MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 6 No.2 Tahun 2018*
ISSN 2301-9115

GRAF KLIK DARI GRAF JOIN DAN HASIL KALI CARTESIUS GRAF

Fitriyanti
S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : fitriyantifitriyanti@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Graf klik diperkenalkan oleh Hamelink pada tahun 1968. Misalkan G sebuah graf. Sebuah klik di graf G adalah subgraf komplit maksimal di G. Graf klik dari G dilambangkan dengan $K(G)$, yaitu graf yang himpunan titiknya berkorespondensi dengan himpunan klik G dan dua titik di $K(G)$ berhubungan langsung jika dan hanya jika dua klik G yang berkorespondensi dengan titik- titik di $K(G)$ irisannya tidak kosong. Graf klik dari $K(G)$ dilambangkan dengan $K(K(G))$ atau $K^2(G)$. Begitu juga graf klik dari $(K(G)) = K^2(G)$ dilambangkan dengan $K(K(K(G)))$ atau $K^3(G)$. Graf G dikatakan K-Konvergen jika ada bilangan bulat positif $m \geq n$ sedemikian sehingga $K^m(G) \cong G'$ dan $K^t(G) \cong G'$untuk setiap $t \geq m$. Jika m bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $K^m(G) \cong G$ maka G dikatakan K-Periodik dengan periode m. Dalam skripsi ini akan dibahas sejumlah kelas graf yang K-Konvergen khususnya akan ditunjukkan bahwa hasil kali kartesius dua graf klik-Helly merupakan graf K-Konvergen dengan periode 2.
Kata Kunci *:* **graf klik, K-konvergen, K-Periodik, klik-Helly.**

Abstract

Clique graph was introduced by Hamelink in 1968. Let G be a graph. A clique in graph G is a maximal complete subgraph in G. The clique graph of G denoted by $K(G)$, is a graph whose point set corresponds to the set of cliques in G ; and two vertices in $K(G)$ are adjacent if and only if the intersection of two corresponding cliques in G is not an empty set. The clique graph of $K(G)$ is denoted by $K(K(G))$ or $K^2(G)$. The clique graph of $K(K(G)) = K^2(G)$ is denoted by $K(K(K(G)))$ or $K^3(G)$. A Graph G is called to be K-Convergent if there is a positive integer $m \geq n$ and a graph G' such that $K^m(G) \cong G'$ and $K^t(G) \cong G'$ for each $t \geq m$. If m is the smallest positive integer such that $K^m(G) \cong G$ then G is said to be K-Periodic with period of m. This thesis will discuss a number of classes of graphs that K-Convergent in particular it will be shown that the cartesian product of two clique-Helly graphs is K-Convergent graph with period of 2.
Keywords : clique graph, K-Convergent, K-Periodic, clique-Helly.

PENDAHULUAN

Teori graf adalah studi matematika yang diperkenalkan oleh seorang ahli matematika asal Swiss, Leonhard Euler pada tahun 1736 tentang masalah jembatan Konigsberg yang dapat diselesaikan dengan teori graf (Sutarno dkk, 2003 : 58).

Banyak sekali aplikasi graf dalam kehidupan manusia. Misalkannya, pada penggambaran jaringan komunikasi, ilmu komputer, riset operasi, rangkaian listrik, senyawa kimia, algoritma, peta, dan lain-lainnya. (Reni, 2011)

Seiring dengan perkembangan teori graf, jenis – jenis graf pun semakin banyak. Berawal dari graf sederhana, graf terhubung, subgraf dan sampai ditemukannya graf komplit.

Graf klik diperkenalkan oleh Hamelink pada tahun 1968. Misalkan G sebuah graf. Sebuah klik di graf G adalah subgraf komplit maksimal di G. Graf klik dari G dilambangkan dengan $K(G)$, adalah graf yang himpunan titiknya berkorespondensi dengan himpunan klik G dan dua titik di $K(G)$ berhubungan langsung jika dan hanya jika dua klik G yang berkorespondensi dengan titik tersebut irisannya tidak kosong. (Hegde and Suresh, 2016). Dengan mempelajari graf klik kita dapat menyelidiki penerapan graf klik dalam bidang bioinformaika. Graf klik dibedakan menjadi dua yaitu graf K-konvergen dan graf K-divergen. Graf G disebut K-Konvergen jika ada bilangan bulat positif $m \geq n$

sedemikian sehingga $K^m(G) \cong G'$ dan $K^t(G) \cong G'$untuk setiap $t \geq m$, sedangkan graf G dikatakan K-Divergen jika $\{K^n(G) : n \in N\}$ tak berhingga. Penjumlahan dari dua graf disebut dengan graf join. Sedangkan perkalian dari dua graf disebut dengan hasil kali kartesius dua graf. Dengan kita mempelajari graf klik dari graf join dua graf, kita dapat menyelidiki banyaknya klik dalam suatu graf. Sedangkan dengan kita mempelajari hasil kali kartesius dua graf, kita dapat menyelidiki graf K-Konvergen dan K-Periode dalam suatu graf. Oleh karena itu akan dibahas sifat – sifat graf klik dari graf join dua graf dan sifat sifat graf klik dari hasil kali cartesius dua graf. Selain itu dalam pokok bahasan graf klik terdapat istilah graf klik Helly. Graf G disebut graf klik-Helly jika himpunan klik G memiliki sifat Helly, yaitu $\forall\, Q_i, Q_j, Q_k \in G$ dan $i \neq j \neq k$ maka $Q_i \cap Q_j \cap Q_k \neq \emptyset$.

KAJIAN TEORI

Graf

Definisi 2.1 Sebuah graf G merupakan pasangan terurut yang memuat himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek – objek yang disebut *titik* dan himpunan berhingga (tidak kosong) $E(G)$ yang elemen – elemennya disebut *sisi* sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan obyek - obyek di $V(G)$.

(Budayasa, 2007)

Subgraf

Definisi 2.4 Misalkan suatu graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Suatu subgraf dari G adalah graf yang semua titiknya menjadi bagian dari V dan semua sisinya menjadi bagian dari E.

(Budayasa, 2007)

Subgraf Terinduksi

Definisi 2.5 Untuk sebarang himpunan titik S pada G, subgraf dari G yang terinduksi (dibangun) oleh S, adalah sebuah subgraf dari G yang himpunan titiknya adalah S dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi G.

(Budayasa, 2007)

Graf Komplit

Definisi 2.6 Sebuah graf komplit dengan n titik, dilambangkan dengan K_n adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi.

(Budayasa, 2007)

Subgraf Komplit

Definisi 2.7 Graf H disebut subgraf komplit dari graf G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik – titik di G dan himpunan sisi – sisi di H adalah subhimpunan dari himpunan sisi di G yang mempunyai jumlah derajat sama dan setiap titik berhubungan langsung. Graf H disebut subgraf komplit maksimal dari graf G jika tidak dimuat oleh subgraf komplit yang lain. Sedangkan Graf H bukan subgraf komplit maksimal dari graf G jika dimuat oleh subgraf komplit yang lain.

(Budayasa, 2007)

Isomorfisme

Definisi 2.8 Dua graf P dan Q disebut isomorfik ditulis $P \cong Q$ jika terdapat korespondensi satu – satu antara himpunan titik P dan himpunan titik Q sedemikian sehingga dua titik di P berhubungan langsung jika dan hanya jika petanya juga berhubungan langsung di Q.

(Budayasa, 2007)

Graf Join

Definisi 2.9 Misalkan $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf yang saling lepas. Graf join G_1 dan G_2 dilambangkan dengan $G_1 + G_2$ yaitu sebuah graf sedemikian hingga,
$V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{e = (u, v) | \, u \in V(G_1) \wedge v \in V(G_2)$

(Budayasa, 2007)

Graf Klik

Definisi 2.10 Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah klik di G adalah sebuah subgraf komplit maksimal. Himpunan semua klik di G dilambangkan dengan $\mathcal{K}(G)$. Graf klik dari G dilambangkan dengan $K(G)$, adalah graf yang himpunan titiknya adalah $\mathcal{K}(G)$ dan 2 titik Q_i dan Q_j di $\mathcal{K}(G)$ dihubungkan dengan sebuah sisi jika dan hanya jika $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$.

(Budayasa, 2007)

K-Konvergen

Definisi 2.11 Graf G dikatakan K-Konvergen jika ada bilangan bulat positif $m \geq n$ sedemikian sehingga $K^m(G) \cong G'$ dan $K^t(G) \cong G'$ untuk setiap $t \geq m$, sedangkan graf G dikatakan K-Divergen jika $\{K^n(G) \mid n \in N\}$ tak berhingga.

(Budayasa, 2007)

K-Periode

Definisi 2.12 Sebuah graf G disebut K-Periode jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $K^n \cong G$ dan bilangan bulat terkecil n yang demikian disebut K-Periodik dari G dan dilambangkan dengan K-Per (G).

(Budayasa, 2007)

UNESA Universitas Negeri Surabaya

Graf Klik-Helly

Definisi 2.13 Graf G disebut graf klik-Helly jika himpunan klik G memiliki sifat Helly, yaitu $\forall\, Q_i, Q_j, Q_k \in G$ dan $i \not\equiv j \not\equiv k$ maka $Q_i \cap Q_j \cap Q_k \neq \emptyset$.

(Budayasa, 2007)

PEMBAHASAN

Sifat – Sifat Graf Klik dari Graf Join Dua Graf

Pada bab ini akan diawali dengan menyatakan bahwa join dua klik dari dua graf merupakan sebuah klik dari graf join tersebut.

Teorema 3.1 :

Misalkan G_1 dan G_2 dua graf dan $G = G_1 + G_2$, maka X adalah klik di G_1 dan Y adalah klik di G_2 jika dan hanya jika $X + Y$ adalah klik di $G = G_1 + G_2$.

Bukti :

(=>) Misalkan X adalah klik di G_1 dan Y adalah klik di G_2, dan $G_1 + G_2 = G$.

Andaikan $X + Y$ bukan klik di G. Ini berarti $X + Y$ bukan subgraf komplit maksimal di G. Dengan demikian ada subgraf komplit lain dari G yang memuat graf komplit $X + Y$, namakan subgraf komplit tersebut adalah Q. Perhatikan bahwa graf komplit $X + Y$ merupakan subgraf sejati dari graf komplit Q, sehingga ada sebuah titik namakan v di Q sedemikian sehingga v bukan titik di $X + Y$. Titik v mungkin terletak di G_1 atau di G_2.

- Jika titik v di G_1 maka v berhubungan langsung dengan tiap titik X di G_1, sehingga $v + X$ merupakan graf komplit di G_1 yang memuat X, ini berakibat X bukan klik di G_1. (kontradiksi)
- Begitu juga jika titik v di G_2.

(<=) Misalkan $X + Y$ sebuah klik di G.

Andaikan X bukan klik di G_1, atau Y bukan klik di G_2.

- Jika X bukan klik di G_1, maka ada subgraf komplit lain di G_1 yang memuat X namakan X_1 sehingga ada titik v di X_1 yang terletak di luar X. Titik v berhubungan langsung dengan setiap titik di X, begitu juga titik v berhubungan langsung dengan setiap titik di Y. Akibatnya $X_1 + Y$ merupakan subgraf komplit di G yang memuat $X + Y$ sehingga $X + Y$ bukan klik di G. (kontradiksi)
- Begitu juga jika Y bukan klik di G_2. ■

Akibat 3.2 :

Misalkan G_1 dan G_2 dua graf dan $G = G_1 + G_2$. Jika di G_1 terdapat m klik dan G_2 terdapat n klik maka di G terdapat mn klik.

Bukti :

Pada graf G_1 terdapat sebanyak m klik, misalkan $\mathcal{K}(G_1) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$. Pada graf G_2 terdapat sebanyak n klik, misalkan $\mathcal{K}(G_2) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$.

Berdasarkan Teorema 3.1, $\forall i, j$, $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$, $X_i + Y_j$ merupakan sebuah klik di G. Berdasarkan aturan perkalian banyak klik di G adalah mn. ■

Teorema 3.3 :

Misalkan G_1dan G_2 dua graf saling lepas. Jika $G = G_1 + G_2$ maka $K(G_1 + G_2)$ graf komplit.

Bukti :

(=>) Misalkan $G = G_1 + G_2$ dan $K(G_1 + G_2)$ graf komplit.

Andaikan $K(G_1)$ bukan graf komplit dan $K(G_2)$ bukan graf komplit. Jika $K(G_1)$ bukan graf komplit maka ada dua klik di $K(G_1)$ yang tidak berhubungan langsung. Kedua titik tersebut berkorespondensi dengan dua klik di G_1namakan X dan X' sedemikan sehingga $X \cap X' = \emptyset$.

Demikian juga jika $K(G_2)$ bukan graf komplit maka $Y \cap Y' = \emptyset$.

Karena X dan X' klik di G_1begitu juga Y dan Y' klik di G_2 berdasarkan Teorema 3.1 maka :

$X + Y$ sebuah klik di $G_1 + G_2 = G$

dan

$X' + Y'$ sebuah klik di $G_1 + G_2 = G$

Karena $X \cap X' = \emptyset$ dan $Y \cap Y' = \emptyset$ maka $(X + Y) \cap (X' + Y') = \emptyset$. Akibatnya dua titik di $K(G)$ yang berkorespondensi dengan dua klik yaitu $(X + Y)$ dan $(X' + Y')$ di G tidak berhubungan langsung maka $K(G)$ bukan graf komplit. (kontradiksi).

(<=) Misalkan $K(G_1)$ graf komplit atau $K(G_2)$ graf komplit.

Misalkan himpunan semua klik di G_1adalah :

$$\mathcal{K}(G_1) = \{X_1,\ X_2, \dots, X_n\}$$

dan

$$\mathcal{K}(G_2) = \{Y_1,\ Y_2, \dots, Y_m\}$$

Berdasarkan Teorema 3.2 graf G memiliki tepat mn klik. Misalkan himpunan semua klik di G adalah $\mathcal{K}(G) = \{Q_{ij} | \, Q_{ij} = X_i + Y_j$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m\}$. Misalkan Q_{kl} dan $Q_{st} \in \mathcal{K}(G)$ karena $Q_{kl} = X_k + Y_l$ dan $Q_{st} = X_s + Y_t$ maka X_k dan X_s adalah dua klik di G_1 begitu juga Y_l dan Y_t adalah dua klik di G_2. Karena $K(G_1)$ graf komplit maka $X_k \cap X_s \neq \emptyset$. Akibatnya $Q_{kl} \cap Q_{st} \neq \emptyset$.

Ini berarti pada $K(G)$ dua titik yang berkorespondensi dengan Q_{kl} dan Q_{st} berhubungan langsung, sehingga $K(G)$ graf komplit. ■

Teorema 3.4 :

Misalkan G_1dan G_2 dua graf dan $G_1 + G_2 = G$. Jika (G_1) , $K(G_2)$ tidak komplit, maka $\forall\, Q_i \in K(\,G_1)$ maka $Q_i \in K(G\,)$ dan $\forall\, Q_j \in K(\,G_2)$ maka $Q_j \in K(G\,)$ untuk $i \neq j$.

Bukti :

Misalkan $G = G_1 + G_2$ sebuah graf sedemikian sehingga $K(\,G_1)$ dan $K(\,G_2)$ tidak komplit. Misalkan $V\big(K(\,G_1)\big) = \{X_i |\, X_i$ klik di $G_1, 1 \leq i \leq n\}$ dan $V\big(K(\,G_2)\big) = \{Y_j |\, Y_j$ klik di $G_2, 1 \leq i \leq m\}$.

Berdasarkan Teorema 3.1 :

$$V\big(K(G)\big) = \{X_i + Y_j\,; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\,\}$$

Misalkan Q sebuah klik sebanyak l di $K(\,G_1)$ dan $V(Q) = \{X_{Q_1}, X_{Q_2}, \dots, X_{Q_l}\}$ dimana X_{Q_i} sebuah klik di G_1 untuk $1 \leq i \leq l$. Misalkan $A_Q = \{X_{Q_i} + Y_j\,; 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m\,\}$ maka $A_Q \subseteq V\big(K(G)\big)$. Misalkan $X_{Q_1} + Y_1$ dan $X_{Q_2} + Y_2$ dua elemen sebarang dari A_Q. Karena X_{Q_1} dan X_{Q_2} dua titik di klik Q dari $K(\,G_1)$ maka $X_{Q_1} \cap X_{Q_2} \neq \emptyset$ sehingga A_Q membentuk sebuah subgraf komplit di $K(G)$.

Andaikan A_Q subgraf komplit tidak maksimal di $K(G)$, ini berarti ada sebuah subgraf komplit lain yang memuat A_Q namakan $X_1 + Y_1$ yang tidak terletak di A_Q dan $X_1 + Y_1$ berhubungan langsung dengan setiap titik di A_Q. Karena $K(\,G_2)$ bukan graf komplit maka ada dua buah titik namakan Y_1 dan Y_2 tidak berhubungan langsung di $K(\,G_2)$.

Karena Q sebuah klik di $K(\,G_1)$ dan $K(\,G_1)$ bukan graf komplit, maka terdapat sebuah titik di $V(Q)$ katakan X_{Q_1} yang tidak berhubungan langsung ke X_1 di $K(\,G_1)$.

Dari definisi A_Q kita peroleh bahwa $X_{Q_1} + Y_2$ sebuah elemen dari A_Q . Sehingga diperoleh $(X_{Q_1} + Y_2) \cap (X_1 + Y_1) = \emptyset$.

Ini berarti titik yang berkorespondensi dengan $X_1 + Y_1$ dan titik yang berkorespondensi dengan titik $X_{Q_1} + Y_2$ tidak berhubungan langsung di $K(G)$.

Dengan demikian A_Q merupakan subgraf komplit maksimal di $K(G)$ sehingga A_Q merupakan sebuah klik di $K(G)$.

Begitu juga dengan $K(G_2)$.

Dengan demikian A_Q merupakan subgraf komplit maksimal di $K(G)$ sehingga A_Q merupakan sebuah klik di $K(G)$. ■

Akibat 3.5 :

Misalkan G_1dan G_2 dua graf dan $G_1 + G_2 = G$. Jika (G_1) , $K(G_2)$ tidak komplit, maka $|K(G_1 + G_2)| \leq |K(G_1)| + |K(G_2)|$.

Bukti :

Berdasarkan Teorema 3.4 untuk setiap klik di $K(G_1)$ terdapat sebuah klik di $K(G)$ dan untuk setiap klik di $K(G_2)$ terdapat sebuah klik yang berbeda di $K(G)$ maka $|K(G_1 + G_2)| \leq |K(G_1)| + |K(G_2)|$.■

Teorema 3.6 :

Misalkan G_1 dan G_2 dua graf dan $G = G_1 + G_2$. Jika $K(\,G_1), K(\,G_2)$ bukan graf komplit, maka $K^2(\,G_1) + K^2(\,G_2)$ adalah subgraf terinduksi dari $K^2(G)$.

Bukti :

Misalkan G_1 dan G_2 dua graf sedemikian sehingga $K(G_1)$ dan $K(G_2)$ bukan graf komplit dan $G = G_1 + G_2$. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sebuah klik di $K(G_1)$ dan $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ adalah klik - klik di $K(G_2)$. Berdasarkan Teorema 3.4, untuk setiap klik X_i di $K(G_1)$ terdapat sebuah klik X_i' di $K(G)$, $1 \leq i \leq n$ begitu juga untuk setiap klik Y_j di $K(G_2)$ ada klik Y_j' di $K(G)$, $1 \leq j \leq m$.

Kasus I. Untuk $i \neq j$, $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ di $K(G_1)$ jika dan hanya jika $X_i' \cap X_j' \neq \emptyset$ di $K(G)$.

Misalkan X_i , X_j dua klik di $K(G_1)$ dan $X_i \cap X_j \neq \emptyset$. Misalkan $v \in x_1 \cap x_2$. Berdasarkan Teorema 3.4 setiap titik u di $K(G_2)$, $v + u$ adalah sebuah titik klik di X_i' di $K(G)$ yang berkorespondensi dengan klik X_i di $K(G_1)$. Begitu juga karena $v \in x_j$ di $K(G_1)$, berdasarkan Teorema 3.1 setiap titik u di $K(G_2)$, $v + u$ adalah sebuah titik klik X_j' di $K(G)$ yang berkorespondensi dengan klik X_j di $K(G_1)$. Akibatnya $v + u$ sebuah titik di $X_i' \cap X_j'$ sehingga $X_i' \cap X_j' \neq \emptyset$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ di $K(G_2)$ jika dan hanya jika $Y_i' \cap Y_j' \neq \emptyset$ di $K(G)$ untuk $i \neq j$.

Kasus II. $X_i' \cap Y_j' \neq \emptyset$ di $K(G)$ untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Misalkan X_i' dan Y_j' dua klik di $K(G)$ untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ dan X_i , Y_j dua klik di $K(G_1)$, $K(G_2)$ yang secara berturut – turut berkorespondensi dengan klik – klik maksimal X_i', Y_j' di $K(G)$. Misalkan v sebuah titik di X_i dan u sebuah titik di Y_j, berdasarkan Teorema 3.4 $v + u$ sebuah titik di X_i' dan juga sebuah titik di Y_j', sehingga $X_i' \cap Y_j' \neq \emptyset$.

Dari **Kasus I** dan **Kasus II** dapat disimpulkan bahwa $K^2(\,G_1) + K^2(\,G_2)$ adalah subgraf terinduksi dari $K^2(G)$. ■

Sifat – Sifat Graf Klik Hasil Kali Cartesius Dua Graf

Pembahasan selanjutnya diawali dengan perkalian dua graf klik-Helly yang disebut hasil kali cartesius dua graf.

UNESA Universitas Negeri Surabaya

Definisi 3.7 :
Hasil kali Cartesian dua graf G dan H, dilambangkan $G \times H$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(G \times H) = V(G)$ x $V(H)$, himpunan $\{(g,h) \mid g \in V(G), h \in V(H)\}$. Himpunan sisi $G \times H$ terdiri dari semua pasangan $[(g_1,h_1),(g_2,h_2)]$ dari titik dengan $(g_1,g_2) \in E(G)$ dan $h_1 = h_2$, atau $g_1 = g_2$ dan $(h_1,h_2) \in E(H)$.

(Hegde and Suresh 2016)

Teorema 3.8 :
Jika G_1, G_2 adalah graf klik-Helly yang berbeda dari K_1 dengan K_1 adalah graf komplit dengan satu titik dan $G = G_1 \times G_2$, maka $K^2(G) = G$.

Bukti :

Misalkan G_1, G_2 graf klik-Helly yang berbeda dari K_1 dan $G = G_1 \times G_2$. Misalkan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V(G_1)$ dan $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} = V(G_2)$.
Berdasarkan definisi, diperoleh

$$V(G) = \{(v_i, v_j) = V_{ij} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$$

Dan

$$|V(G)| = nm$$

Perhatikan bahwa G memiliki sebanyak m kopi dari G_1 namakan G_1^1, $G_1^2, \ldots, G_1^m$ dan memiliki sebanyak n kopi dari G_2 namakan G_2^1, $G_2^2, \ldots, G_2^n$. Perhatikan bahwa G_1^1, $G_1^2, \ldots, G_1^m$ merupakan subgraf terinduksi dari G yang himpunan titiknya saling lepas. Begitu juga G_2^1, $G_2^2, \ldots, G_2^n$ merupakan subgraf terinduksi dari G yang himpunan titiknya saling lepas.

Perhatikan $V(G_2^i) \cap V(G_1^j) = V_{ij}, V_{ij}$ tidak di G_2^k dan G_1^l untuk $k \neq i$ dan $l \neq j$ untuk semua $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, karena $G = G_1 \times G_2$ maka setiap klik di G_1 dan G_2 adalah klik – klik di G.

Perhatikan juga bahwa setiap klik di G_1 dan G_2 adalah klik – klik di G. Misalkan himpunan klik di G_1 adalah

$$\mathcal{K}(G_1) = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_s\}$$

dan himpunan klik di G_2 adalah

$$\mathcal{K}(G_2) = \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$$

Sehingga banyaknya klik di G adalah

$$= s|V(G_2)| + t|V(G_1)|$$
$$= sm + tn$$

dan $\mathcal{K}(G) = \{Q_1^1, Q_2^1, \ldots, Q_s^1, Q_1^2, Q_2^2, \ldots, Q_s^2, Q_1^n, Q_2^n, \ldots, Q_s^n, P_1^1, P_2^1, \ldots, P_t^1, P_1^2, P_2^2, \ldots, P_t^m, P_1^m, P_2^m, \ldots, P_t^m\}$

Kasus I. Untuk setiap titik V_{ij} di G terdapat sebuah klik di $K(G)$.

Misalkan V_{ij} sebuah titik di G dimana $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$. Didefinisikan $A_{ij} = \{Q \mid V_{ij} \in Q\} \subseteq \mathcal{K}(G)$. Jelas bahwa irisan setiap dua klik di A_{ij} tidak kosong dan irisan semua kliknya tidak kosong, maka titik –titik yang berkorespondensi dengan klik – klik ini di $K(G)$ membentuk sebuah subgraf komplit di $K(G)$.

Andaikan subgraf komplit tersebut bukan subgraf komplit maksimal di $K(G)$, maka terdapat sebuah titik V di $K(G)$ sedemikian sehingga V berhubungan langsung dengan semua titik A_{ij}. Misalkan Q_V sebuah klik di G yang berkorespondensi dengan titik V di $K(G)$. Jelas bahwa V_{ij} tidak terletak pada Q_V, karena setiap klik di G adalah sebuah klik di G_1 atau sebuah klik di G_2, maka asumsikan bahwa Q_V sebuah klik di G_1^j. Misalkan Q adalah sebuah klik di G_2^i yang memuat titik V_{ij} maka Q ada di A_{ij}. Karena $V(G_2^i) \cap V(G_1^j) = V_{ij}$, maka Q adalah sebuah klik di G_2^i dan $V_{ij} \in V(Q)$ dan $V(Q) \cap V(G_1^j) = V_{ij}$ yang berakibat bahwa $V(Q) \cap V(G_1^j) - \{V_{ij}\} = \emptyset$. Karena V_{ij} tidak pada Q_V, dan Q_V sebuah klik di G_1^j maka $V(Q_V) \subseteq (V(G_1^j) \mid V_{ij})$.

Dengan demikian $V(Q) \cap V(Q_V) = \emptyset$. Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa Q_V berhubungan langsung ke semua titik A_{ij} di $K(G)$, sehingga anggota – anggota dari A_{ij} membentuk sebuah klik di $K(G)$.

Kasus II. Untuk setiap klik Q di $K(G)$ irisan semua klik – klik G yang berkorespondensi dengan titik – titik Q adalah tidak kosong dan merupakan sebuah singleton.

Misalkan Q sebuah klik di $K(G)$ dan $V(Q) = \{x_1, x_2, \ldots, x_w\}$.

Andaikan semua x_k adalah klik – klik di G_1^j untuk $1 \le j \le m$, maka irisan semua x_k di G tidak kosong, dimana $x_k \in V(Q)$, karena G_1^j memiliki sifat klik-Helly. Misalkan $V \in \cap_{x_k \in Q} x_k$, maka V terletak di G_2^i untuk $1 \le i \le n$. Misalkan P sebarang klik di G_2^i memuat sebuah titik V, maka P beririsan dengan setiap elemen $V(Q)$. Dengan demikian $V(Q) \cup \{P\}$ membentuk sebuah graf komplit di $K(G)$.

Hal ini bertentangan bahwa Q subgraf komplit maksimal di $K(G)$. Sehingga elemen – elemen dari Q adalah klik – klik di klik – klik di G_1 dan klik – klik di G_2. Karena G_1^j adalah titik – titik saling lepas maka setiap elemen Q adalah sebuah klik di G_1^j atau sebuah klik di G_2^i untuk suatu i dan j tertentu dimana $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$.

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_l$ adalah klik – klik di G_1^j dan $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_w$ adalah klik – klik di G_2^i. Karena $V(G_1^j) \cap V(G_2^i) = V_{ij}$, x_{l1} sebuah klik di G_1^j, x_{l2} sebuah klik di G_2^i dan $V(x_{l1}) \cap V(x_{l2}) \neq \emptyset$, untuk $1 \le l_1 \le l$, $l+1 \le l_2 \le w$, $V(x_{l1}) \cap V(x_{l2}) = V_{ij}$.

Ini berakibat bahwa V_{ij} menjadi anggota dari setiap x_k di Q. Dengan demikian $\cap_{x_k \in Q} x_k = V_{ij}$.

Karena klik – klik di $K(G)$ adalah titik di $K^2(G)$, berdasarkan **Kasus I dan Kasus II** terdapat korespondensi satu – satu antara himpunan titik G dan himpunan titik $K^2(G)$.

Kasus III. Misalkan U dan V dua titik yang berhubungan langsung di G, maka irisan klik – klik di $K(G)$ yang berkorespondensi dengan titik – titik ini irisannya tidak kosong.

Misalkan U dan V dua titik yang berhubungan langsung di G dan Q_U, Q_V adalah klik – klik di $K(G)$ yang berkorespondensi dengan titik U dan V di G secara berturut – turut. Karena terdapat sebuah sisi yang menghubungkan U dan V di G maka terdapat sebuah klik Q di G sedemikian sehingga titik U dan V terdapat pada Q.

Berdasarkan **Kasus I** dan **Kasus II** dapat disimpulkan bahwa titik – titik Q_U di $K(G)$ adalah klik – klik di G yang memuat titik U di G. Dengan demikian Q terdapat pada $V(Q_U)$. Dengan cara yang sama Q terdapat pada $V(Q_V)$. Akibatnya $Q_U \cap Q_V \neq \emptyset$.

Karena klik – klik dari $K(G)$ adalah titik dari $K^2(G)$ maka titik – titik yang berkorespondensi dengan klik – klik Q_U dan Q_V dari $K(G)$ adalah berhubungan langsung di $K^2(G)$.

Kasus IV. Misalkan P dan Q dua klik di $K(G)$, jika irisan P dan Q tidak kosong maka titik – titik di G yang berkorespondensi dengan dua klik tersebut berhubungan langsung.

Misalkan P dan Q dua klik di $K(G)$ dengan $P \cap Q \neq \emptyset$ dan U dan V dua titik di G yang berturut – turut berkorespondensi dengan klik P dan Q, karena $P \cap Q \neq \emptyset$ terdapat sebuah titik namakan $Q_1 \in V(P) \cap V(Q)$.

Berdasarkan **Kasus I** dan **Kasus II** diperoleh bahwa Q_1 sebuah klik di G dan $\cap_{P_i \in V(P)} P_i = U$ dan $\cap_{Q_i \in V(Q)} Q_i = V$. Oleh karena itu $U, V \in V(Q_i)$ di G. Dengan demikian U dan V berhubungan langsung di G.

Berdasarkan **Kasus III** dan **Kasus IV** dapat disimpulkan bahwa dua titik berhubungan langsung di G jika dua titik yang bersesuaian berhubungan langsung di $K^2(G)$.

Berdasarkan **Kasus I, II, III, IV** dapat disimpulkan bahwa $K^2(G) = K(G)$ dengan $G = G_1 \times G_2$ dan G_1, G_2 adalah graf klik-Helly yang berbeda dari K_1. ■

Akibat 3.9

Misalkan G_1, G_2 dua graf dan $G = G_1 \times G_2$. Jika G_1, G_2 adalah graf klik-Helly yang berbeda dari K_1 dengan K_1 adalah graf komplit dengan satu titik maka :

i. G adalah graf klik-Helly.
ii. G adalah K-Konvergen.
iii. G adalah K-Periodik.

Bukti : Berdasarkan Teorema 3.9 maka :

i. G adalah graf klik-Helly.
   G adalah graf klik-Helly karena setiap klik pada G_1, G_2 saling beririsan, dan irisan semua kliknya tidak kosong. ■
ii. G adalah K-Konvergen.
   G adalah K-Konvergen karena ada bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $K^2(G) \cong G$. ■
iii. G adalah K-Periodik.
   G adalah K-Periodik karena $K^2(G) \cong G$ yang demikian dinamakan K-Periodik dari G dengan periode 2. ■

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang sudah dibahas pada skripsi dapat disimpulkan bahwa sifat – sifat graf klik dari graf join dua graf adalah sebagai berikut :

1. Misalkan G_1 dan G_2 dua graf saling lepas. Jika $G = G_1 + G_2$ maka $K(G)$ graf komplit jika dan hanya jika $K(G_1)$ graf komplit atau $K(G_2)$ graf komplit.
2. Misalkan G_1 dan G_2 dua graf dan $G_1 + G_2 = G$. Jika (G_1), $K(G_2)$ tidak komplit, maka $\forall Q_i \in K(G_1)$ maka $Q_i \in K(G)$ dan $\forall Q_j \in K(G_2)$ maka $Q_j \in K(G)$ untuk $i \neq j$.
3. Misalkan G_1 dan G_2 dua graf dan $G_1 + G_2 = G$. Jika (G_1), dan $K(G_2)$ tidak komplit, maka $|K(G_1 + G_2)| \leq |K(G_1)| + |K(G_2)|$.
4. Misalkan G_1 dan G_2 dua graf dan $G = G_1 + G_2$. Jika $K(G_1), K(G_2)$ tidak komplit, maka $K^2(G_1) + K^2(G_2)$ adalah subgraf terinduksi dari $K^2(G)$.

Sedangkan sifat – sifat graf klik dari hasil kali kartesius dua graf adalah sebagai berikut :

1. Jika G_1, G_2 adalah graf klik-Helly yang berbeda dari K_1 dengan K_1 adalah graf komplit dengan satu titik dan $G = G_1 \times G_2$, maka $K^2(G) = G$.
2. Misalkan G_1, G_2 dua graf dan $G = G_1 \times G_2$. Jika G_1, G_2 adalah graf klik-Helly yang berbeda dari K_1 dengan K_1 adalah graf komplit dengan satu titik maka :
   i. G adalah graf klik-Helly.
   ii. G adalah K-Konvergen karena $K^2(G) \cong G$.
   iii. G adalah K-Periodik dengan periode 2.

SARAN

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenai sifat – sifat dari graf klik melalui operasi penjumlahan dua graf dan hasil kali cartesius dua graf. Penulis menyarankan kepada pembaca untuk mendalami dan mengembangkan teori – teori tentang graf klik untuk mengetahui karakteristik agar suatu graf dikatakan K-Konvergen yang belum dibahas dalam skripsi ini.

Daftar Pustaka

Bondy J. A., and U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory With Applications*. Canada: The Macmillan Press Ltd.

Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya.* Surabaya: Unipress.

Damayanti, R. T. 2011. *Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan.* Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Fatkhiyah, L. 2010. *Bilangan Clique dan Faktorisasi pada Perkalian.* Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Harary, F. (1969). *Graph Theory*. London: Addision Company-Wesley Publishing. https://doi.org/10.1109/TSMC.1973.4309227

Hedge, S. M., dan Dara, Suresh. 2016. "On Clique Convergence of Graphs". *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 261-266.

Ruba, J. A. 2007. *Graf Planar.* Skripsi tidak diterbitkan. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Sutarno, H. dkk. 2003. *Matematika Diskrit.* Jakarta: JICA.

UNESA
Universitas Negeri Surabaya