MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 6 No.2 Tahun 2018*
ISSN 2301-9115

MULTIPLIER PADA d-ALJABAR

Gita Okta Ariyati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : gitaokta03@gmail.com

Agung Lukito
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail **:** gung_lukito@yahoo.co.id

Abstrak

Himpunan tak-kosong X dengan operasi biner $"*"$ dan elemen khusus 0 disebut d-aljabar jika memenuhi $x * x = 0$, $0 * x = 0$, serta jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$, untuk setiap $x, y \in X$. Fungsi $f: X \to X$ disebut *multiplier* pada d-aljabar X apabila memenuhi $f(x * y) = f(x) * y$, $\forall x, y \in X$. Dengan operasi tertentu kumpulan *multiplier* pada d-aljabar membentuk d-aljabar implikatif positif. Kernel *multiplier* pada d-aljabar merupakan subaljabar. *Multiplier* yang endomorfisme, kernel homomorfisma yang merupakan *multiplier* adalah d-ideal. Himpunan tetap *multiplier* merupakan subaljabar pada d-aljabar. Hasil kali dua *multiplier* idempoten yang komutatif juga merupakan *multiplier* idempoten pada d-aljabar.

Kata Kunci: d-aljabar, *multiplier*, d-ideal, idempoten

Abstract

A non-empty set X with binary operation $"*"$ and special element 0 is called d-algebra if satisfies $x * x = 0$, $0 * x = 0$, and if $x * y = 0$ and $y * x = 0$, then $x = y$, for every $x, y \in X$. The function $f: X \to X$ is called a multiplier on d-algebra X if satisfies $f(x * y) = f(x) * y, \forall x, y \in X$. Under some binary operation the collection of all multipliers on a d-algebra forms a positive implicative d-algebra. The kernel of a multiplier on d-algebra is a subalgebra. The kernel of a multiplier which is an endomorphism is a d-ideal. The set of fixed points of a multiplier on d-algebra is a subalgebra. A product of two commutative idempotent multipliers is also an idempotent multiplier on d-algebra.

Keywords: d-algebras, multiplier, d-ideal, idempotent

PENDAHULUAN

d-aljabar merupakan struktur aljabar yang pertama kali diperkenalkan oleh Joseph Neggers dan Hee Sik Kim. d-aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $"*"$ dan elemen khusus 0 yang memenuhi aksioma: $x * x = 0$, $0 * x = 0$, dan jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$ untuk setiap $x, y \in X$ (M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012).

Multiplier merupakan salah satu konsep yang dapat diterapkan pada struktur aljabar. Banyak peneliti yang sudah mengembangkan konsep *multiplier*. Sebelumnya sudah pernah dikembangkan konsep *multiplier* pada BE-aljabar yang dikaji oleh Kyung Ho Kim pada tahun 2011. BE-aljabar adalah suatu himpunan tak-kosong X dengan operasi biner $"*"$ dan elemen khusus 1 serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Fungsi $f: X \to X$ disebut *multiplier* pada BE-aljabar X apabila memenuhi $f(x * y) = x * f(y)$, $\forall x, y \in X$. Konsep *multiplier* yang serupa telah dibahas oleh M. Anwar Chaudhry dan Faisal Ali yakni pada d-aljabar. *Multiplier* pada d-aljabar X apabila memenuhi $f(x * y) = f(x) * y$, $\forall x, y \in X$ (M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012).

Beberapa sifat *multiplier* pada d-aljabar dan struktur aljabar yang terkait meliputi idempoten, himpunan titik tetap, kernel , dan masih banyak lagi. Sifat-sifat *multiplier* pada d-aljabar dan struktur aljabar yang terkait tersebut dapat digunakan pada beberapa penerapan, yaitu untuk mengolah data dalam perintah SQL database, untuk menghindari overlap pada citra vektor gambar, dan masih banyak lagi (B.A. Makayasa, 2015). Karena itu *multiplier* pada d-aljabar menarik untuk dipelajari. Dengan demikian akan dikaji lebih dalam pada penelitian ini mengenai sifat-sifat *multiplier* pada d-aljabar dan struktur aljabar yang terkait yaitu idempoten, himpunan titik tetap, kernel.

KAJIAN TEORI

Berikut ini diberikan beberapa definisi konsep yang digunakan untuk menunjang memahami pembahasan.

Aljabar

Definisi 2.1

X disebut aljabar jika X merupakan suatu himpunan tak-kosong dengan suatu operasi biner pada X.

(Alexander & Guinter, 2002:451)

Fungsi

Definisi 2.2

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memetakan setiap elemen di A secara tunggal dengan elemen di B yang dinotasikan $f\colon A \to B$.

(Thomas, 2004: 2)

Definisi 2.3

Fungsi $f\colon A \to B$ disebut fungsi injektif apabila setiap dua elemen berbeda di A dipetakan ke dua elemen berbeda di B, sehingga dapat ditulis jika $x_1 \neq x_2$ maka $(x_1) \neq f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in A$.

(R. G. Bartle & D. R. Sherbert, 2010: 7)

Definisi 2.4

Fungsi $f\colon A \to B$ disebut fungsi surjektif apabila untuk setiap $b \in B$ ada $a \in A$ sedemikian hingga $f(a) = b$.

(Masriyah,2007:92)

Definisi 2.5

Fungsi $f\colon A \to B$ merupakan fungsi bijektif apabila f merupakan fungsi injektif dan surjektif.

(R. G. Bartle & D. R. Sherbert, 2010: 8)

Operasi Biner

Definisi 2.6

Diberikan sebuah himpunan tak kosong G. Suatu operasi biner pada G adalah fungsi dari $G \times G$ ke G .

(Joseph A. Gallian, 2010:40)

Komposisi Fungsi

Definisi 2.7

Misalkan f fungsi dari A ke B, dan g adalah fungsi dari B ke C maka g komposisi f dengan notasi $g \circ f$, didefinisikan dengan $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in D_f$.

(Masriyah, 2014: 135)

Homomorfisme

Definisi 2.8

Misalkan G, G' aljabar. Pemetaan $f : G \to G'$ disebut homomorfisme jika $f(ab) = f(a)f(b)$ untuk setiap $a, b \in G$

(Soebagio A. & Suharti,1993:250)

Endomorfisme

Definisi 2.9

Misalkan G merupakan aljabar. Endomorfisme adalah suatu homomorfisme dari $G \to G$.

(Soebagio A., Suharti,1993:250)

PEMBAHASAN

Berikut ini akan dibahas lebih lanjut mengenai definisi dan sifat-sifat *multiplier* pada d-aljabar.

Definisi 3.1

Suatu himpunan tak-kosong X dengan operasi biner " $*$ " dan elemen khusus 0 merupakan d-aljabar, jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi aksioma berikut:

(i) $x * x = 0$
(ii) $0 * x = 0$
(iii) Jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:1)

Definisi 3.2

Subhimpunan tak-kosong S dari d-aljabar X disebut subaljabar pada X jika $* y \in S, \forall x, y \in S$.

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Definisi 3.3

Misalkan X d-aljabar. Subhimpunan I dari X disebut ideal dari X jika memenuhi:

(i) $0 \in I$
(ii) Jika $x * y \in I$ dan $y \in I$, maka $x \in I,\ \forall x, y \in X$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Definisi 3.4

Misalkan X d-aljabar. Subhimpunan tak-kosong I dari X disebut d-ideal dari X jika memenuhi:

(i) Jika $x * y \in I$ dan $y \in I$, maka $x \in I,\ \forall x, y \in X$
(ii) Jika $x \in I$ dan $y \in X$, maka $x * y \in I$.

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Definisi 3.5

Fungsi $f\colon X \to X$ disebut *multiplier* pada d-aljabar X apabila memenuhi,

$$f(x * y) = f(x) * y,\ \forall x, y \in X$$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Definisi 3.6

Misalkan X d-aljabar dengan operasi biner $*$. Didefinisikan relasi $\leq$ pada X sebagai berikut:

$x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0,\ \forall x, y \in X.$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Proposisi 3.1

Misalkan X merupakan d-aljabar dan f *multiplier* pada X maka berlaku:

(i) $f(0) = 0$

(ii) Untuk setiap $x \in X$, berlaku $f(x) \leq x$

(iii) Jika $x \leq y$, maka $f(x) \leq y, \forall x, y \in X$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Bukti:

(i) $(0) = f(0 * f(0))$

$= 0$

Jadi, $f(0) = 0$ ■

(ii) Misalkan $x \in X$,

$f(0) = 0$

$f(x * x) = 0$

$f(x) \leq x$

Jadi, $f(x) \leq x$ untuk setiap $x \in X$ ■

(iii) Misalkan $x, y \in X$ dan $x \leq y$, maka berdasarkan Definisi 3.6 $x * y = 0$

$f(0) = 0$

$f(x * y) = 0$

$f(x) * y = 0$

Karena $f(x) * y = 0$, sehingga berdasarkan Definisi 3.6 $f(x) \leq y$ untuk setiap $x, y \in X$

Jadi,

jika $x \leq y$ maka $f(x) \leq y$ ■

Proposisi 3.2

Misalkan f dan g merupakan *multiplier* pada X. Komposisi $f \circ g$ juga merupakan *multiplier* pada X.

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Bukti:

Misalkan $x, y \in X$, maka

$$(f \circ g)(x * y) = f(g(x * y))$$
$$= f(g(x)) * y$$
$$= (f \circ g)(x) * y$$

Karena $(f \circ g)(x * y) = (f \circ g)(x) * y$, maka $f \circ g$ merupakan *multiplier* pada X ■

Definisi 3.7

Suatu d-aljabar X dikatakan implikatif positif jika $(x * y) * z = (x * z) * (y * z), \forall x, y, z \in X$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Definisi 3.8

Misalkan X d-aljabar implikatif positif dan $M(X)$ koleksi semua *multiplier* pada X. Didefinisikan operasi biner $*$ pada $M(X)$ sebagai berikut:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x),\ x \in X \ dan\ f, g \in M(X)$$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Teorema 3.1

Misalkan X d-aljabar. Jika fungsi $O: X \to X$ didefinisikan $O(x) = 0, \forall x \in X$ dan $I(x) = .x, \forall x \in X$, maka O dan I merupakan anggota $M(X)$ dan $M(X)$ tidak kosong.

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Bukti:

$$O(x * y) = 0$$
$$= 0 * y$$
$$= O(x) * y$$

$$I(x * y) = x * y$$
$$= I(x) * y$$

Jadi, O dan I merupakan anggota $M(X)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $M(X)$ tidak kosong. Misalkan $x, y \in X$, berarti $x * y = 0$ sehingga dapat dibentuk fungsi $O: X \to X$ dengan $O(a) = 0, \forall a \in X$. Jadi O merupakan multiplier. Karena $M(X)$ memiliki sekurang-kurangnya satu anggota, maka $M(X)$ tidak kosong. ■

Teorema 3.2

Misalkan X d-aljabar implikatif positif maka $M(X)$ adalah d-aljabar implikatif positif.

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:2)

Bukti:

Akan ditunjukkan $g * f \in M(X)$, untuk setiap $g, f \in M(X)$.

Misal X d-aljabar implikatif positif dan $g, f \in M(X)$,

$$(g * f)(x * y) = \big(g(x * y)\big) * \big(f(x * y)\big)$$
$$= \big(g(x) * f(x)\big) * y$$
$$= \big((g * f)(x)\big) * y$$

Maka $g * f \in M(X)$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $M(X)$ merupakan d-aljabar,

(i) Misalkan $f \in M(X)$

$$(O * f)x = O(x) * f(x)$$
$$= 0$$
$$= O(x), \forall x \in X$$

Maka $O * f = O$ untuk setiap $f \in M(X)$

(ii) Misalkan $f \in M(X)$,

$$(f * f)(x) = f(x) * f(x)$$
$$= 0.$$
$$= O(x), \forall x \in X$$

Maka $f * f = O$ untuk setiap $f \in M(X)$

(iii) Misalkan $g, f \in M(X)$ sedemikian hingga

$f * g = O$ dan $g * f = O$.

Berdasarkan Def. 3.1 (iii)

$f(x) = g(x),\ \forall x \in X$ maka $f = g$.
Berdasarkan (i),(ii),(iii), $M(X)$ merupakan d-aljabar.

Akan ditunjukkan $M(X)$ implikatif positif.
Misalkan $f, g, h. \in M(X)$.

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= (f * g)(x).* h(x)\\ &= (f(x) * h(x)) * (g(x) * h(x))\\ &= ((f * h)(x)) * ((g * h)(x))\\ &= ((f * h) * (g * h))\ (x)\end{aligned}$$

Karena itu $((f * g) * h) = (f * h) * (g * h)$ sehingga $M(X)$ implikatif positif.
Jadi $M(X)$ merupakan d-aljabar implikatif positif. ■

Proposisi 3.3
Misalkan X d-aljabar dan f *multiplier* pada X. Jika f adalah fungsi injektif, maka f adalah fungsi identitas pada X.
(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:3)

Bukti:

$$\begin{aligned}f(x * f(x)) &= f(x) * f(x)\\ &= 0\\ &= f(0)\end{aligned}$$

Karena f injektif, jadi $x * f(x) = 0$
Dan berdasarkan Definisi 3.6, $x \leq f(x)$. Dengan Proposisi 3.1(ii), $f(x) \leq x$ atau berdasarkan Definisi 3.6 dapat ditulis $f(x) * x = 0$. Jadi berdasakan Def. 3.1 (iii) dapat disimpulkan $f(x) = x$. Jadi, f merupakan fungsi identitas. ■

Definisi 3.9
Misalkan f *multiplier* pada X d-aljabar. $Kernel\ f$ ditulis $Ker(f)$, didefinisikan sebagai

$$Ker(f) = \{x : x \in X\ dan\ f(x) = 0\}$$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:3)

Proposisi 3.4
Misalkan X d-aljabar dan f *multiplier* pada. Jika $Ker(f) = \{0\}$ maka f merupakan fungsi identitas.

Bukti:
Misal $x \in X, x \neq 0$.
$f(x * f(x)) = f(x) * f(x) = 0$.
Karna $x.* f(x). = 0$ maka $x *. f(x) \in Ker(f)$ dan berdasarkan Definisi 3.6, $x \leq f(x)$. Dengan Proposisi 3.1(ii), $f(x) \leq x$ atau berdasarkan Definisi 3.6 dapat ditulis $f(x) * x = 0$. Jadi berdasakan Def. 3.1 (iii) dapat disimpulkan $f(x) = x$. Jadi, f merupakan fungsi identitas. ■

Proposisi 3.5
Misalkan X d-aljabar dan f *multiplier* pada X. Dua pernyataan berikut berlaku:
(i) $Ker(f)$ adalah subaljabar pada X dan
(ii) Jika f merupakan fungsi injektif, maka $Ker(f) = \{0\}$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:3)

Bukti:
(i) Berdasarkan Definisi 3.9 dapat diketahui bahwa $Ker(f) \subset X$.
Selanjutnya, misalkan $x, y \in Ker(f)$ maka $f(x) = 0$ dan $f(y) = 0$

$$\begin{aligned}f(x * y) &= f(x) * y\\ &= 0\end{aligned}$$

Diperoleh $f(x * y) = 0$, sehingga $x * y \in Ker(f)$.
Akibatnya $Ker(f)$ adalah subaljabar pada X. ■

(ii) Misalkan f fungsi injektif. Misalkan $x \in Ker(f)$.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0\\ &= f(0)\\ x &= 0\end{aligned}$$

f injektif
Jadi $Ker(f)i = \{0\}$ ■

Definisi 3.10
d-aljabar X dikatakan komutatif jika

$$y * (y * x) = x * (x * y),\ \forall x, y \in X$$

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:3)

Proposisi 3.6
Misalkan X d-aljabar komutatif memenuhi $x * 0 = x,\ \forall x \in X$. Misalkan f *multiplier* pada X. Jika $x \in Ker(f)$ dan $y \leq x$, maka $y \in iKer(f)$.
(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:3)

Bukti:
Misalkan $x \in Ker(f)$ dan $y \leq x$ maka $f(x) = 0$ dan $y * x = 0$,

$$\begin{aligned}f(y) &= f(y * 0)\\ &= f(y * (y * x))\\ &= f(x * (x * y))\\ &= 0.* 0\\ f(y) &= 0\end{aligned}$$

Jadi, $y \in Ker(f)$ ■

Teorema 3.3
Misalkan X d-aljabar memenuhi $x * 0 = x,\ \forall x \in X$. Misalkan f *multiplier* pada X yang merupakan endomorfisme pada X maka $Ker(f)$ adalah d-ideal X.
(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:3)

Bukti:

Berdasarkan Proposisi 3.1(i), $f(0) = 0, 0 \in Ker(f)$ dipenuhi, sehingga $Ker(f)$ tidak kosong.

Untuk menunjukkan Definisi 3.4(i) dipenuhi, misalkan $x * y \in Ker(f)$, $x \in Ker(f)$. dan $y \in Ker(f)$ maka setiap pernyataan berlaku;

$$\begin{aligned} 0 &= f(x * y) \\ &= f(x) * f(y) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Jadi $x \in Ker(f)$

Untuk menunjukkan Definisi 3.4(ii) dipenuhi, misalkan $x \in Ker(f)$ dan $y \in X$ maka setiap pernyataan berlaku;

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(x) * y \\ &= 0 * y \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi $x * y \in Ker(f)$.

Karena itu, $Ker(f)$ merupakan d-ideal pada X. ■

Definisi 3.11

Misalkan X merupakan d-aljabar dan f *multiplier* pada X. Himpunan

$$Fix(f) = \{x: x \in X \; dan \; f(x) = x\}$$

disebut himpunan titik tetap f.

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:4)

Proposisi 3.7

Misalkan X merupakan d-aljabar dan f *multiplier* pada X, maka $Fix(f)$ adalah subaljabar pada X.

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:4)

Bukti:

Berdasarkan Proposisi 3.1(i), $0 \in Fix(f) \neq \emptyset$. Misalkan $x, y \in Fix(f)$.

$f(x * y) = f(x) * y$ karena f *multiplier* maka dapat dibentuk menjadi $x * y$. Sehingga $x * y \in Fix(f)$. Jadi $Fix(f)$ merupakan subaljabar pada X. ■

Definisi 3.12

Misalkan X merupakan d-aljabar dan f *multiplier* pada X maka f dikatakan idempoten apabila $f \circ f = f$ dengan $\circ$ menyatakan komposisi fungsi. Lebih lanjut, $f \circ f$ dituliskan sebagai f^2.

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:4)

Teorema 3.4

Misalkan X merupakan d-aljabar implikatif positif yang memenuhi $x * 0 = x, \forall x \in X$. Misalkan f_1, f_2 merupakan dua *multiplier* idempoten pada X. Jika $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, maka $f_1 * f_2$ adalah *multiplier* idempoten pada X. $\circ$ merupakan komposisi fungsi dan $*$ merupakan operasi pada $M(X)$ (Definisi 3.8).

(M.A. Chaudhry & F. Ali, 2012:4)

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.2, $f_1 * f_2$ merupakan *multiplier* pada X maka

$$\begin{aligned} \big((f_1 * f_2) \circ (f_1 * f_2)\big)(x) &= (f_1 * f_2)((f_1 * f_2)(x)) \\ &= f_1\big(f_1(x) * f_2(x)\big) * f_2(f_1(x) * if_2(x)) \\ &= (f_1\big(f_1(x)\big) * f_2(x)) * (f_2\big(f_1(x)\big) * f_2(x)) \\ &= \big(f_1(x) * f_2(x)\big) * 0 \\ &= f_1(x) * f_2(x) \end{aligned}$$

Jadi $(f_1 * f_2) \circ (f_1 * f_2) = f_1 * f_2$. sehingga $f_1 * f_2$ merupakan idempoten. ■

SIMPULAN DAN SARAN

A. **Simpulan**

Berdasarkan pembahasan yang sudah dijabarkan pada skripsi yang berjudul *Multiplier* Pada d-Aljabar, bahwa sifat-sifat *multiplier* pada d-aljabar dan struktur aljabar yang terkait adalah sebagai berikut:

1. Misalkan X d-aljabar implikatif positif. Misalkan $M(X)$ koleksi *multiplier* maka $M(X)$ adalah d-aljabar implikatif positif.
2. Misalkan X d-aljabar dan f *multiplier* pada X, maka $Ker(f) = \{x: x \in X \; dan \; f(x) = 0\}$ merupakan subaljabar pada X.
3. Misalkan X d-aljabar memenuhi $x * 0 = x, \forall x \in X$. Misalkan f *multiplier* pada X yang merupakan endomorfisme pada X maka $Ker(f)$ merupakan d-ideal.
4. Misalkan X d-aljabar dan f *multiplier* pada X, maka $Fix(f) = \{x: x \in X \; dan \; f(x) = x\}$ merupakan subaljabar pada X.
5. Misalkan X merupakan d-aljabar implikatif positif yang memenuhi $x * 0 = x, \forall x \in X$. Misalkan f_1, f_2 merupakan dua *multiplier* idempoten pada X. Jika $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, maka $f_1 * f_2$ adalah *multiplier* idempoten pada X. $\circ$ merupakan komposisi fungsi dan $*$ merupakan operasi pada $M(X)$.

B. **Saran**

Pada skripsi ini, penulis membahas tentang sifat sifat *multiplier* pada d-aljabar dan struktur aljabar yang terkait. Penulis menyarankan bagi pembaca untuk mengkaji sifat-sifat multiplier pada struktur aljabar yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Makayasa B.A, 2015. *Identifikasi Citra Sidik Jari Terdistorsi Menggunakan Metode Filtering dan Overlapping Window Berbasis Wavelet.* Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Chaudhry M.A. & F. Ali F.. 2012. *Multipliers in d-Algebras.*World Applied Science Journal, 18(11); 1649-1650.

D. Ghosh, J. ; A. Haque, MD.. 2004. *"How To Learn Calculus Of One Variable"*. Volume 1.

G. Bartle, Robert; R. Sherbert, Donald. 2010. *"Introduction To Real Analysis"*. Fourth Edition. Urbana-Champaign: University of Illionis.

Gallian, Joseph A. 2010. Cotemporary Abstract Algebra. Seventh Edition. Duluth: *University of Minnesota Duluth.*

Masriyah. 2014. *Pengantar Dasar Matematika*. Revisi 2. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya.

Mikhalev, Alexander V dan Gunter F. Pilz. 2002. *Handbook of Algebra.* First Edition. Kluwer Academic.

Soebagio A., Suharti. 1993. *Struktur Aljabar.* Modul 1-12. Jakarta: Universitas Terbuka, Depdikbud.

Thomas, G. B.; Weir, M. D.; Hass, J. Giardino, F. R.. 2004. *Thomas' Calculus.* New York: Pearson Education.