MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 6 No.2 Tahun 2018*
ISSN 2301-9115

BEBERAPA SYARAT GRAF TIDAK BERSAHABAT

Salwa Yuliantina
(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
E-mail : salwayuliantina@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
E-mail : ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G sebuah graf dengan himpunan titik G dilambangkan dengan $V(G)$. Misalkan v sebuah titik di G. Persekitaran titik v di G, dilambangkan dengan $N(v)$, adalah himpunan semua titik G yang berhubungan langsung dititik v. Misalkan $S \subseteq V(G)$. Sebuah titik $v \in S$ dikatakan tidak bersahabat jika banyak titik persekitaran v di $V(G)\backslash S$ lebih dari atau sama dengan banyak titik perekitaran v di S. Dengan kata lain, $|N(v) \cap V(G)\backslash S| \geq |N(v) \cap S|$. Sedangkan titik v dikatakan sangat tidak bersahabat apabila banyak titik persekitaran v di $V(G)\backslash S$ lebih besar dari banyaknya titik persekitaran v di S. Dengan kata lain, $|N(v) \cap V(G)\backslash S| > |N(v) \cap S|$. Jika setiap titik $v \in S$ dan setiap titik $u \in V(G)\backslash S$ adalah titik-titik yang tidak bersahabat maka $(S, V(G)\backslash S)$ dinamakan sebuah bipartisi tidak bersahabat dari graf G, dan G dikatakan graf tidak bersahabat. Begitu juga untuk setiap titik $v \in S$ dan setiap titik $u \in V(G)\backslash S)$ dinamakan sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf G, dan G dikatakan graf sangat tidak bersahabat.

Dalam skripsi ini dibahas syarat-syarat graf tidak bersahabat maupun graf sangat tidak bersahabat.

Kata Kunci : graf tidak bersahabat, graf sangat tidak bersahabat

Abstract

Let G be a graph with vertex set $V(G)$ and $v \in V(G)$. The neighborhood of a vertex v in G graph, is denoted by $N(v)$, is the set of all vertices in G which are adjacent to the vertex v. Let S be a proper subset of $V(G)$. A vertex $v \in S$ is called an unfriendly vertex if the number of neighborhood vertices of v in $V(G)\backslash S$ grather than or equal two the number of neighborhood vertices of v in S. That is, $|N(v) \cap V(G)\backslash S| \geq |N(v) \cap S|$. And, a vertex v is called a very unfriendly vertex if the neighborhood vertices of v in $V(G)\backslash S$ is grather than the number of neighborhood vertices of v in S. That is, $|N(v) \cap V(G)\backslash S| > |N(v) \cap S|$. If every vertex $v \in S$ and every vertex $u \in V(G)\backslash S$ is unfriendly (very unfriendly) vertex, than $(S, V(G)\backslash S)$ is called unfriendly (very unfriendly) bipartition of G. Furthermore, such a graph G is called unfriendly (very unfriendly) graph. In this thesis, we have established some sufficient conditions for a graph to be unfriendly or very unfriendly we also have established a necessary and sufficient condition for a cactus graph to be very unfriendly graph.

Keywords: unfriendly graph, very unfriendly graph

PENDAHULUAN

Teori Graf merupakan cabang dari matematika yang sudah ada sejak lama. Salah satu topik dari teori graf adalah himpunan dominasi. Secara historis, masalah dominasi mulai dipelajari dari tahun 1950 oleh Hedetniemi dan Laskar, kemudian topik-topik lanjutan dalam dominasi yang telah didefinisikan oleh beberapa penulis dan lebih dari 75 jenis dominasi dituliskan dalam buku oleh Haynes dkk (Sivakumar dkk:2012). Haynes (2015:1) menyatakan bipartisi tidak bersahabat jika *graph* $G = (V, E)$ memiliki himpunan bagian $S \subseteq V(G)$, dengan sebuah titik v di S. Banyak titik persekitaran v di $V(G)\backslash S$ tidak kurang dari banyak persekitaran titik v di S. Selanjutnya , titik v di S dikatakan sangat tidak bersahabat jika banyak titik persekitaran v di $V(G)\backslash S$ lebih dari banyaknya persekitaran titik v di S.

KAJIAN TEORI

A. Graf

Definisi 2.1: Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu titik dan sisi. Titik merupskan obyek-obyek yang himpunannya berhingga tak kosong $V(G)$ dan sisi berisikan himpunan berhingga (boleh kosong) $E(G)$, sehingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan titik pada G disebut $V(G)$ dan himpunan sisi G disebut $E(G)$. Misalkan u dan v adalah dua titik di G dan $e = (u, v)$ adalah sebuah sisi G. Titik u dan v berhubungan langsung di G, sisi e menghubungkan titik u dan titik v di G, sisi e terkait dengan titik u dan juga titik v

(Budayasa, 2007)

B. Graf Sederhana

Definisi 2.2: Graf yang tidak mempunyai sisi rangkap dan tidak memiliki gelung (*loop*) disebut **graf sederhana**

(Budayasa, 2007)

C. Sikel

Definisi 2.3: Misalkan graf G memiliki jejak $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{k-1}, v_{k-1}, \dots, e_k, v_k)$ adalah sebuah jejak tertutup *(closed trail)* di G, maka W disebut sikel jika titik awal dan semua titik internalnya berbeda

(Budayasa, 2007)

D. Graf Bagian

Definisi 2.4: Sebuah graf H disebut graf bagian dari graf G, ditulis $H \subset G$, jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$

(Budayasa, 2007)

E. Derajat Titik Graf

Definisi 2.5: Misalkan G sebuah graf dan v sebuah titik G. Derajat titik v, dilambangkan dengan $d_G(v)$ atau *d(v)*, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali). Derajat minimum G, dilambangkan dengan $\delta(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta(G) = \text{minimum}\,\{d(v)/v \in V(G)\}$$

Sedangkan derajat maksimum G, dilambangkan dengan $\Delta(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\Delta(G) = \text{maksimum}\,\{d(v)/\, v \in V(G)\}.$$

Graf G disebut **Graf beraturan-*k*** jika setiap titik G berderajat k. Misalnya, graf komplit dengan n titik adalah graf beraturan-(n-1). Sikel dengan n titik, C_n, adalah graf beraturan-2. Graf H pada Gambar 2.13 adalah graf beraturan-3. Perhatikan bahwa, jika G graf beraturan, maka $\delta(G) = \Delta(G)$

(Budayasa, 2007)

F. Graf *Non*-trivial

Definisi 2.6: Suatu graf G disebut graf *non*-trivial jika graf G memiliki derajat paling sedikit dua

(Chartrand & Oellermann 1993)

G. Graf Bipartisi dan Graf Bipartisi komplit

Definisi 2.7: Sebuah graf G disebut graf bipartisi jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B pada graf sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B, dilambangkan dengan $G(A, B)$. (A,B) merupakan bipartisi dari G

(Budayasa, 2007)

H. Titik Terasing Graf

Definisi 2.8: Sebuah graf G dikatakan graf yang memiliki titik terasing jika graf G memiliki titik yang berderajat nol

(Permatasari, 2016)

I. Graf Pohon

Definisi 2.9: Jika G graf terhubung dan tidak ada sikel maka G dikatakan sebuah pohon

(Budayasa, 2007)

J. Perkalian Kartesius Dua Buah Graf (Cartesius Product)

Definisi 2.10: Misal G dan H dua graf yang saling lepas. Perkalian kartesius dari G dan H, dilambangkan dengan $G \times H$, adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(G \times H) = V(G) \times V(H) = \{(u, v)/u \in V(G)\ dan\ v \in V(H)\}$. Himpunan sisi $E(G \times H)$ terdiri dari titik (u, v) dan $(w,$ x) berhubungan langsung di $G \times H$ dengan $u = w$ dan berhubungan langsung dengan x di H, atau u berhubungan langsung dengan w di G dan $v = x$

(Haynes,2015:156)

K. Graf Kaktus (*Cactus Graph*)

Definisi 2.11: Terhubung-2 maksimal pada graf G adalah banyaknya graf bagian yang berhubungan langsung maksimal 2. Blok pada graf G merupakan sebuah graf bagian G yang terhubung-2 maksimal. Blok akhir merupakan sebuah blok di graf G yang hanya memiliki satu titik pemutus di graf G.

Graf G disebut graf kaktus jika G terhubung dan setiap blok dari G berupa sebuah sisi atau sebuah sikel

(Paten,et al.,2011)

L. Komplemen Graf

Definisi 2.12: Misalkan G sebuah graf sederhana. Komplemen G, dilambangkan dengan $\bar{G}$ adalah graf sederhana yang himpunan titik nya sama dengan himpunan titik G. Jika titik u dan v di $\bar{G}$ berhubungan langsung maka titik u dan v tidak berhubungan langsung pada G. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ dan $H = (V(H), E(H))$ merupakan dua buah graf, maka gabungan G dengan H, dinotasikan $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G) \cup E(H)$. Dengan demikian, jika G graf sederhana dengan n titik, maka $G \cup \bar{G} = K_n$

(Budayasa, 2007)

PEMBAHASAN

A. Bipartisi tidak bersahabat pada graf

Definisi 3.1: Misal $G = (V(G), E(G))$ sebuah graf dan v sebuah titik di G. Persekitaran buka di v, dilambangkan dengan $N_G(v)$ atau $N(v)$, adalah himpunan semua titik G yang berhubungan langsung dengan v. Dengan kata lain,

$$N(v) = \{u \in V(G) / (u, v) \in E(G)\}$$

Sedangkan persekitaran tutup dari titik v, dilambangkan dengan $N[v]$, didefinisikan sebagai berikut

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}$$

Misal $S \subseteq V(G)$, persekitaran buka dari S, dilambangkan $N(S)$, didefinisikan sebagai berikut

$$N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$$

Sedangkan Persekitaran tutup S, dilambangkan $N[v]$ adalah

$$N[v] = N(S) \cup S$$

Definisi 3.1.1: Misal $S \subseteq V(G)$. Sebuah titik v di S dikatakan tidak bersahabat jika banyak titik persekitaran pada v di $V(G)\backslash S$ tidak kurang dari banyak persekitaran buka titik v di S. Dengan kata lain, $|N(v) \cap (V(G)\backslash S)| \geq |N(v) \cap S|$.

Himpunan S dikatakan tidak bersahabat jika setiap titik di S tidak bersahabat.

Sebuah bipartisi, B $= (S, V\backslash S)$ dikatakan tidak bersahabat jika setiap dari S dan $V(G)\backslash S$ tidak bersahabat. Sebuah graf yang memiliki sebuah bipartisi tidak bersahabat disebut graf tidak bersahabat.

Sebuah bipartisi $B = (S, V(G)\backslash S)$ pada graf G dikatakan $e[S, V(G)\backslash S]$ maksimum jika banyaknya sisi yang menghubungkan $(S, V(G)\backslash S)$ maksimum.

Teorema 3.1: Jika G terhubung dengan n titik dan n ≥ 2 maka G mempunyai sebuah bipartisi tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

Bukti:

Misalkan $B = (S, V(G)\backslash S)$ sebuah bipartisi graf G sedemikian hingga $e[S, V(G)\backslash S]$ maksimum.

Andaikan B bipartisi bukan tidak bersahabat. Maka S bukan tidak bersahabat atau $V(G)\backslash S$ bukan tidak bersahabat.

Jika S bukan tidak bersahabat maka ada titik di S bukan tidak bersahabat. Misalkan titik tersebut v. Akibatnya $|N(v) \cap (V(G)\backslash S)| < |N(v) \cap S|$.

Selanjutnya titik v dipindah ke $V(G)\backslash S$, sehingga didapat bipartisi baru $B' = (S', V(G)\backslash S')$ dengan $S' = S \backslash \{v\}$ dengan $e[S', V(G)\backslash S'] > e[S, V(G)\backslash S]$, kontradiksi dengan $e[S, V(G)\backslash S]$ maksimum.

Jika $V(G)\backslash S$ bukan tidak bersahabat. Maka ada titik di $V(G)\backslash S$ bukan tidak bersahabat misalkan titik tersebut v. Akibatnya $|N(v) \cap S| < |N(v) \cap (V(G)\backslash S)|$.

Selanjutnya titik v dipindah ke S sehingga didapat bipartisi baru $B' = (S', V(G)\backslash S')$ dengan $S' = S \cup \{v\}$.

Jelas bahwa $e[S', V(G)\backslash S'] > e[S, V(G)\backslash S]$, kontradiksi dengan $e[S, V(G)\backslash S]$ maksimum. ■

B. Bipartisi sangat tidak bersahabat pada graf.

Definisi 3.2: Misal S sebuah himpunan bagian dari $V(G)$. Sebuah titik v di S dikatakan sangat tidak bersahabat jika $|N(v) \cap (V(G)\backslash S)| > |N(v) \cap S|$. Himpunan S dikatakan sangat tidak bersahabat jika setiap titik di S sangat tidak bersahabat.

Sebuah bipartisi B $= (S, V(G)\backslash S)$ dikatakan sangat tidak bersahabat jika setiap dari S dan $V(G)\backslash S$ sangat tidak bersahabat. Sebuah graf yang memiliki sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat disebut graf sangat tidak bersahabat.

Teorema 3.2: Jika G graf bipartisi tanpa titik terasing maka G sangat tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

Bukti:

Misalkan G graf, bipartisi dengan (A, B) maka setiap sisi G hanya menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B dan tidak ada sisi G yang menghubungkan dua titik di A begitu juga tidak ada sisi G yang menghubungkan dua titik di B.

Perhatikan bahwa $V(G)\backslash A = B$

Jika $v \in A$ maka $N(v) \cap A = \emptyset$, sehingga $|N(v) \cap A| = 0$............(1)

Karena v bukan titik terasing maka $d(v) \geq 1$

Sehingga $|N(v) \cap V(G)\backslash A| \geq 1$............(2)

Dari (1) dan (2) didapatkan $|N(v) \cap V(G)\backslash A| > |N(v) \cap A|$, ini berarti setiap titik v di A merupakan titik sangat tidak bersahabat sehingga A merupakan himpunan sangat tidak bersahabat.

Begitu juga untuk setiap titik w di $B = V(G)\backslash A$, $|N(w) \cap V(G)\backslash A| = 0$ dan $N(w) \cap V(G)\backslash A = |N(w) \cap A| \geq 1$.

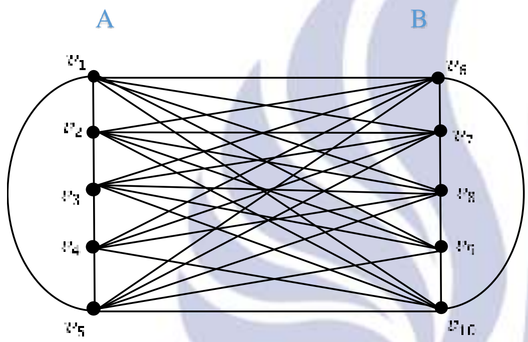
Sehingga $|N(w) \cap A| > |N(w) \cap V(G)\backslash A|$, ini berarti setiap titik $B = V(G)\backslash A$ sangat tidak bersahabat sehingga B merupakan himpunan sangat tidak bersahabat.

Jadi, bipartisi (A, B) merupakan sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dengan demikian graf bipartisi $G = (A, B)$ merupakan graf sangat tidak bersahabat. ■

Teorema 3.3: Jika C_5 sebuah sikel dengan 5 titik dan $G = C_5 + C_5$, maka G sangat tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

Bukti:



Misal (A, B) sebuah bipartisi dari G dengan $A = \{v_i / 1 \leq i \leq 5\}$ dan $B = \{v_i / 6 \leq i \leq 10\}$.

Perhatikan bahwa $\forall_i, 1 \leq i \leq 5, \left|N_{(v_i)} \cap A\right| = 2 < 5 = \left|N_{(v_i)} \cap B\right|$.

Sehingga $\forall_i, 1 \leq i \leq 5$, v_i merupakan titik sangat tidak bersahabat di G.

Selanjutnya $\forall_i, 6 \leq i \leq 10$, $\left|N_{(v_i)} \cap B\right| = 2 < 5 = \left|N_{(v_i)} \cap A\right|$. Sehingga $\forall_i, 6 \leq i \leq 10$, v_i merupakan titik sangat tidak bersahabat di G.

Jadi (A, B) merupakan sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di G. Dengan demikian G sangat tidak bersahabat sehingga Teorema 3.3 terbukti. ■

Teorema 3.4

Tidak ada bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf G merupakan sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf $\bar{G}$.

(Haynes, 2015)

Bukti:

Misal $\pi = (A, B)$ bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf G. Maka π bukan sangat tidak bersahabat dari graf $\bar{G}$.

- Misal $v \in A$, $|N_G(v) \cap A| = n_1$, $|N_G(v) \cap B| = n_2$

Karena v sangat tidak bersahabat di G maka $n_2 > n_1$ …… **(1)**

Selanjutnya, $|N_{\bar{G}}(v) \cap A| = |A| - n_1 - 1$ dan
$|N_{\bar{G}}(v) \cap B| = |B| - n_2$

Berdasarkan asumsi,

$$|N_{\bar{G}}(v) \cap B| > |N_{\bar{G}}(v) \cap A|$$

Sehingga,
$|B| - n_2 > |A| - n_1 - 1$ …… **(2)**

Dari 1 dan 2 diperoleh, $|B| > |A|$

- Misal $v \in B$, $|N_G(v) \cap B| = n_1$, $|N_G(v) \cap A| = n_2$

Karena v sangat tidak bersahabat di G maka $n_2 > n_1$ …… **(1)**

Selanjutnya, $|N_{\bar{G}}(v) \cap B| = |B| - n_1 - 1$ dan $|N_{\bar{G}}(v) \cap A| = |A| - n_2$

Berdasarkan asumsi,

$|N_{\bar{G}}(v) \cap A| > |N_{\bar{G}}(v) \cap B|$

Sehingga,
$|A| - n_2 > |B| - n_1 - 1$ …… (2)

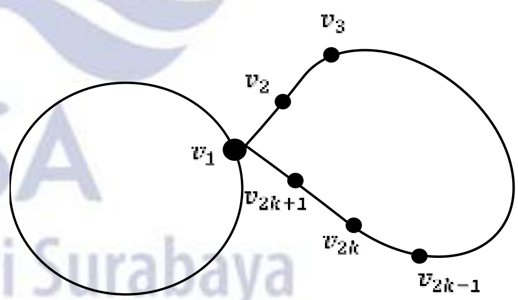
Dari 1 dan 2 diperoleh, $|A| > |B|$, Kontradiksi. Demikian Teorema 3.4 terbukti. ■

Teorema 3.5

Jika G sebuah graf memiliki sebuah blok-akhir berupa sebuah sikel ganjil maka G bukan sangat tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

Bukti:



Misal G sebuah graf sikel ganjil sebagai blok-akhir dan misalkan blok-akhir tersebut adalah $C = (v_1, v_2, \dots \dots \dots, v_{2k+1}, v_1)$ sedemikian hingga v_1 adalah sebuah titik pemutus G di C.

Andaikan G sangat tidak bersahabat, maka G memiliki sebuah bipartisi $\pi = (A, B)$ yang sangat tidak bersahabat.

Tanpa menghilangkan keumuman, misal $v_1 \in A$

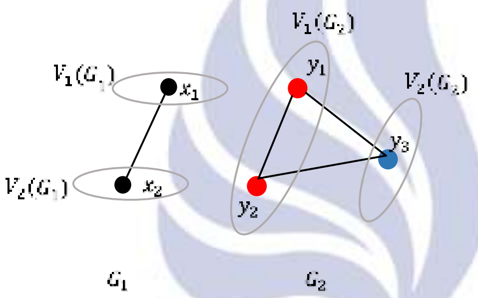
Karena C sebuah blok-akhir di G dan v_1 sebuah titik pemutus di G pada C maka untuk $\forall_{j, 2 \leq j \leq 2k+1}, d_{(vj)} = 2$.

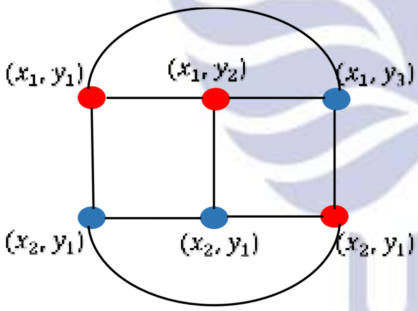
Karena $\pi = (A, B)$ sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di G, maka $v_2 \notin A$ dengan kata lain v_2 anggota di B.
Begitu juga $\forall_{i,1 \le i \le k}, v_{2i} \in B$ dan $v_{2i+1} \in A$.
Sehingga, $\left|N_{(v_{2k+1})} \cap A\right| = |\{v_1\}| = 1$ dan
$\left|N_{(v_{2k+1})} \cap B\right| = |\{v_{2k}\}| = 1$
Ini berarti titik v_{2k+1} bukan sangat tidak bersahabat dalam bipartisi $\pi = (A, B)$.
Kontradiksi. Dengan demikian Teorema 3.5 terbukti ■

Teorema 3.6
Jika G_1 sebuah graf sangat tidak bersahabat dan G_2 sebuah graf terhubung maka $G = G_1 \times G_2$ graf sangat tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

Bukti:





Graf $G = G_1 \times G_2$

Karena G_1 graf sangat tidak bersahabat maka ada bipartisi $\pi_1 = \left(V_1(G_1), V_2(G_1)\right)$ yang sangat tidak bersahabat di G_1. Karena G_2 graf terhubung , maka berdasarkan Teorema 3.1 G_2 mempunyai sebuah bipartisi tidak bersahabat $\pi_2 = (V_1(G_2), V_2(G_2))$.
Selanjutnya definisikan dua pewarnaan, dinamakan P_1 dan P_2. Dari titik-titik graf G_2. Sebagai berikut : P_1 mewarnai titik-titik $V_1(G_2)$ dengan warna merah dan titik-titik $V_2(G_2)$ dengan warna biru dan pewarnaan P_2 adalah menukar warna-warna dari P_1.
Selanjutnya, mewarnai titik-titik dari graf $G = G_1 \times G_2$ dengan warna merah dan biru dengan cara sebagai berikut.

Untuk setiap titik $v \in V(G_1)$, kita pandang v pada bipartisi V_1 di G_1 untuk mewarnai titik G_{2_v} di $G = G_1 \times G_2$ sebagai berikut.
Jika $v \in V_1(G_1)$, maka gunakan pewarnaan P_1 untuk titik G_{2_v} ;
Jika $v \in V_2(G_1)$, maka gunakan pewarnaan P_2 untuk titik G_{2_v} .
Misalkan M himpunan titik-titik dari $G = G_1 \times G_2$ yang berwarna merah dan B himpunan titik-titik dari $G = G_1 \times G_2$ yang berwarna biru.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\pi = (M, B)$ sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di graph $G = G_1 \times G_2$.
Setiap titik di M sangat tidak bersahabat begitu juga setiap titik di B sangat tidak bersahabat.
Pandang sebuah titik $(x, y) \in V_{(G=G_1 \times G_2)}$. Tanpa menghilangkan keumuman misalkan titik (x, y) berwarna merah dan G_{2_x} diwarnai oleh P_1. Karena P_1 adalah sebuah bipartisi Merah-biru tidak bersahabat dari G_{2_x} , maka titik (x, y) mempunyai tetangga bewarna biru paling sedikit sama dengan banyaknya tetangga berwarna merah.
Selanjutnya cukup ditunjukkan banyak tetangga titik (x, y) yang berwarna biru lebih besar daripada banyak tetanganya yang berwarna merah karena titik (x, y) berwarna merah terhadap pewarnaan P_1 dari G_{2_x} , maka titik (z, y) berwarna merah untuk semua $z \in V_1(G_{z_y})$. Karena $\pi_1 = \left(V_1\left(G_{1_y}\right), V_2\left(G_{1_y}\right)\right)$ adalah bipartisi sangat tidak bersahabat dari G_{1_y} , maka titik (x, y) mempunyai banyak tetangga berwarna biru lebih besar daripada banyak tetangga berwarna merah di G_{1_y}.
Akibatnya $\pi = (M, B)$ sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf $G = G_1 \times G_2$. Dengan demikian Teorema 3.6 terbukti ■

Teorema 3.7: Jika G_1 graf bipartisi tanpa titik terasing dan G_2 graf terhubung *non-trivial*, maka $G = G_1 \times G_2$ sangat tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

Bukti:
Karena graf G_1 merupakan graf bipartisi tanpa titik terasing, berdasarkan Teorema 3.2, maka G_1 merupakan graf sangat tidak bersahabat. Karena G_2 graf terhubung, berdasarkan Teorema 3.6 maka $G = G_1 \times G_2$ sangat tidak bersahabat.
Dengan demikian Teorema 3.7 terbukti. ■

C. Graf kaktus

Misal G adalah sebuah graf kaktus, B adalah sebuah blok dari G dan v sebuah titik pemutus G di B.

Cabang-v dari B di titik v, dilambangkan dengan B_v, adalah graf bagian G terhubung maksimal sedemikian hingga $V(B) \cap V(B_v) = \{v\}$.

Selanjutnya, kita katakan titik v sebagai akhir dari cabang B_v.

- Sebuah cabang dikatakan **cabang cantik** jika setiap titik pada sebuah cabang merupakan titik sangat tidak bersahabat.
- Sebuah cabang dikatakan **cabang tidak cantik** jika setiap titik pada sebuah cabang merupakan titik yang tidak bersahabat.
- Titik yang menopang suatu cabang maka titik tersebut disebut **akar**.

Teorema 3.8: Sebuah kaktus G sangat tidak bersahabat jika dan hanya jika setiap blok sikel ganjil C dari G menopang dua cabang cantik C_u dan C_v dimana u dan v titik yang berhubungan langsung di C.

Bukti :

- Jika sebuah kaktus G sangat tidak bersahabat maka setiap blok sikel ganjil C dari G menopang dua cabang cantik C_u dan C_v dimana u dan v titik yang berhubungan langsung di C.

  Jika setiap sikel di graf G merupakan panjang sikel genap maka G merupakan graf bipartisi berdasarkan Teorema 3.7 , maka G sangat tidak bersahabat.

  Andaikan graf G memiliki sebuah sikel ganjil katakan C. Sedemikian hingga ada dua titik $u\ dan\ v$ di C dan cabang yang berakar pada titik u dinamakan C_u, selanjutnya untuk cabang yang berakar pada titik v dinamakan C_v. Salah satu dari cabang C_u dan C_v merupakan cabang tak cantik.

  Karena graf G sangat tidak bersahabat maka ada sebuah bipartisi $\pi = (M, B)$ sangat tidak bersahabat di G.

  Karena C adalah sebuah sikel ganjil, sehingga untuk π paling sedikit dua titik berhubungan langsung , katakan titik (u, v) di C memiliki warna yang sama, yaitu warna merah.

  Asumsikan bahwa titik-titik (u, v) adalah akar-akar dari cabang-cabang C_u dan C_v secara berturut-turut, dan salah satu dari C_u dan C_v merupakan cabang tidak cantik. Tanpa menghilangkan keumuman misalkan C_u adalah cabang tidak cantik, sehingga C_u bukan sangat tidak bersahabat.

  Karena π adalah sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di G, maka semua titik-titik C_u kecuali u, adalah sangat tidak bersahabat atas π di C_u . Oleh karena itu u bukan sangat tidak bersahabat atas π di C_u.

Ini berarti banyaknya tetangga u yang berwarna merah paling sedikit sama dengan banyaknya tetangga u berwarna biru di C_u. Karena u sangat tidak bersahabat atas π pada G , artinya banyak tetangga u berwarna biru lebih besar daripada banyaknya tetangga u berwarna merah di G.

Ini berakibat bahwa dua tetangga di u di C berwarna biru khususnya $v \in B$. Kontradiksi bahwa $v \in M$.

Dengan demikian dapat diasumsikan paling sedikit salah satu dari u dan v, katakanlah u bukan akar dari sebuah cabang tetapi karena u dan v berwarna merah atas π mengakibatkan $d_G(u) = 2$, maka u bukan sangat tidak bersahabat di G atas π, kontradiksi.

Selanjutnya akan dibuktikan konversinya.

Misalkan G sebuah graf kaktus dan setiap sikel ganjil C di G menopang dua cabang cantik C_u dan C_v dimana (u, v) berhubungan langsung di C.

Untuk membuktikan G sangat tidak bersahabat digunakan induksi matematika pada banyakya sikel ganjil di G, misalkan t. Jika $t = 0$ maka tidak ada sikel ganjil pada G.

Ini berarti, setiap sikel di G adalah sikel genap. Akibatnya, G merupakan graf bipartisi. Sehingga, berdasarkan Teorema 3.2 , G sangat tidak bersahabat.

Jika $t = 1$, maka G memiliki tepat satu sikel ganjil, misalkan sikel ganjil tersebut adalah C. Misalkan $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ sedemikian hingga v_1 dan v_k merupakan dua titik yang berhubungan langsung di C dan menopang cabang-cabang cantik C_{v_1} dan C_{v_k}.

Untuk membuktikan bahwa G itu sangat tidak bersahabat akan ditunjukkan ada bipartisi $\pi = (M, B)$ sangat tidak bersahabat di G.

Misalkan $v_i \in M$ jika i ganjil dan $v_i \in B$ jika i genap maka v_1 dan v_k berwarna merah dan masing-masing mempunyai tepat satu tetangga berwarna biru di C.

Misalkan $\pi' = (V_1, V_2)$ sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dari C_{v_1}. Jika $v_1 \in V_1$, maka di C_{v_1} mewarnai titik-titik V_1 dengan warna merah dan titik-titik V_2 dengan warna biru, maka v_1 sangat tidak bersahabat di C_{v_1}. Akibatnya,

$|N_G(v_1) \cap M| = \left|N_{C_{v_1}}(v_1) \cap M\right| + 1 < \left|N_{C_{v_1}}(v_1) \cap B\right| + 1 = |N_G(v_1) \cap B|$. Ini berarti, titik v_1 sangat tidak bersahabat di G.

Dengan argumen serupa dapat ditunjukkan bahwa v_k sangat tidak bersahabat di G atas π.

$\forall_i, 2 \le i \le k-1$, jika $d_G(v_i) = 2$ maka v_i sangat tidak bersahabat.

Andaikan ada $i, 2 \leq i \leq k-1, d_G(v_i) \geq 3$ dan misalkan C_{v_i} cabang yang akarnya di v_i dari C.

Karena C satu-satunya sikel di G yang panjangnya ganjil, maka jika ada sikel di C_{v_i} maka sikel tersebut panjangnya genap. Akibatnya, C_{v_i} merupakan graf bipartisi. Sehingga, berdasarkan Teorema 3.2 , C_{v_i} sangat tidak bersahabat.

Misalkan $V' = (V_1, V_2)$ sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di C_{v_i}. Misalkan $v_i \in v_1$ dari C_{v_i}. Jika i ganjil, maka warnai titik-titik V_1 dengan warna merah dan warnai titik-titik V_2 dengan warna biru. Jika i genap maka warnai titik-titik V_1 dengan warna biru dan warnai titik-titik V_2 dengan warna merah.

Dengan demikian di G, titik-titik di C_{v_i} adalah titik-titik yang sangat tidak bersahabat atas bipartisi $\pi = (M, B)$. Ini berarti G sangat tidak bersahabat untuk kasus $t = 1$.

Asumsikan bahwa setiap graf kaktus yang memiliki blok sikel ganjil sebanyak kurang dari t dan setiap blok sikel ganjil menopang dua cabang cantik dimana dua titik berhubungan langsung yang merupakan akar-akar dari cabang cantik ,maka G merupakan graf sangat tidak bersahabat.

Misalkan G sebuah kaktus yang memiliki t sikel ganjil, $t > 2$ dan untuk setiap sikel ganjil terdapat dua titik yang berhubungan langsung yang menopang dua cabang cantik.

Dimulai dengan sebuah sikel ganjil C di G. Jika setiap cabang yang ditopang oleh C adalah sangat tidak bersahabat maka menggunakan argument serupa dengan kasus $t = 1$, diperoleh G sangat tidak bersahabat. Sehingga dapat asumsikan bahwa G memiliki sebuah sikel ganjil yang menopang sebuah cabang tidak cantik.

Diantara semua sikel-sikel ganjil yang memiliki cabang tidak cantik, dapat dipilih sikel C sedemikian hingga banyaknya titik di cabang tidak cantik yang didukung oleh C adalah cabang yang paling minimum.

Misalkan $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ sedemikian hingga v_1 dan v_k dua titik yang berhubungan langsung di C. Sehingga, C_{v_1} dan C_{v_k} dua cabang cantik.

Misalkan C_{v_i} sebuah cabang tidak cantik di C yang mempunyai banyak titik minimum diantara cabang-cabang tidak cantik dari C. Jelas bahwa $i \neq 1$ dan $i \neq k$.

Karena C_{v_i} sebuah cabang tidak cantik, maka C_{v_i} mempunyai paling sedikit sebuah sikel ganjil. Maka C_{v_i} memiliki paling sedikit satu sikel ganjil. Selanjutnya, karena C bukan sebuah sikel di C_{v_i}, maka C_{v_i} memiliki kurang dari t sikel ganjil. Jika C_{v_i} memenuhi premis asumsi maka C_{v_i} merupakan graf sangat tidak bersahabat, sehingga C_{v_i} adalah cabang cantik. Kontradiksi dengan asumsi bahwa C_{v_i} merupakan cabang tidak cantik.

Jika C_{v_i} tidak memenuhi premis asumsi maka v_i adalah sebuah titik pada sebuah sikel ganjil yang disebut C', pada C_{v_i} dan C'_{v_i} sebuah cabang cantik yg ditopang oleh C'.

Karena G memenuhi premis maka terdapat sebuah tetangga v_i yang disebut x pada C' sedemikian hingga C'_x adalah sebuah cabang cantik.

Warnai x dengan warna yang sama dengan v_i dan lanjutkan seperti pada kasus $t = 1$ akan diperoleh semua titik-titik C' sangat tidak bersahabat. Jika setiap cabang yang ditopang oleh C' sangat tidak bersahabat , maka menggunakan argument serupa dengan kasus $t = 1$, dapat ditunjukkan bahwa G sangat tidak bersahabat.

Dengan demikian, dapat diasumsikan bahwa ada titik y di C' sedemikian hingga cabang C'_y adalah cabang tidak cantik. Tetapi, karena C'_y adalah graf bagian sejati dari C_{v_i} ini berarti C'_y mempunyai banyak titik lebih sedikit dari banyak titik C_{v_i} , maka hal ini bertentangan dengan pemilihan C. Kontradiksi bahwa C_{v_i} cabang tidak cantik di C yang mempunyai banyak titik paling minimum.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa G sangat tidak bersahabat. ■

PENUTUP

A. Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dibahas pada skripsi dengan judul "Beberapa Syarat Graf Tidak Bersahabat" maka diperoleh hasil sebagai berikut.

1. Berdasarkan definisi graf G dikatakan tidak bersahabat jika G memiliki bipartisi tidak bersahabat. Dengan demikian syarat bagi sebuah graf agar graf tersebut tidak bersahabat yaitu, jika G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 2$ maka G mempunyai sebuah bipartisi tidak bersahabat. Hal tersebut berdasarkan Teorema 3.1.
2. Berdasarkan definisi graf G dikatakan sangat tidak bersahabat jika G memiliki bipartisi sangat tidak bersahabat. Dengan demikian syarat bagi sebuah graf agar graf tersebut sangat tidak bersahabat, yaitu graf G bipartisi tanpa titik terasing atau G sebuah graf memiliki sebuah blok-akhir berupa sebuah sikel ganjil. Hal tersebut berdasarkan Teorema 3.2 dan Teorema 3.5.

B. Saran

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenai Beberapa Syarat Graf Tidak Bersahabat. Penulis menyarankan kepada pembaca yang memiliki minat akademis yang sama dapat lebih mendalami dan mengembangkan mengenai teori karakterisasi graf-graf yang sangat tidak bersahabat yang belum dibahas dalam skripsi ini. Apabila ada kritik atau saran untuk skripsi ini bisa disampaikan melalui email penulis yuliantina.salwa@yahoo.co.id.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unipress.

B.Paten, M.Diekhans, D. Earl,J.St John,J. Ma,B. Suh, D. Haussler. (2011:469-481). *Cactus graphs for genome comparisons*. J. Comput. Biol. 18(3).

Chartrand & Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory.* University of California.

Permatasari Reni. (2016:7). *Penentuan Banyaknya Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Maksimal Empat.* Bandar Lampung: Universitas Lampung.

S. Sivakumar, N. D. Soner, A. Alwardi.2012. *Connected Equitable Domination in Graphs*,1: 123-130.

T.W.Haynes, et al. (2015:155-160). *Cost effective bipartitions in graphs.* USA: East Tennessee University,Clemson University.