibutuhkan dapat menyebabkan kesulitan mahasiswa dalam membangun bukti. Tipe justifikasi mana yang dibuthkan? Hal ini jarang dijelaskan

kepada mahasiswa. Terkadang mahasiswa menerima informasi yang berbeda.

Rendahnya perkembangan kognitif mahasiswa juga merupakan salah satu penyebab kesulitan pemahaman konsep bukti. Piaget mengklaim bahwa anak tidak membedakan atau mengkonstruksi argumen deduktif hingga mereka sampai pada tingkat operasi formal dalam perkembangan kognitifnya. Weber (2001) meneliti perkembangan kognitif mahasiswa dan menemukan hanya 22% mahasiswa yang mencapai tingkat operasi formal dalam perkembangan kognitifnya. Hal serupa ditemukan oleh Tall (1991) dalam observasinya bahwa menyebutkan bahwa banyak mahasiswa (setidaknya awal tahun pertama) tidak dapat memahami bukti deduktif.

Faktor lain yang menjadi kesulitan dalam memproduksi bukti adalah kesulitan notasional. Pada kuliah tingkat lanjut, banyak bukti menggunakan notasi formal. Mahasiswa menemukan beberapa aspek kesulitan dari notasi ini diantaranya adalah: khususnya penggunaan multipel quantifier yang menyusahakan. Selden (1995) memintta 61 mahasiswa dari pengantar perkuliahan untuk mengubah pernyataan informal ke dalam bahasa kalkulus predikatif. Beliau menemukan bahwa mahasiswa yang sukses pada tugas ini kurang dari 10% dalam waktu yang telah ditentukan. Penelitian lain

(Dubinsky, 1988) berhasil mengilustrasikan bagaimana mengekaksi makna pernyataan logika berkuantor kelihatan sangat sulit dan merupakan proses kompleks. Penalaran mahasiswa tentang pernyataan multi quantified hanya melibatkan bagian predikat pernyataan dan mengabaikan bagaimana variabel dikuantifikasi. (Pinto dan Tall: 1999).

Faktor-faktor penyebab munculnya kesulitan memproduksi bukti yang valid di kalangan mahasiswa yang diungkap d atas menunjukkan kemungkinan adanya faktor internal yang dipengaruhi oleh faktor-faktor : jenis buku teks, komentar dosen, dan umpan balik dosen terhadap tugas-tugas mahasiswa, kebiasaan penalaran dalam kehidupan sosial mahasiswa, perkembangan kognitif mahasiswa dan, kesulitan pemahaman notasional.

Dalam pembelajaran matematika khususnya pada pembelajaran matematika lanjut yang berorientasi pembuktian, kita memerlukan cara pandang tentang bagaimana suatu bukti yang dapat diterima? kita membutuhkan pandangan tersebut, karena mahasiswa bukanlah seorang matematikawan, tetapi juga kita mengupayakan mereka memiliki konsep yang benar tentang bukti matematika. Bagi mahasiswa bukti haruslah dapat membantu memahami mengapa sesuatu pernyataan itu benar.

Setelah mengetahui permasalahan-permasalahan yang dihadapi mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematis pada mata kuliah analisis real, dapat dirumuskan intervensi-intervensi yang perlu diberikan guna mengatasi permasalahan yang dihadapi mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematis pada mata kuliah analisis real. Perumusan intervensi-intervensi tersebut didasarkan pada pengkajian yang dilakukan oleh peneliti terhadap permasalahan yang terjadi berdasarkan perspektif teori belajar yang telah dirumuskan oleh para pakar yang disesuaikan dengan karakteristik kemampuan serta kebiasaan belajar dan berpikir mahasiswa.

Sejumlah hasil penelitian menunjukkan bahwa permasalahan yang terjadi berkaitan dengan kemampuan pembuktian matematis mahasiswa disebabkan karena: 1) lemahnya penguasaan materi pra syarat seperti himpunan, sistem bilangan, sifat-sifat operasi biner, relasi dan fungsi, limit dan turunan fungsi; 2) kurangnya intensitas latihan dalam pembuktian matematis; 3) terlalu banyaknya definisi dan teorema yang harus dipelajari sehingga mahasiswa kebingungan dalam menentukan definisi atau teorema mana yang harus digunakan untuk membuktikan permasalahan yang diberikan.

## 2. Alternatif Pemecahan Masalah

Berdasarkan dugaan dan pengkajian di atas, maka dalam merumuskan intervensi guna mengatasi permasalahan yang terjadi, peneliti berpedoman pada teori belajar behaviorisme dan konstruktivisme, diantaranya teori penguatan (*reinforcement*) dari B.F Skinner, teori pembiasaan (*conditioning*) dari Pavlov, dan teori belajar interaksi sosial dari Vygotsky yang menekankan pada pemberian *scaffolding*. Adapun intervensi-intervensi yang dapat dirumuskan dari hasil pengkajian yang telah dilakukan peneliti diantaranya yaitu dengan: 1) memberikan penguatan (*reinforcement*) terhadap penguasaan materi pra syarat, 2) melakukan pembiasaan (*conditioning*) melalui kegiatan *drill, practice, and exercise*, dan 3) memberikan *scaffolding* berupa petunjuk pembuktian secara deduktif dengan menyertakan definisi atau teorema untuk melakukan pembuktian matematis.

Di samping itu, salah satu cara yang dapat ditempuh untuk memperbaiki kualitas perkuliahan analisis real yaitu melalui *Lesson study* (Darmadi, 2011). *Lesson study* adalah suatu model pembinaan profesi pendidik melalui pengkajian pembelajaran secara kolaboratif dan berkelanjutan berlandaskan

prinsip-prinsip kolegalitas yang saling belajar untuk membangun masyarakat belajar. Pada kegiatan *Lesson Study*, kolegalitas membicarakan praktik pembelajaran, saling mengobservasi kelas pembelajaran, membuat gagasan bersama mengenai kelas, dan saling mendorong satu sama lain dalam meningkatkan kualitas pembelajaran. Fungsi perencanaan antara lain penyusunan scenario pembelajaran beserta perangkat dan panduan observasinya yang dapat dipahami sesama dosen, pelatihan pembelajaran dan langsung diterapkan di kelas, pengimbasan pengetahuan secara kolaboratif dari pakar atau sesama dosen, penerapan suatu hasil penelitian pembelajaran yang telah dilakukan, dan penyusunan awal proposal penelitian tindakan kelas jika diperlukan. *Lesson Study* bukan suatu metode/model pembelajaran, tetapi merupakan suatu model pembinaan profesi pendidik dengan kebersamaan dan saling belajar di antara para pendidik. Para dosen bekerjasama secara kolaboratif dalam membuat perencanaan (*Plan*) pembelajaran yang meliputi briefing singkat tentang rencana pembelajaran yang akan dilaksanakan oleh dosen model, menyiapkan lembar observasi, RPS, LKM, atau perangkat lain yang diperlukan, dan memastikan agar pada waktu pengamatan nanti tidak keluar

masuk kelas, karena akan mengganggu konsentrasi mahasiswa.

Pelaksanaan dan observasi (*Do* dan *See*) meliputi seorang dosen model dan dosen lain sebagai observer. Observer mengambil tempat sedemikian hingga dapat leluasa mengamati jalannya proses pembelajaran tanpa mengganggu aktivitas dan konsentrasi mahasiswa. Observer tidak diperkenankan melakukan intervensi pada pembelajaran, seperti menegur dosen dan membantu atau bertanya kepada mahasiswa. Fokus observasi ditekankan pada aktivitas belajar mahasiswa, baik secara individual maupun kelompok, sesuai dengan pokok permasalahan yang diambil. Pengamat melakukan pengamatan secara penuh sejak awal sampai akhir pembelajaran. Selain mengamati siswa belajar, pengamat juga perlu memperhatikan teknik pengelolaan kelas yang dilakukan dosen, teknik mengefektifkan pencapaian tujuan pembelajaran, pemanfaatan media pembelajaran, dan upaya dosen membuat mahasiswa kreatif. Dalam diskusi refleksi mempunyai tahapan: 1) refleksi penyaji/dosen model tentang strategi pembelajaran yang telah dilakukan; 2) tanggapan/usul/saran dari observer yang difokuskan pada aktivitas pembelajaran mahasiswa sebagai hasil observasi dan bukan didasarkan pada opini/teori; 3) tanggapan balik dari penyaji/dosen model;

dan 4) menarik kesimpulan dan saran untuk perbaikan/perencanaan pembelajaran pada putaran berikutnya. Melalui kolegalitas pada kegiatan *Lesson Study* diharapkan permasalahan-permasalahan yang ada pada pembelajaran analisis real dapat dibahas bersama dan kualitas perkuliahan analisis real jadi lebih baik.

Somakim (2007) memaparkan bahwa dalam meningkatkan kemampuan matematis siswa dalam perkuliahan analisis real dapat juga dilaksanakan dengan penerapan pembelajaran matematika realistik. Pembelajaran matematika realistik merupakan teori belajar mengajar dalam pendidikan matematika. Teori pembelajaran matematika realistik pertama kali diperkenalkan dan dikembangkan di Belanda pada tahun 1970 oleh Institut Freudenthal. Freudenthal berpendapat bahwa matematika harus diartikan dengan realita dan matematika merupakan aktivitas manusia. Dari pendapat Freudenthal memang benar langkah baiknya dalam pembelajaran matematika harus ada hubungannya dengan kenyataan dan kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu manusia harus diberi kesempatan untuk menemukan ide dan konsep matematika dengan bimbingan orang dewasa. Matematika harus dekat dengan anak dan

kehidupan sehari-hari. Upaya ini dilihat dari berbagai situasi dan persoalan-persoalan “realistik”. Realistik ini dimaksudkan tidak mengacu pada realitas pada realitas tetapi pada sesuatu yang dapat dibayangkan. Misalnya, dengan memberikan mengarahkan siswa membuat poster tentang konvergen yang diawali dengan kondisi kehidupan sehari-hari.

Adapun menurut pandangan konstruktivis pembelajaran matematika adalah memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengkonstruksi konsep-konsep matematika dengan kemampuan sendiri melalui proses internalisasi. Guru dalam hal ini berperan sebagai fasilitator. Dalam pembelajaran matematika guru memang harus memberikan kesempatan kepada siswa untuk menemukan sendiri konsep-konsep matematika dengan kemampuan siswa sendiri dan guru terus memantau atau mengarahkan siswa dalam pembelajaran walaupun siswa sendiri yang akan menemukan konsep-konsep matematika, setidaknya guru harus terus mendampingi siswa dalam pembelajaran matematika.

Harini, dkk (2014) mengungkapkan bahwa miskonsepsi mahasiswa dapat dieksplorasi dengan pengembangan buku teks analisis real yang bermuatan peta pikiran. Cara ini dinilai merupakan salah satu strategi untuk

mengetahui penyebab miskonsepsi mahasiswa dalam pembuktian analisis real, sehingga dapat dilakukan tindak lanjut untuk membantu mahasiswa agar menggunakan konsep yang benar.

Beberapa hal yang juga perlu menjadi perhatian dalam mendukung perkuliahan analisis real adalah dukungan lingkungan. Dukungan keluarga sangat perlu dalam memotivasi mahasiswa dalam belajar. Dukungan dari sekolah antara lain penerapan metode pembelajaran yang mendukung, menjaga hubungan yang baik antara dosen dan mahasiswa serta membina mahasiswa agar dapat menjaga hubungan baik sesama. Dukungan dari masyarakat dapat diwujudkan salah satunya dengan memilih teman bergaul yang mendukung dalam pembelajaran.

## KESIMPULAN

Dari beberapa uraian di atas, maka dapat dibuat kesimpulan sebagai berikut :

1. Analisis Real merupakan salah satu mata kuliah yang diajarkan pada program studi pendidikan matematika. Mata kuliah ini membutuhkan kemampuan berfikir kritis mahasiswa, untuk mampu membuat pembuktian dalam permasalahan yang diajukan.
2. Permasalahan yang paling menonjol dihadapi dalam perkuliahan analisis real adalah terjadinya miskonsepsi mahasiswa terhadap materi sehingga menyulitkan dalam pembuktian.
3. Upaya perbaikan kualitas juga dapat dilakukan oleh dosen diantaranya dengan melakukan sejumlah intervensi, menerapkan *Lesson Study*, menerapkan pendekatan RME, pengembangan buku teks analisis real.
4. Upaya lainnya yang dapat dilakukan untuk meningkatkan kualitas perkuliahan analisis real adalah dengan melakukan pembenahan instrumental dan dukungan dari lingkungan.

## DAFTAR RUJUKAN

- Bills, E & Tall, D. 1998. *Overall Definitions in Advanced Mathematics*. The Case of least Upper Bound in Proceeding of PME 22 (2), Stellenbosch, South Africa.
- Buschman, L. 2004. *Teaching Problem Solving in Mathematics*. NCTM Journal. 10 (6). 302. Tersedia dalam: [www.nctm.org](http://www.nctm.org).
- Ernest, P. 1991. *The Philosophy of Mathematics Education*. Falmer Press tersedia dalam <http://www.questia.com/library/book/>.
- Hanna, G. & Janhke. 1996. *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Tersedia dalam <http://www.nap.edu/catalog/10126.html>.

- Hanna, G. and Jahnke, H.N. 1996, 'Proof and proving', in A. Bishop, K. Clements, C.
- Marzano. 1988. *Dimensions of Thinking: A Framework for Curriculum and Instruction*. Alexandria, Va: ASCD
- Moore, R. C. 1994. *Making the Transition to Formal Proof, dalam Journal of Educational Studies in Mathematics*. Springer Netherlands Volume 27(3) Oktober 1994. ISSN 0013-1954.
- Movshovitz & Hadar, N. 2001. *Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof*. Tersedia dalam [www-didactique.imag.fr/preuve/preuveBiblio.html](http://www.didactique.imag.fr/preuve/preuveBiblio.html).
- Perkins, D.N. & Weber, R.J. 1992. *Inventive Mind: Creative in Technology*. New York: University Press.
- Recio, A. M. & Godino, J. D. 2001. *Institutional and Personal Meanings of Proof*. *Educational Studies in Mathematics* 48 (1), 83-99. Tersedia dalam <http://www.math.ntnu.edu.tw>
- Sastradi, T. (2013) *Pengertian Prakonsepsi dan Miskonsepsi*. <http://mediafunia.blogspot.com/2013/03/pengertian-prakonsepsi-dan-miskonsepsi.html>.
- Selden, A. & Selden, J. 2002. *Validation of Proofs Written as Texts: Can Undergraduates Tell whether an Argument Proves a Theorem?* *Journal for research in Mathematics Education*, 38 (1), 4-36. Tersedia dalam <http://www.math.ntnu.edu.tw>
- Slameto. 2003. *Belajar dan Faktor-faktor yang Mempengaruhinya*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Slavin. 1997. *Educational Psychology Theory and Practice*. Five Edition. Boston: Allin and Bacon.
- Sumarmo, U. 2005. *Pengembangan Berpikir Matematika Tingkat Tinggi Siswa SMP dan SMU serta Mahasiswa SI Melalui Berbagai Pendekatan Pembelajaran*. Laporan Hibah Pascasarjana Tahun Ketiga. UPI Bandung: Tidak diterbitkan.
- Sumarmo, U & Hendriana, H. 2014. *Penilaian Pembelajaran Matematika*. Bandung: Refika Aditama.
- Tall, D. 1991. *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-23). Kluwer: The Netherlands.
- Weber, K. 2001. *Student Difficulty in Constructing Proof: The Need for Strategies Knowledge*. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (1) 101-119. Tersedia dalam [http, www-math, ntnu. Edu.tw](http://www-math.ntnu.edu.tw).