MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 6 No.2 Tahun 2018*
ISSN 2301-9115

INDEKS HARARY GRAF HAMILTON, SEMI-HAMILTON DAN HAMILTON-KUAT

Fatimatus Zahro
(S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail: imatus014@gmail.com

I Ketut Budayasa
(Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail: ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G sebuah graf terhubung dengan $V(G)$ dan $u, v \in V(G)$. Jarak titik u dan titik v di G, dilambangkan dengan $d(u, v)$, merupakan suatu lintasan terpendek yang menghubungkan titik u dan titik v di G. Indeks Harary dari graf G, dilambangkan dengan $H(G)$, didefinisikan sebagai berikut: $H(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$. Pada skripsi ini, indeks Harary suatu graf dijadikan syarat cukup bagi suatu graf agar graf tersebut merupakan graf Hamilton, graf Semi-Hamilton, maupun graf Hamilton-Kuat. Dalam tulisan ini, ditunjukkan bahwa suatu graf merupakan graf Hamilton jika G memenuhi salah satu dari kondisi-kondisi berikut: 1). G graf terhubung dengan $n \geq 3$ titik, dan $H(G) \geq \frac{n^2-2n+2}{2}$; 2). G graf bipartisi dengan $n \geq 2$ titik, dan $H(G) \geq \frac{9n^2-3n-4}{6}$; 3). G graf terhubung-k dengan n titik, dan $H(G) \geq \frac{2n(n-1)-(k+1)(n-k-1)+1}{4}$. Ditunjukkan juga bahwa, jika G merupakan graf terhubung dengan $n \geq 4$ titik, dan $H(G) \geq \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$, maka G graf semi-Hamilton. Akhirnya, dibuktikan bahwa jika G merupakan sebuah graf terhubung dengan n titik, dan $H(G) \geq \frac{n^2-2n+3}{2}$, maka G graf Hamilton-kuat.

Kata Kunci: Indeks Harary, Graf Hamilton, Semi-Hamilton, dan Hamilton-Kuat.

Abstract

Let G be a connected graph with vertex set $V(G)$ and $u, v \in V(G)$. The distance between vertices u and v in G, denoted by $d(u, v)$, is the shortest path connecting u and v in G. The Harary index of graph G, denoted by $H(G)$, is defined as follows: $H(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$. In this thesis, the Harary index of a graph to present sufficient conditions for a graph to be Hamilton, semi-Hamilton, and strong-Hamilton. A graph G is Hamilton graph if it is satisfied one of the following conditions: 1). G is a connected graph of order $n \geq 3$, and $H(G) \geq \frac{n^2-2n+2}{2}$; 2). G is a connected bipartite graph of order $n \geq 2$, and $H(G) \geq \frac{9n^2-3n-4}{6}$; 3). G is a k-connected graph of order n, and $H(G) \geq \frac{2n(n-1)-(k+1)(n-k-1)+1}{4}$. It is also shown that, if G is a connected graph of order $n \geq 4$, and $H(G) \geq \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$, then G is semi-Hamilton. Finally, proved that if G is a connected graph of order n, and $H(G) \geq \frac{n^2-2n+3}{2}$, then G is strong-Hamilton.

Keyword: Harary Index, Hamilton, Semi-Hamilton, and Strong-Hamilton Graph.

PENDAHULUAN

Teori graf adalah suatu bidang matematika yang menarik perhatian, dikarenakan modelnya banyak digunakan pada aplikasi yang luas. Salah satu contohnya adalah TSP(Travelling Salesman Problem). TSP ini memanfaatkan sikel Hamilton untuk menyelesaikan problem. Sebuah sikel disebut sikel Hamilton, jika sikel tersebut memuat semua titik pada suatu graf, dan graf Hamilton merupakan graf yang memuat sikel Hamilton. Jika suatu graf hanya memuat lintasan Hamilton maka graf tersebut merupakan graf Semi-Hamilton.

Dan jika lintasan setiap titik u, v di graf G merupakan lintasan Hamilton maka G merupakan graf Hamilton-Kuat. Indeks Harary dari suatu graf merupakan sebuah syarat cukup agar suatu graf merupakan graf Hamilton, Semi-Hamilton dan Hamilton-Kuat. Pada tahun 1993 *Ivanciuc et al* (Ovidiu, Teodor and Alexandru, 1993) dan *Plavsic et al* (Plav, Nikoli and Trinajsti, 1993) memperkenalkan indeks Harary sebagai karakterisasi dari graf molekuler (Zhou, 2008). Indeks Harary didefinisikan sebagai jumlah dari satu dibagi jarak antara 2 titik u dan titik v pada graf

(Rao Li, 2015). Pada skripsi ini ditunjukkan bahwa untuk menentukan sebuah graf merupakan graf Hamilton, Semi-Hamilton dan Hamilton-Kuat diperlukan indeks Harary, dimana indeks Harary memiliki syarat tertentu yang harus dipenuhi.

LANDASAN TEORI

A. Beberapa Konsep dalam Graf

1. Graf

Definsi 2.1

Sebuah graf G merupakan pasangan terurut yang memuat himpunan titik G dan himpunan sisi G. Dimana himpunan titik G dilambangkan dengan $V(G)$ yang berarti himpunan berhingga (tidak kosong) dari obyek-obyek yang disebut titik, dan himpunan sisi G dilambangkan dengan $E(G)$ yang merupakan himpunan berhingga (boleh kosong) yang elemen-elemenya disebut sisi, sehingga setiap elemen pada $E(G)$ adalah pasangan yang tak berurutan dari obyek-obyek di $V(G)$ (Budayasa, 2007).

2. Graf Nontrivial

Definisi 2.2

Jika G sebuah graf dan G merupakan graf trivial, maka graf tersebut hanya memiliki satu titik. Semua graf selain graf trivial maka graf tersebut merupakan graf nontrivial (Bondy and Murty, 1976).

3. Graf Komplit

Definisi 2.3

Suatu graf G disebut graf komplit jika graf tersebut merupakan graf sederhana yang semua titiknya berhubungan langsung (Budayasa, 2007).

4. Graf Bipartisi

Definisi 2.4

Graf G adalah graf bipartisi, merupakan graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B, dimana setiap sisi G menghubungkan titik di A dan titik di B. (Budayasa, 2007).

B. Derajat Titik pada Graf

1. Pengertian Derajat Titik

Definisi 2.10

Suatu titik pada graf G dilambangkan dengan v. Derajat titik v merupakan banyaknya sisi yang berhubungan langsung dengan titik itu sendiri dan jika terdapat gelung maka dihitung dua kali. Derajat suatu titik v dilambangkan dengan $d_G(v)$ atau $d(v)$ (Budayasa, 2007).

2. Sikel

Definisi 2.9

Misalkan $C = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{k-1}, v_{k-1}, \dots, e_k, v_k)$ adalah sebuah jejak tutup (sirkit) di G, maka C disebut sikel jika titik awal(titik pertama yang akan dilewati) dan semua titik internalnya(titik tang berada diantara titik pertama dan titik terakhir) berbeda (Budayasa, 2007).

3. Teorema Jabat Tangan

Teorema 2.11

Jika G sebuah graf, maka $\sum_{v \epsilon V(G)} d(v) = 2|E(G)|$ (Budayasa, 2007).

C. Diameter Sebuah Graf

1. Jarak Dua Titik pada Graf

Definisi 2.12

G merupakan graf dengann $u, v \in V(G)$. Lintasan terpendek merupakan panjang minimum dari titik u ke titik v. Jarak antara 2 titik u dan v di G dilambangkan dengan $d_G(u,v)$ atau $d(u,v)$, merupakan lintasan terpendek dari suatu titik u ke titik v di G (Hua and Wang, 2013).

2. Eksentrisitas Sebuah Titik pada Graf

Definisi 2.13

Eksentrisitas dari sebuah $u \in V(G)$ adalah maksimum dari jarak titik u ke semua titik yang lain pada graf G, dilambangkan dengan $e_G(u)$, didefinisikan sebagai berikut: $e_G(u) = \max\{d_G(u,v) | \ v \in V(G)\}$ (Hua and Wang, 2013).

3. Diameter Graf

Definisi 2.14

Diameter dari graf G adalah maksimum eksentrisitas dari semua titik pada graf G, dilambangkan dengan $D(G)$, didefinisikan sebagai berikut : $D(G) = \max\{e_G(u) | \ u \in V(G)\}$ (Hua and Wang, 2013).

D. Graf Hamilton, Graf Semi-Hamilton dan Graf Hamilton-Kuat

1. Graf Hamilton

Definisi 2.15

Misalkan G sebuah graf, G disebut graf Hamilton, jika G memiliki sikel yang melewati semua titik pada graf tepat satu kali, kecuali titik awal dan titik akhir dilewati dua kali dan sikel tersebut merupakan sikel Hamilton (Budayasa, 2007).

2. Graf Semi-Hamilton

Definisi 2.16

Misalkan G sebuah graf yang memuat lintasan Hamilton, maka G merupakan graf semi-Hamilton. Dimana lintasan Hamilton merupakan Sebuah lintasan yang melewati setiap titik pada suatu graf tepat satu kali (Budayasa, 2007).

3. Graf Hamilton-Kuat

Definisi 2.17

Misalkan G sebuah graf, sebuah lintasan yang memuat semua titik pada G disebut lintasan Hamilton. Jika lintasan setiap titik u, v di graf G merupakan lintasan Hamilton maka G merupakan Graf Hamilton-Kuat (Budayasa, 2007).

E. Graf Join

Definisi 2.18

Misal G dan H adalah 2 buah graf. *Join* graf G dan H, dilambangkan dengan $G \vee H$, adalah graf yang himpunan titiknya $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisinya $E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G) \text{dan } v \in V(H)\}$ (Hua and Wang, 2013).

F. Isomorfisme Graf

Definisi 2.19

Dua graf G dan H dikatakan isomorfisme jika terdapat fungsi bijektif (korespondensi satu-satu) $f: V(G) \to V(H)$ sedemikian hingga prapeta dua titik di domain sama dengan peta dua titik di kodomain. Isomorfisme pada graf dilambangkan dengan $G \cong H$ (Budayasa, 2007).

G. Beberapa Lemma Pendukung Pembahasan

Lemma 2.1

Misal G adalah graf dengan n titik, $n \geq 3$ dengan barisan derajat $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Jika $d_k \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k$, maka G graf Hamilton .

Lemma 2.2

Misal G graf bipartisi dengan n titik, dengan bipartisi $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ dengan $n \geq 2$, dan $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \cdots \leq d(x_n)$, $d(y_1) \leq d(y_2) \leq \cdots \leq d(y_n)$, jika $d(x_k) < k < n \Rightarrow d(y_{n-k}) \geq n-k+1$, maka G graf Hamilton.

Lemma 2.3

Misalkan G graf terhubung-2 dengan n titik dan m sisi dengan $n \geq 12$. Jika $m \geq \binom{n-2}{2} + 4$ maka G Hamilton atau $G = K_2 \vee ((2K_1) \cup K_{n-4})$.

Lemma 2.4

Misal G merupakan graf terhubung-3 dengan n titik dan m sisi dengan $n \geq 18$. Jika $m \geq \binom{n-3}{2} + 9$ maka G Hamilton atau $G = K_3 \vee ((3K_1) \cup K_{n-6})$.

Lemma 2.5

Misal G graf terhubung-k dengan n titik dan m sisi dengan $m \geq \binom{n}{2} - \left(\frac{(k+1)(n-k-1)}{2}\right) + 1$, maka G graf Hamilton.

Lemma 2.6

Misal G merupakan graf nontrivial dengan n titik, $n \geq 4$ dengan barisan derajat $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ dimana $d_1 \leq d_2 \leq \cdots d_n$. Misal tidak ada bilangan bulat $k < \frac{n+1}{2}$ sedemikian hingga $d_k \leq k-1$ dan $d_{n-k+1} \leq n-k-1$. Maka G graf Semi-Hamilton.

Lemma 2.7

Misal G adalah graf dengan n titik, $n \geq 3$ dengan barisan derajat $d_1 \leq d_2 \leq \cdots d_n$. Jika $2 \leq k \leq \frac{n}{2}, d_{k-1} \leq k \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k+1$, maka G graf Hamilton-Kuat.

Catatan:

Pembuktian Lemma-Lemma diatas dapat dilihat pada referensi-referensi berikut: Lemma 2.1 dan Lemma 2.2 (Berge, 1976); Lemma 2.3, Lemma 2.4 dan Lemma 2.5 (Byer et al, 2007); Lemma 2.6 (Bondy and Murty, 1976); Lemma 2.7 (Berge, 1976).

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan diawali konsep indeks Harary sebuah graf terhubung, nontrivial dan beberapa hasil elementer terkait dengan indeks Harary sebuah graf.

A. Indeks Harary Sebuah Graf

Definisi 3.1.1 :

Misal G graf terhubung dan nontrivial. Indeks Harary dari G dilambangkan dengan $H(G)$, didefinisikan sebagai berikut

$$H(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$$

Selanjutnya, indeks titik v di graf G, dilambangkan dengan $\widehat{D}_G(v)$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$\widehat{D}_G(v) = \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$$

(Hua and Wang, 2013).

Teorema 3.1.2:

Jika G sebuah graf terhubung nontrivial dan v merupakan sebuah titik di G, maka

$$H(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \widehat{D}_G(v).$$

Bukti:

Misal G sebuah graf terhubung nontrivial dan $v \in V(G)$.

Berdasarkan Definisi 3.1.1,

$$\widehat{D}_G(v) = \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$$

Sehingga,

$$\sum_{v \in V(G)} \widehat{D}_G(v) = \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$$
$$= 2 \sum_{u,v \in V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$$
$$= 2\, H(G).$$

Jadi

$$H(G) = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} \widehat{D}_G(v)$$

Dengan demikian Teorema terbukti. ■

Berikut akan diberikan beberapa hasil elementer terkait dengan indeks titik dan indeks Harary sebuah graf.

Lemma 3.1:

Misal G graf terhubung sederhana dengan n titik dimana $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan $d(v_i) = d_i$ untuk setiap i, $1 \le i \le n$. Jika $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dengan $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$ adalah barisan derajat dari graf G, maka

$$\widehat{D}_G(v_i) \le d_i + \frac{1}{2}(n - 1 - d_i).$$

Lebih jauh, batas atas dicapai jika $N_G(v_i) = V(G) - \{v_i\}$ dengan kata lain diameter G maksimum 2.

Bukti:

Misalkan $N_G(v_i)$ adalah himpunan titik-titik persekitaran v_i di G. Karena G graf sederhana, maka

$$d(v_i) = |N_G(v_i)| = d_i$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $u \in N_G(v_i)$,

$$d(v_i, u) = 1$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_G(v_i) &= \textstyle\sum_{u\in V(G)} \frac{1}{d(v_i,u)} \\
&= \textstyle\sum_{u\in N_G(v_i)} \frac{1}{d(v_i,u)} + \sum_{u\in V(G)-N_G(v_i)-\{v_i\}} \frac{1}{d(v_i,u)} \\
&= \textstyle\sum_{u\in N_G(v_i)} \frac{1}{1} + \sum_{u\in V(G)-N_G(v_i)-\{v_i\}} \frac{1}{d(v_i,u)} \\
&= |N_G(v_i)| + \textstyle\sum_{u\in V(G)-N_G(v_i)-\{v_i\}} \frac{1}{d(v_i,u)} \\
&= d_i + \textstyle\sum_{u\in V(G)-N_G(v_i)-\{v_i\}} \frac{1}{d(v_i,u)} \quad (1)
\end{aligned}$$

Karena G terhubung, maka untuk setiap $u \in V(G) - N_G(v_i) - \{v_i\}$

$$d(v_i, u) \ge 2\,.$$

Sehingga $\frac{1}{d(v_i,u)} \le \frac{1}{2}$, dan

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{u\in V(G)-N_G(v_i)-\{v_i\}} \frac{1}{d(v_i,u)} &\le \textstyle\sum_{u\in V(G)-N_G(v_i)-\{v_i\}} \frac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}|V(G) - N_G(v_i) - \{v_i\}| \\
&= \tfrac{1}{2}(n - d_i - 1) \quad (2)
\end{aligned}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\widehat{D}_G(v_i) \le d_i + \frac{1}{2}(n - d_i - 1).$$

Selanjutnya, jika $N_G(v_i) = V(G) - \{v_i\}$ maka

$$V(G) - N_G(v_i) - \{v_i\} = \emptyset$$

Sehingga $\widehat{D}_G(v_i) = d_i$

Dengan demikian Lemma 3.1 terbukti. ■

Hasil berikut menunjukkan hubungan antara indeks Harary, banyak titik, dan banyak sisi suatu graf. Dan hal ini, banyak dipakai dalam pembuktian Teorema-teorema selanjutnya.

Teorema 3.2:

Jika G merupakan graf terhubung dengan n titik dan m sisi, maka

$$H(G) \le \frac{n(n-1)}{4} + \frac{1}{2}m\,.$$

Bukti:

Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$. Berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh

$$\widehat{D}_G(v_i) \le d(v_i) + \frac{1}{2}\big(n - 1 - d(v_i)\big).$$

Berdasarkan Teorema 3.1.2,

$$H(G) = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_G(v_i)\,.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}
H(G) &\le \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\Big(d_i + \tfrac{1}{2}\big(n - 1 - d(v_i)\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} d(v_i) + \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(n - 1 - d(v_i)) \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} d(v_i) + \tfrac{1}{4}n(n-1) - \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \\
&= \tfrac{1}{4}n(n-1) + \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i=1}^{n} d(v_i)\,.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema Jabat Tangan ,

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m\,.$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}n(n-1) + \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \\
&= \tfrac{1}{4}n(n-1) + \tfrac{1}{4}(2m) \\
&= \tfrac{1}{4}n(n-1) + \tfrac{1}{2}m
\end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $H(G) \ge \frac{n(n-1)}{4} + \frac{1}{2}m$ dan Teorema 3.2 terbukti. ■

B. Syarat Cukup Bagi Sebuah Graf Merupakan Graf Hamilton.

Berikut akan ditunjukkan bahwa apakah indeks Harary suatu graf relatif lebih besar dari banyak titik, maka graf tersebut merupakan graf Hamilton.

Teorema 3.3:

Misal G adalah graf terhubung dengan n titik dan $n \ge 3$. Jika $H(G) \ge \frac{n^2-2n+2}{2}$ maka G graf

Hamilton, kecuali $G = K_1 \vee (K_1 \cup K_{n-2})$, atau $K_2 \vee (K_2^c \cup K_1)$.

Bukti:

Misalkan G graf terhubung dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $d(v_i) = d_i, \forall i, 1 \le i \le n$, dimana $H(G) \ge \frac{n^2-2n+2}{2}$.

1. Jika $H(G) > \frac{n^2-2n+2}{2}$, maka G graf Hamilton.

   Andaikan G bukan graf Hamilton dengan barisan derajat $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ sedemikian hingga $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$ dan $n \ge 3$.
   Berdasarkan Lemma 2.1, ada sebuah bilangan bulat $k < \frac{n}{2}$ sedemikian hingga $d_k \le k$ dan $d_{n-k} \le n-k-1$. Tentunya $k \ge 1$.
   Berdasarkan Lemma 3.1, untuk setiap i, $1 \le i \le n$

   $$\widehat{D}_G(v_i) \le d_i + \frac{1}{2}(n - d_i - 1).$$

   Sehingga

   $$\sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_G(v_i) \le \sum_{i=1}^{n} \left(d_i + \frac{1}{2}(n - d_i - 1) \right).$$

   Dari Teorema 3.1.2,

   $$\begin{aligned} H(G) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_G(v_i) \\ &\le \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left(d_i + \tfrac{1}{2}(n - d_i - 1) \right) \quad (1) \\ &= \tfrac{n(n-1)}{4} + \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i \\ &\le \tfrac{n(n-1)}{4} + \tfrac{1}{4}[k^2 + (n-2k) \\ &\qquad (n-k-1) + k(n-1)] \quad (2) \\ &= \tfrac{n(n-1)}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{(n-1)(n-2)}{4} \\ &\quad - \tfrac{(k-1)(2n-3k-4)}{4} \\ &\le \tfrac{n^2-2n+2}{2} - \tfrac{(k-1)(k-2)}{4} \\ &\quad - \tfrac{(k-1)(n-2k-1)}{2} \quad (3) \\ &= \tfrac{n^2-2n+2}{2} \end{aligned}$$

   Sehingga, dapat disimpulkan bahwa $H(G) \le \frac{n^2-2n+2}{2}$, padahal diketahui bahwa $H(G) > \frac{n^2-2n+2}{2}$.
   Jika $H(G) \le \frac{n^2-2n+2}{2}$, maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap. ∎

2. Jika $H(G) = \frac{n^2-2n+2}{2}$, maka pada kesamaan (1), (2), dan (3) berlaku relasi "sama dengan". Selanjutya karena $k \ge 1$ dan $n > 2k$, maka $k = 1$ atau $k = 2$ dan $n = 2k+1$.
   Kesamaan (2) akan dipenuhi jika $d_1 = \cdots = d_k = k$, $d_{k+1} = \cdots = d_{n-k} = n-k-1$, dan $d_{n-k+1} = \cdots = d_n = n-1$.
   - Jika $k = 1$, maka $d_1 = 1$, $d_2 = d_3 = \cdots = d_{n-1} = n-2$, dan $d_n = n-1$. Berakibat $G == K_1 \vee (K_1 \cup K_{n-2})$, dimana G bukan graf Hamilton.
   - Jika $k = 2$ dan $n = 2k+1$, maka $n = 5$ sehingga $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, $d_3 = 2$, $d_4 = 4$, $d_5 = 4$. Berakibat $G = K_2 \vee (K_2^c \cup K_1)$, dimana G bukan graf Hamilton.

Selanjutnya akan dibahas syarat indeks Harary dari graf bipartisi, agar graf bipartisi tersebut merupakan graf Hamilton.

Teorema 3.4:
Misal $G = (X, Y)$ adalah graf bipartisi terhubung dengan bipartisi $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ dengan $n \ge 2$. Jika $H(G) \ge \frac{9n^2-3n-4}{6}$ maka G graf Hamilton, kecuali $G = P_4$ (sebuah lintasan dengan 4 titik).

Bukti:

Diketahui $H(G) \ge \frac{9n^2-3n-4}{6}$ dengan G graf yang memenuhi premis pada Teorema.

1. Jika $H(G) > \frac{9n^2-3n-4}{6}$, maka G graf Hamilton.
   Andaikan G bukan graf Hamilton, maka berdasarkan Lemma 2.2 terdapat $k < n$ sedemikian hingga $d(x_k) \le k$ dan $d(y_{n-k}) \le n-k$. Selanjutnya akan dicari sebuah batas atas $\widehat{D}_G(x_i)$.
   Misalkan $d(x_1) = s$ dan $N_G(x_1) = \{z_1, z_2, \dots, z_s\}$, maka $d_G(x_1, z_i) = 1, \forall i, 1 \le i \le s$ dan $d_G(x_1, x_i) \ge 2$ untuk $2 \le i \le n$, dan $d_G(x_i, y_j) \ge 3$, $y_j \in Y - N_G(x_1)$ maka

   $$\begin{aligned} \widehat{D}_G(x_1) &= \textstyle\sum_{v \in V(G)-\{x_1\}} \frac{1}{d(x_1,v)} \\ &= \textstyle\sum_{v \in N_G(x_1)} \frac{1}{d(x_1,v)} + \\ &\quad \textstyle\sum_{x_i \in X-\{x_1\}} \frac{1}{d(x_1,x_i)} + \\ &\quad \textstyle\sum_{y_j \in Y-N_G(x_1)} \frac{1}{d(x_1,y_j)} \\ &\le |N_G(x_1)| + \tfrac{1}{2}(|X|-1) + \tfrac{1}{3} \\ &\quad (|Y| - |N_G(x_1)|) \\ &= s + \tfrac{1}{2}(n-1) + \tfrac{1}{3}(n-s) \\ &= \tfrac{2}{3}d(x_1) + \tfrac{5}{6}n - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

   Sehingga

   $$\widehat{D}_G(x_1) \le \tfrac{2}{3}d(x_1) + \tfrac{5}{6}n - \tfrac{1}{2}$$

   Dengan cara yang sama diperoleh $\forall i, 2 \le i \le n$.

   $$\widehat{D}_G(x_i) \le \tfrac{2}{3}d(x_i) + \tfrac{5}{6}n - \tfrac{1}{2}$$

   Begitu juga $\forall j, 1 \le j \le n$, diperoleh

   $$\widehat{D}_G(y_j) \le \tfrac{2}{3}d(y_j) + \tfrac{5}{6}n - \tfrac{1}{2}$$

   Akibatnya,

   $$\begin{aligned} H(G) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{v \in V(G)} \widehat{D}_G(v) \\ &\le \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{3}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(d(x_i) + d(y_i))\right) + \right. \\ &\quad \left. \tfrac{5}{3}n^2 - n\right] \quad (1) \end{aligned}$$

$\leq \frac{1}{2}(\frac{2}{3}(k^2 + (n-k)n + (n-k)^2$
$+kn) + \frac{5}{3}n^2 - n)$ (2)
$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(2n^2 - 2) + \frac{5}{3}n^2 - n\right)$ (3)
$= \frac{1}{6}(9n^2 - 3n - 4)$

Dari (1), (2), dan (3) disimpulkan bahwa $H(G) \leq \frac{9n^2-3n-4}{6}$, padahal diketahui bahwa $H(G) > \frac{9n^2-3n-4}{6}$.

Jika $H(G) \leq \frac{9n^2-3n-4}{6}$, maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap. ■

2. Jika $H(G) = \frac{9n^2-3n-4}{6}$, maka relasi "sama dengan" dipenuhi pada (1), (2), dan (3).
   Relasi "sama dengan" pada (3) dipenuhi jika k=1 dan n-k=1, dan jika relasi "sama dengan" pada (2) dipenuhi, maka
   $d(x_1) = 1,\ d(x_2) = 2, d(y_1) = 2$ dan $d(y_2) = 1$
   Akibatnya, $G = P_4$ dan jelas G bukan graf Hamilton.

Beberapa Teorema berikutnya, selain indeks Harary suatu graf juga keterhubungan dari graf tersebut dijadikan syarat untuk menentukan Hamiltonian suatu graf.

Teorema 3.5:
Misalkan G merupakan graf terhubung-2 dengan n titik, dan $n \geq 12$. Jika $H(G) \geq \frac{n^2-3n+7}{2}$ maka G Hamilton atau $G = K_2 \vee \left((2K_1) \cup K_{n-4}\right)$.

Bukti:
Misalkan G graf yang memenuhi premis pada Teorema, dengan $H(G) \geq \frac{n^2-3n+7}{2}$.

1. Jika $H(G) > \frac{n^2-3n+7}{2}$, maka G graf Hamilton.
   Andaikan G bukan graf Hamilton dan G bukan $G = K_2 \vee ((2K_1) \cup K_{n-4})$. Berdasarkan Lemma 2.3, maka $m \leq \binom{n-2}{2} + 3$ dimana $m = |E(G)|$.
   $m \leq \binom{n-2}{2} + 3$
   $= \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 3$
   $= \frac{n^2-5n+12}{2}$
   Berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh:
   $\frac{1}{4}n(n-1) + \frac{1}{2}m$
   $\leq \frac{1}{4}n(n-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{n^2-5n+12}{2}\right)$
   $= \frac{n^2-3n+6}{2}$
   Jika $H(G) \leq \frac{n^2-3n+6}{2}$, maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap. ■
2. Jika $H(G) = \frac{n^2-3n+7}{2}$, maka diperoleh $G = K_2 \vee \left((2K_1) \cup K_{n-4}\right)$ dan G bukan graf Hamilton.

Teorema 3.6:
Misalkan G adalah graf terhubung-3 dengan n titik, dan $n \geq 18$. Jika $H(G) \geq \frac{n^2-4n+15}{2}$ maka G Hamilton atau $G = K_3 \vee \left((3K_1) \cup K_{n-6}\right)$.

Bukti:
Misalkan G graf yang memenuhi premis pada Teorema, dengan $H(G) \geq \frac{n^2-4n+15}{2}$.

1. Jika $H(G) > \frac{n^2-4n+15}{2}$, maka G graf Hamilton.
   Andaikan G bukan graf Hamilton dan G bukan $G = K_3 \vee ((3K_1) \cup K_{n-6})$. Berdasarkan Lemma 2.4, maka $m \leq \binom{n-3}{2} + 8$ dimana $m = |E(G)|$.
   $m \leq \binom{n-3}{2} + 8$
   $= \frac{(n-3)(n-4)}{2} + 8$
   $= \frac{n^2-7n+28}{2}$
   Berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh:
   $\frac{1}{4}n(n-1) + \frac{1}{2}m$
   $\leq \frac{1}{4}n(n-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{n^2-7n+28}{2}\right)$
   $= \frac{n^2-4n+14}{2}$
   Jika $H(G) \leq \frac{n^2-4n+14}{2}$, maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap. ■
2. Jika $H(G) = \frac{n^2-4n+15}{2}$, maka diperoleh $G = K_3 \vee \left((3K_1) \cup K_{n-6}\right)$ dan G bukan graf Hamilton.

Teorema 3.7:
Misalkan G graf terhubung-k dengan n titik. Jika $H(G) \geq \frac{2n(n-1)-(k+1)(n-k-1)+1}{4}$ maka G graf Hamilton.

Bukti:
Misalkan G graf yang memenuhi premis pada Teorema, dengan $H(G) \geq \frac{2n(n-1)-(k+1)(n-k-1)+1}{4}$.

1. Jika $H(G) > \frac{2n(n-1)-(k+1)(n-k-1)+1}{4}$, maka G graf Hamilton.
   Andaikan G tidak Hamilton. Berdasarkan Lemma 2.5, maka $m \leq \binom{n}{2} - \frac{(k+1)(n-k-1)}{2}$ dimana $m = |E(G)|$.
   $m \leq \binom{n}{2} - \frac{(k+1)(n-k-1)}{2}$

$= \frac{(n)(n-1)}{2} - \frac{(k+1)(n-k-1)}{2}$

$= \frac{n^2+k^2-kn+2k-2n+1}{2}$

Berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh:

$\frac{1}{4}n(n-1) + \frac{1}{2}m$

$\leq \frac{1}{4}n(n-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{n^2+k^2-kn+2k-2n+1}{2}\right)$

$= \frac{2n(n-1)-(k+1)(n-k-1)}{4}$

Jika $H(G) \leq \frac{2n(n-1)-(k+1)(n-k-1)}{4}$, maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap. ■

C. Syarat Cukup Bagi Sebuah Graf Merupakan Graf Semi-Hamilton.

Berikut akan dibahas syarat indeks Harary dari suatu graf terhubung nontrivial dengan n titik dan $n \geq 4$, agar graf tersebut merupakan graf semi-Hamilton.

Teorema 3.8:

Misal G adalah graf terhubung yang memiliki n titik dan $n \geq 4$. Jika $H(G) \geq \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$ maka G graf semi-Hamilton, kecuali $G = K_1 \vee (K_{n-3} \cup 2K_1)$, atau $K_2 \vee (3K_1 \cup K_2)$, atau $K_4 \vee 6K_1$.

Bukti:

Misalkan G graf terhubung yang memenuhi premis pada Teorema, dengan $H(G) \geq \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$.

1. Jika $H(G) > \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$, maka G graf semi-Hamilton.

   Andaikan G bukan graf semi-Hamilton dengan barisan derajat $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sedemikian hingga $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ dan $n \geq 4$.

   Berdasarkan Lemma 2.6, ada sebuah bilangan bulat $k < \frac{n+1}{2}$ sedemikian hingga $d_k \leq k-1$ dan $d_{n-k+1} \leq n-k-1$. Karena G terhubung dan $d_k \leq k-1$, maka $k \geq 2$.

   Berdasarkan Lemma 3.1, untuk setiap i, $1 \leq i \leq n$

   $$\widehat{D}_G(v_i) \leq d_i + \frac{1}{2}(n - d_i - 1).$$

   Sehingga

   $$\sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_G(v_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(d_i + \frac{1}{2}(n - d_i - 1)\right).$$

   Dari Teorema 3.1.2,

   $H(G) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_G(v_i)$

   $\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i + \frac{1}{2}(n - d_i - 1)\right)$ (1)

   $= \frac{n(n-1)}{4} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d_i$

   $\leq \frac{n(n-1)}{4} + \frac{1}{4}[k(k-1)$

   $+(n-2k+1)(n-k-1)$

   $+(n-1)(k-1)]$ (2)

   $= \frac{n(n-1)}{4} + 1 + \frac{(n-2)(n-3)}{4} - \frac{(k-2)(2n-3k-5)}{4}$

   $\leq \frac{n(n-1)}{4} + 1 + \frac{(n-2)(n-3)}{4}$ (3)

   $= \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$

   Sehingga, dapat disimpulkan bahwa $H(G) \leq \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$, padahal diketahui bahwa $H(G) > \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$.

   Jika $H(G) \leq \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$, maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap. ■

2. Jika $H(G) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$, maka relasi "sama dengan" dipenuhi pada kesamaan (1), (2), dan (3) .

   Selanjutnya, Berdasarkan Lemma 3.1, kesamaan (1) dipenuhi jika diameter graf $G \geq 2$. (*)

   Kesamaan (2) akan dipenuhi jika $d_1 = d_2 = \cdots = d_k = k-1$, $d_{k+1} = d_{k+2} = \cdots = d_{n-k+1} = n-k-1$, dan $d_{n-k+2} = d_{n-k+3} = \cdots = d_n = n-1$. (**)

   Kesamaan (3) dipenuhi jika (k-2)(2n-3k-5)=0 ekivalen dengan k=2 atau 2n=3k+5.

   - Jika k=2 maka G graf terhubung dengan $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = d_4 = \cdots = d_{n-1} = n-3$, dan $d_n = n-1$. Berakibat graf $G = K_1 \vee (K_{n-3} \cup 2K_1)$.
   - Jika 2n=3k+5, maka $n \leq 10$, karena $k < \frac{(n+1)}{2}$ maka n=7, k=3 atau n=10, k=5

     Dari (**), dapat diketahui bahwa G adalah graf terhubung yang berorder 7 dengan $d_1 = d_2 = d_3 = 2$, $d_4 = d_5 = 3$, $d_6 = d_7 = 6$

     Atau G adalah graf terhubung yang berorder 10 dengan $d_1 = \cdots = d_6 = 4$, $d_7 = \cdots = d_{10} = 9$. Berakibat graf $G = K_2 \vee (3K_1 \cup K_2)$ atau $G = K_4 \vee 6K_1$.

D. Syarat Cukup Bagi Sebuah Graf Merupakan Graf Hamilton-Kuat

Teorema berikut merupakan syarat indeks Harary suatu graf terhubung dengan n titik, agar graf tersebut merupakan graf Hamilton-kuat.

Teorema 3.9:

Misalkan G merupakan graf terhubung dengan n titik. Jika $H(G) \geq \frac{n^2-2n+3}{2}$ maka G graf Hamilton-kuat, kecuali $G = K_2 \vee (K_1 \cup K_{n-3})$ atau $K_3 \vee (3K_1)$.

Bukti:

Misalkan G graf terhubung yang memenuhi premis pada Teorema, dengan $H(G) \geq \frac{n^2-2n+3}{2}$.

1. Jika $H(G) > \frac{n^2-2n+3}{2}$, maka G graf Hamilton-kuat.
   Andaikan G bukan graf Hamilton-kuat dengan barisan derajat $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ sedemikian hingga $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ dan $n \geq 3$.
   Berdasarkan Lemma 2.7, ada sebuah bilangan bulat k dengan $2 \leq k < \frac{n}{2}$ sedemikian hingga $d_{k-1} \leq k$ dan $d_{n-k} \leq n-k$.
   Berdasarkan Lemma 3.1, untuk setiap i, $1 \leq i \leq n$
   $$\widehat{D}_G(v_i) \leq d_i + \frac{1}{2}(n - d_i - 1).$$
   Sehingga
   $$\sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_G(v_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(d_i + \frac{1}{2}(n - d_i - 1)\right).$$
   Dari Teorema 3.1.2,
   $$\begin{aligned} H(G) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_G(v_i) \\ &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(d_i + \tfrac{1}{2}(n - d_i - 1)\right) \quad (1) \\ &= \tfrac{n(n-1)}{4} + \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i \\ &\leq \tfrac{n(n-1)}{4} + \tfrac{1}{4}[k(k-1) + (n-2k+1)(n-k) + k(n-1)] \quad (2) \\ &= \tfrac{n(n-1)}{4} + 1 + \tfrac{(n-1)(n-2)}{4} - \tfrac{(k-2)(2n-3k-3)}{4} \\ &\leq \tfrac{n^2-2n+3}{2} - \tfrac{(k-2)(k-3)}{4} - \tfrac{(k-2)(n-2k)}{2} \quad (3) \\ &= \tfrac{n^2-2n+3}{2} \end{aligned}$$
   Sehingga, dapat disimpulkan bahwa $H(G) \leq \frac{n^2-2n+3}{2}$, padahal diketahui bahwa $H(G) > \frac{n^2-2n+3}{2}$.
   Jika $H(G) \leq \frac{n^2-2n+3}{2}$, maka hal ini kontradiksi dengan premia pada Teorema, dan bukti lengkap. ■
2. Jika $H(G) = \frac{n^2-2n+3}{2}$, maka relasi "sama dengan" berlaku pada kesamaan (1), (2), dan (3). Selanjutnya karena $k \geq 2$, dan $n \geq 2k$, maka k=2 atau (k=3 dan n=2k).
   Kesamaan (6) akan dipenuhi jika $d_1 = \cdots = d_{k-1} = k$, $d_k = \cdots = d_{n-k} = n-k$, dan $d_{n-k+1} = \cdots = d_n = n-1$.
   - Jika k=2, maka $d_1 = 2$, $d_2 = d_3 = \cdots = d_{n-2} = n-2$, dan $d_{n-1} = d_n = n-1$. Berakibat $G = K_2 \vee (K_1 \cup K_{n-3})$, dimana G bukan graf Hamilton-kuat.
   - Jika k=3 dan n=2k, maka n=6 sehingga $d_1 = 3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 3$, $d_4 = 5$, $d_5 = 5$ dan $d_6 = 5$. Berakibat $G = K_3 \vee (3K_1)$, dimana G bukan graf Hamilton-kuat.

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada skripsi yang berjudul indeks Harary graf Hamilton, semi-Hamilton dan Hamilton-kuat dapat disimpulkan hal-hal berikut:

1. Sebuah graf dikatakan sebagai graf Hamilton jika memenuhi syarat indeks Harary sebagai berikut:
   - ✓ Jika $H(G) \geq \frac{n^2-2n+2}{2}$ dan G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 3$. Maka G graf Hamilton, kecuali $G = K_1 \vee (K_1 \cup K_{n-2})$, atau $K_2 \vee (K_2^c \cup K_1)$.
   - ✓ Jika $H(G) \geq \frac{9n^2-3n-4}{6}$ dan $G = (X, Y)$ adalah graf bipartisi terhubung dengan bipartisi $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ dengan $n \geq 2$. Maka G graf Hamilton, kecuali $G = P_4$ (sebuah lintasan dengan 4 titik).
   - ✓ Jika $H(G) \geq \frac{n^2-3n+7}{2}$ dan G graf terhubung-2 dengan n titik, dan $n \geq 12$. Maka G Hamilton atau $G = K_2 \vee \left((2K_1) \cup K_{n-4}\right)$.
   - ✓ Jika $H(G) \geq \frac{n^2-4n+15}{2}$ dan G graf terhubung-3 dengan n titik, dan $n \geq 18$. Maka G Hamilton atau $G = K_3 \vee \left((3K_1) \cup K_{n-6}\right)$.
   - ✓ Jika $H(G) \geq \frac{2n(n-1)-(k+1)(n-k-1)+1}{4}$ dan G graf terhubung-k dengan n titik. Maka G graf Hamilton.
2. Sebuah graf dikatakan sebagai graf semi-Hamilton jika memenuhi syarat indeks Harary sebagai berikut:
   - ✓ Jika $H(G) \geq \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$ dan G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 4$. Maka G graf semi-Hamilton, kecuali $G \cong K_1 \vee (K_{n-3} \cup 2K_1)$, atau $K_2 \vee (3K_1 \cup K_2)$, atau $K_4 \vee 6K_1$.
3. Sebuah graf dikatakan sebagai graf Hamilton-kuat jika memenuhi syarat indeks Harary sebagai berikut:
   - ✓ Jika $H(G) \geq \frac{n^2-2n+3}{2}$ dan G merupakan graf terhubung dengan n titik. Maka G graf hamilton-kuat, kecuali $G = K_2 \vee (K_1 \cup K_{n-3})$ atau $K_3 \vee (3K_1)$.

Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya dapat membahas syarat perlu dan syarat cukup bagi sebuah graf, agar graf tersebut merupakan graf Hamilton, graf semi-Hamilton, maupun graf Hamilton-kuat menggunakan indeks Harary dari suatu graf.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unipress.

Byer, Own D, and Deirdre L Smeltzer. 2007. "Edge Bounds in Nonhamiltonian K-Connected Grafs" 307: 1572-79. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.09.008.

C. Berge, Graphs and Hypergraphs, American Elseveir Publishing Company, 1976.

Hua, Hongbo, and Maolin Wang. 2013. "On Harary Index and Traceable Grafs Harary Index Condition for Grafs to Be Traceable" 70:297-300.

Info, Article. 2017. "Distance-Based Topological Indices and Double Graf" 8 (1): 83-91. https://doi.org/10.22052/ijmc.2017.43073.

J.A. Bondy, U.S.R. Murty. 1976. "Graph Theory With Aplications". Macmillan, London and Elseveir, New York.

Li, Rao. 2015. "Harary Index and Some Hamiltonian Properties of Grafs." *AKCE International Journal of Grafs and Combinatorics* 12 (1). Elseveir B.V.:64-69. https://doi.org/10.1016/j.akcej.2015.06.010.

Liu, Ruifang, Xue Du, and Huicai Jia. 2017. "Some Observations on Harary Index and Traceable Grafs*"77 (1521315002): 195-208.

Plav, Dejan, Sonja Nikoli, and Nenaj Trinajsti. 1993. "On The Harary Index for the Characterization of Chemical Grafs*." 12:235-36.

Petersen, Graf, D. A. N. Beberapa, Sifat-sifat Yang Berkaitan, Petersen Graf, and Some related Properties. 2011. "No title."

Teknik, Sekolah. 2012. "Penerapan Sirkuit Hamilton Dalam Perencanaan Lintasan trem Di ITB."

Zhou, Bo. 2008. "On Harary Index," n0. September 2015. https://doi.org/10.1007/s10910-007-9339-2.