MATH_unesa_
Jurnal Ilmiah Matematika _Volume 6 No.2 Tahun 2018_
ISSN 2301-9115

TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG METRIK BERNILAI KOMPLEKS LENGKAP

Siti Aisyah
(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
E-mail : sitiaisyah6@mhs.unesa.ac.id

Manuharawati
(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
E-mail : manuhara1@yahoo.co.id

Abstrak

Diberikan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks. Misalkan X himpunan tak kosong dan fungsi d_c dikatakan metrik bernilai kompleks jika untuk semua $x, y, z \in X$ memenuhi: (1) $0 \precsim d_c(x,y)$, (2) $d_c(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (3) $d_c(x,y) = d_c(y,x)$, dan (4) $d_c(x,y) \precsim d_c(x,z) + d_c(z,y)$. Titik $x \in X$ disebut titik tetap dari fungsi $f: X \to X$, jika $f(x) = x$. Hasil penelitian ini menjelaskan lebih rinci mengenai kekonvergenan dan barisan Cauchy, serta kelengkapannya untuk membuktikan teorema titik tetap pada ruang metrik bernilai kompleks lengkap dan diberikan contoh-contoh.

Kata Kunci: titik tetap, ruang metrik bernilai kompleks

Abstract

Given $\mathbb{C}$ set of complex number. Let X non empty set and d_c is called complex valued metric, for all $x, y, z \in X$ are satisfied: (1) $0 \precsim d_c(x,y)$, (2) $d_c(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (3) $d_c(x,y) = d_c(y,x)$, dan (4) $d_c(x,y) \precsim d_c(x,z) + d_c(z,y)$. Point $x \in X$ is called a fixed point of $f: X \to X$ if $f(x) = x$. This result of this study gives more details about of convergence and Cauchy sequence, also completely to proof fixed point theorems in complete complex valued metric space also given examples.

Keywords: fixed point, complex valued metric space

PENDAHULUAN

Pada tahun 2011, Azam memperkenalkan ruang metrik bernilai kompleks. Misalkan X himpunan tak kosong dan fungsi $d_c: X \times X \to \mathbb{C}$ dikatakan metrik bernilai kompleks jika untuk semua $x, y, z \in X$ memenuhi kondisi berikut: (1) $0 \precsim d_c(x,y)$, (2) $d_c(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (3) $d_c(x,y) = d_c(y,x)$, dan (4) $d_c(x,y) \precsim d_c(x,z) + d_c(z,y)$.

Pada tahun 2015, Naval Singh, dkk membuktikan dan menganalisis eksistensi dan ketunggalan titik tetap yang memnuhi kondisi kontraksi pada ruang metrik bernilai kompleks lengkap.

Hasil dari penelitian Naval Singh, dkk akan dibahas lebih rinci dalam jurnal terkait teorema titik tetap pada ruang metrik bernilai kompleks lengkap. Selain itu, akan dibahas kekonvergenan pada ruang metrik bernilai kompleks, barisan Cauchy pada ruang metrik bernilai kompleks, dan ruang metrik bernilai kompleks lengkap yang akan digunakan untuk menganalisis ketunggalan titik tetap pada ruang metrik bernilai kompleks.

KAJIAN TEORI

A. Urutan Parsial pada Bilangan Kompleks

Definisi 2.1: Diketahui $\mathbb{C}$ himpunan semua bilangan kompleks dan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Didefinisikan urutan parsial $\precsim$ pada $\mathbb{C}$ yang memenuhi $z_1 \precsim z_2$ jika dan hanya jika $\mathrm{Re}(z_1) \le \mathrm{Re}(z_2)$ dan $\mathrm{Im}(z_1) \le \mathrm{Im}(z_2)$.
(Naval Singh, 2015)

Urutan parsial pada bilangan kompleks mempunyai sifat berikut:
(D1) $0 \precsim z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow |z_1| < |z_2|$,
(D2) $z_1 \precsim z_2,\ z_2 \prec z_3 \Rightarrow z_1 \prec z_3$,
(D3) $z \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}, a \le b \Rightarrow az \precsim bz$,
(Sintunavarat, 2012)

B. Ruang Metrik Bernilai Kompleks

Definisi 2.2: Diketahui $X \neq \emptyset$ dan fungsi $d_c: X \times X \to \mathbb{C}$ dikatakan metrik bernilai kompleks jika untuk semua $x, y, z \in X$ memenuhi:
(CM1) $0 \precsim d_c(x, y)$,
(CM2) $d_c(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(CM3) $d_c(x, y) = d_c(y, x)$,
(CM4) $d_c(x, y) \precsim d_c(x, z) + d_c(z, y)$.
Selanjutnya, (X, d_c) disebut ruang metrik bernilai kompleks.

(Azam, 2011)

Contoh 2.1: Diketahui $X \subset \mathbb{C}$. Jika didefinisikan $d_c: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, dengan: $d_c(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, maka (X, d_c) adalah ruang metrik bernilai kompleks.

(Naval Singh, 2015)

Lemma 2.1: *Jika (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks, maka $(X, \alpha d_c)$ merupakan ruang metrik bernilai kompleks untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.*

Contoh 2.2: Diketahui $X \subset \mathbb{C}$. Jika $d_c: X \times X \to \mathbb{C}$, dengan $d_c(z_1, z_2) = e^{i\theta}|z_1 - z_2|$, dengan $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, maka (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks.

(Naval Singh, 2015)

Berdasarkan Definisi 2.2, maka ruang metrik bernilai kompleks merupakan perumuman dari ruang metrik (bernilai real).

C. Titik Tetap

Definisi 2.3: Diketahui X himpunan tak kosong dan fungsi $K, L: X \to X$,

1. Titik $x \in X$ menjadi titik tetap dari K jika $K(x) = x$.
2. Titik $x \in X$ disebut titik tetap bersama dari K dan L jika $x = K(x) = L(x)$.

(Sintunavarat, 2012)

PEMBAHASAN

Definisi 3.1: Diketahui (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks dan (x_n) barisan pada X, (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk semua $c \in \mathbb{C}, 0 \prec c$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ berlaku $d_c(x_n, x) \prec c$. Ditulis $x_n \to x$.

(Sintunavarat, 2012)

Lemma 3.1: *Jika (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks dan (x_n) barisan pada X, maka (x_n) konvergen ke x jika dan hanya jika $|d_c(x_n, x)|$ konvergen ke 0.*

(Azam, 2011)

Bukti: $(\Rightarrow)$
Diberikan sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Jika dipilih

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} + i\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

maka, $c \in \mathbb{C}, 0 \prec c$.
Karena (x_n) konvergen ke x, berdasarkan Definisi 3.1, ada $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk semua $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ berlaku

$$d_c(x_n, x) \prec c.$$

Berdasarkan sifat (D1), $|d_c(x_n, x)| \prec |c| = \varepsilon$, untuk semua $n > n_0$. Jadi, $|d_c(x_n, x)| \to 0$.
$(\Leftarrow)$
Diberikan $c \in \mathbb{C}, 0 \prec c$.
Jika $\varepsilon = |c|$, maka $\varepsilon > 0$.
Karena $|d_c(x_n, x)|$ konvergen ke 0, ada $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk semua $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ berlaku

$$|d_c(x_n, x)| < \varepsilon = |c|$$

Berdasarkan sifat (D1), jika $|d_c(x_n, x)| < |c|$, maka $d_c(x_n, x) \prec c$.
Jadi, (x_n) konvergen ke *x*. ■

Definisi 3.2: Diketahui (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks dan (x_n) barisan pada X. Barisan (x_n) adalah barisan Cauchy jika untuk semua $c \in \mathbb{C}$, $0 \prec c$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m > n_0$ berlaku $d_c(x_n, x_m) \prec c$.

(Sintunavarat, 2102)

Lemma 3.2: *Jika (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks dan (x_n) barisan pada X, maka (x_n) barisan Cauchy jika dan hanya jika $|d_c(x_n, x_{n+m})| \to 0$.*

(Azam, 2011)

Bukti: $(\Rightarrow)$
Diberikan $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, jika dipilih

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} + i\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

maka, $c \in \mathbb{C}, 0 \prec c$.
Karena (x_n) barisan Cauchy, berdasarkan Definisi 3.2, dengan $c \in \mathbb{C}$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$, untuk semua $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ berlaku $d_c(x_n, x_{n+m}) \prec c$.
Sehingga, $|d_c(x_n, x_{n+m})| < |c| = \varepsilon$.
Akibatnya, $|d_c(x_n, x_{n+m})| \to 0$.
$(\Leftarrow)$
Diberikan $c \in \mathbb{C}, 0 \prec c$.
Jika $\varepsilon = |c|$, maka $\varepsilon > 0$.
Karena $|d_c(x_n, x_{n+m})| \to 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, berlaku

$$|d_c(x_n, x_{n+m})| < \varepsilon = |c|$$
$$d_c(x_n, x_{n+m}) \prec c$$

Jadi, (x_n) barisan Cauchy. ■

Lemma 3.3: *Diketahui* (x_n) *barisan pada* X *dan* $h \in [0,1)$. *Jika* $a_n = |d_c(x_n, x_{n+1})|$ *memenuhi* $a_n \leq h a_{n-1}$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$, *maka* (x_n) *adalah barisan Cauchy.*

(Naval Singh, 2015)

Bukti: Karena $h \in [0,1)$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $a_n \leq h a_{n-1} \leq h^2 a_{n-2} \leq \cdots \leq h^n a_0$.

Untuk $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m > n$, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
|d_c(x_n, x_m)| &\leq a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} \\
&\leq h^n (1 + h + h^2 + \cdots + h^{m-n-1}) a_0 \\
&\leq \frac{h^n}{1-h} a_0
\end{aligned}
$$

Karena $h \in [0,1)$ dan $\lim(h^n) = 0$, maka $|d_c(x_n, x_m)| \to 0$. Jadi, (x_n) adalah barisan Cauchy. ■

Definisi 3.3: Diketahui (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks dan (x_n) barisan pada X, (X, d_c) dikatakan lengkap pada X jika setiap barisan Cauchy konvergen pada X. (Sintunavarat, 2012)

Teorema 3.1: *Misalkan* (X, d) *ruang metrik dan* (X, d_c) *ruang mtrik bernilai kompleks yang didefinisikan dengan*

$$d_c(x, y) = d(x, y) + i\, d(x, y)$$

Ruang metrik (X, d) *lengkap jika dan hanya jika* (X, d_c) *lengkap.*

(Dahliatul Hasanah, 2016)

Bukti: $(\Rightarrow)$

Ambil sebarang barisan Cauchy (x_n) pada (X, d_c).

Dibuktikan (x_n) konvergen pada (X, d_c).

Diberikan sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, pilih bilangan kompleks: $c = \varepsilon + i\varepsilon$.

Karena (x_n) adalah barisan Cauchy pada (X, d_c), maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ dengan $n > n_0, m > n_0$, berlaku

$$d_c(x_n, x_m) \prec c$$

Berdasarkan definisi metrik bernilai kompleks, diperoleh $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Sehingga, (x_n) adalah barisan Cauchy pada (X, d).

Karena (X, d) ruang metrik lengkap, maka barisan (x_n) adalah barisan konvergen pada (X, d).

Misal barisan (x_n) konvergen ke $x \in X$ pada (X, d), maka ditunjukkan bahwa (x_n) konvergen ke titik yang sama pada (X, d_c).

Ambil sebarang $c \in \mathbb{C}, 0 \prec c$. Misal $c = c_1 + ic_2$, maka $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$ dan $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Untuk $c_1 > 0$, karena (x_n) konvergen pada (X, d), maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ada $n_1 \in \mathbb{N}, n > n_1$ berlaku

$$d(x_n, x) < c_1 \qquad (*)$$

Untuk $c_2 > 0$, karena (x_n) adalah barisan konvergen pada (X, d), maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ada $n_2 \in \mathbb{N}, n > n_2$ berlaku

$$d(x_n, x) < c_2 \qquad (**)$$

Pilih $n_0 = \text{maks}\{n_1, n_2\}$.

Jika $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, maka berdasarkan (*) dan (**) berlaku

$$d(x_n, x) < c_1 \text{ dan } d(x_n, x) < c_2$$

Hal ini berarti, $d_c(x_n, x) \prec c$.

Dengan demikian, barisan (x_n) adalah barisan konvergen pada (X, d_c).

Jadi, ruang metrik bernilai kompleks (X, d_c) lengkap.

$(\Leftarrow)$

Ambil barisan Cauchy (y_n) pada (X, d).

Akan ditunjukkan barisan (y_n) adalah barisan Cauchy pada (X, d_c).

Ambil sebarang $c \in \mathbb{C}$, dengan $0 \prec c$. Misal $c = c_1 + ic_2$, dengan $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$ dan $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Untuk $c_1 > 0$, karena (y_n) adalah barisan Cauchy pada (X, d), maka ada $n_1 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ dengan $n > n_1, m > n_1$, berlaku:

$$d(y_n, y_m) < c_1$$

Untuk $c_2 > 0$, karena (y_n) adalah barisan Cauchy pada (X, d), maka ada $n_2 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ dengan $n > n_2, m > n_2$, berlaku :

$$(y_n, y_m) < c_2$$

Pilih $n_0 = \text{maks}\{n_1, n_2\}$, sehingga untuk setiap $n > n_0, m > n_0$ berlaku:

$$d(y_n, y_m) < c_1 \text{ dan } d(y_n, y_m) < c_2$$

diperoleh, $d_c(y_n, y_m) \prec c$.

Dengan demikian, barisan (y_n) adalah barisan konvergen pada (X, d_c). Karena ruang metrik bernilai kompleks (X, d_c) lengkap, maka barisan (y_n) adalah barisan konvergen pada (X, d_c).

Misalkan $y \in X$ adalah limit dari barisan (y_n) pada (X, d_c).

Akan ditunjukkan y adalah limit dari (y_n) pada (X, d).

Ambil sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, pilih bilangan kompleks:

$$c = \varepsilon + i\varepsilon.$$

Karena adalah (y_n) barisan konvergen pada (X, d_c), maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk $n > n_0$, berlaku:

$$d_c(y_n, y) < \varepsilon + i\varepsilon$$

Hal ini mengakibatkan $d(y_n, y) < \varepsilon$.

Berarti, barisan (y_n) adalah barisan konvergen pada (X, d).

Jadi, (X, d) lengkap. ■

Teorema 3.2: *Diketahui* (X, d) *ruang metrik dan* (X, d_c) *ruang metrik bernilai kompleks yang didefinisikan pada Contoh 2.2. Ruang metrik* (X, d) *lengkap jika dan hanya jika* (X, d_c) *lengkap.*

(Dahliatul Hasanah, 2016)

Bukti: $(\Rightarrow)$

Ambil sebarang barisan Cauchy (x_n) pada (X, d_c).

Dibuktikan (x_n) konvergen pada (X, d_c).

Diberikan sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, pilih bilangan kompleks: $c = \varepsilon + i\varepsilon$.
Karena (x_n) barisan Cauchy pada (X, d_c), ada $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m > n_0$, berlaku

$$d_c(x_n, x_m) \prec c$$

Berdasarkan Definisi 2.2 diperoleh $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
Jadi, barisan (x_n) adalah barisan Cauchy pada (X, d).
Karena (X, d) lengkap, maka (x_n) barisan konvergen pada (X, d).
Misal (x_n) konvergen ke $x \in X$ pada (X, d).
Ditunjukkan (x_n) konvergen ke titik yang sama pada (X, d_c).
Ambil sebarang $c \in \mathbb{C}, 0 \prec c$. Misal $c = c_1 + ic_2$, dengan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dan $c_1 > 0, c_2 > 0$.
Untuk $c_1 > 0$, karena (x_n) konvergen pada (X, d), maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ada $n_1 \in \mathbb{N}, n > n_1$ berlaku

$$d(x_n, x) < c_1 \qquad (*)$$

Untuk $c_2 > 0$, karena (x_n) konvergen pada (X, d), untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ada $n_2 \in \mathbb{N}, n > n_2$ berlaku

$$d(x_n, x) < c_2 \qquad (**)$$

Pilih $n_0 = \text{maks}\{n_1, n_2\}$.
Jika$n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, maka dari (*) dan (**) berlaku

$$d(x_n, x) < c_1 \text{ dan } d(x_n, x) < c_2$$

Hal ini berarti, $d_c(x_n, x) \prec c$. Jadi, barisan (x_n) konvergen pada (X, d_c).
Akibatnya,(X, d_c) lengkap.
$(\Leftarrow)$
Ambil barisan Cauchy (y_n) pada (X, d).
Ditunjukkan barisan(y_n) barisan Cauchy pada (X, d_c).
Ambil sebarang $c \in \mathbb{C}$, dengan $0 \prec c$. Misal $c = c_1 + ic_2$, dengan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dan $c_1 > 0, c_2 > 0$.
Untuk $c_1 > 0$, karena (y_n) barisan Cauchy pada (X, d), ada $n_1 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m > n_1$, berlaku

$$d(y_n, y_m) < c_1$$

Untuk $c_2 > 0$, karena (y_n) barisan Cauchy pada (X, d), ada $n_2 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m > n_2$, berlaku

$$(y_n, y_m) < c_2$$

Pilih $n_0 = \text{maks}\{n_1, n_2\}$, sehingga untuk setiap $n, m > n_0$ berlaku

$$d(y_n, y_m) < c_1 \text{ dan } d(y_n, y_m) < c_2$$

diperoleh, $d_c(y_n, y_m) \prec c$.
Jadi, barisan (y_n) konvergen pada (X, d_c). Karena(X, d_c) lengkap, maka (y_n) konvergen pada (X, d_c).
Misalkan $y \in X$ adalah limit dari barisan (y_n) pada (X, d_c).
Akan ditunjukkan y adalah limit dari (y_n) pada (X, d).
Ambil sebarang$\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, pilih bilangan kompleks:

$$c = \varepsilon + i\varepsilon.$$

Karena (y_n) konvergen pada (X, d_c) , ada $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk $n > n_0$, berlaku

$$d_c(y_n, y) < \varepsilon + i\varepsilon$$

Akibatnya, $d(y_n, y) < \varepsilon$.
Berarti, barisan(y_n) konvergen pada (X, d).
Jadi, (X, d) lengkap. ■

Preposisi 3.1: *Diketahui (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks dan $K, L: X \to X$. Jika $x_0 \in X$dan didefinisikan barisan(x_n) dengan x_0 adalah bayangan barisan x_1:*

$$x_{2n+1} = K(x_{2n})$$
$$x_{2n+2} = L(x_{2n+1}) \qquad (3.1)$$

Diasumsikan ada fungsi yang memenuhi:
$\lambda(L(K(x)), y, a) \leq \lambda(x, y, a)$ *dan*
$\lambda(x, K(L(y)), a) \leq \lambda(x, y, a)$
maka, untuk setiap $x, y \in X$ dan $a \in X$ adalah titik tertentu, berlaku:

$$\lambda(x_{2n}, y, a) \leq \lambda(x_0, y, a), \text{ dan}$$
$$\lambda(x, x_{2n+1}, a) \leq \lambda(x, x_1, a)$$

(Naval Singh, 2015)

Teorema 3.3: *Jika (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks lengkap dan $K, L: X \to X$untuk semua $x, y \in X$ memenuhi:*
$d_c(K(x), L(y)) \precsim \lambda\, d_c(x, y) + \mu \frac{d_c(x,K(x))d_c(y,L(y))}{1+d_c(x,y)} + \gamma \frac{d_c(y,K(x))d_c(x,L(y))}{1+d_c(x,y)}$ *dengan λ, μ, γ adalah bilangan real positif dan $\lambda + \mu + \gamma < 1$, maka K dan L mempunyai titik tetap bersama yang tunggal.*

(Rouzkard & Imdad, 2012)

Bukti: Misalkan x_0 titik sebarang pada X dan didefinisikan barisan (x_n) sesuai dengan Persamaan 3.1, diperoleh:

$$\begin{aligned} d_c(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d_c(K(x_{2n}), L(x_{2n+1})) \\ &\precsim \lambda\, d_c(x_{2n}, x_{2n+1}) + \\ &\quad \mu \frac{d_c(x_{2n},K(x_{2n}))d_c(x_{2n+1},L(x_{2n+1}))}{1+d_c(x_{2n},x_{2n+1})} + \\ &\quad \gamma \frac{d_c(x_{2n},L(x_{2n+1}))d_c(x_{2n+1},K(x_{2n}))}{1+d_c(x_{2n},x_{2n+1})} \\ &\precsim \lambda\, d_c(x_{2n}, x_{2n+1}) + \\ &\quad \mu\, d_c(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \\ &\precsim \left(\frac{\lambda}{1-\mu}\right) d_c(x_{2n}, x_{2n+1}) \end{aligned}$$

$$|d_c(x_{2n+1}, x_{2n+2})| \leq \left(\frac{\lambda}{1-\mu}\right) |d_c(x_{2n}, x_{2n+1})|$$

Secara sama diperoleh:

$$|d_c(x_{2n+2}, x_{2n+3})| \precsim \left(\frac{\lambda}{1-\mu}\right) |d_c(x_{2n+1}, x_{2n+2})|$$

Misalkan $a = \frac{\lambda}{1-\mu}$, untuk sebarang bilangan bulat *m* dan *n* dengan $m > n$, diperoleh:

$$d_c(x_n, x_m) \precsim a^n d_c(x_0, x_1) + a^{n+1} d_c(x_0, x_1) + \cdots + a^{m-1} d_c(x_0, x_1)$$

$$|d_c(x_m, x_n)| \leq \left(\frac{a^n}{1-a}\right) |d_c(x_0, x_1)|$$

Akibatnya, $d_c(x_m, x_n) \to 0$.
Berdasarkan Lemma 3.2, (x_n) barisan Cauchy.

Karena X lengkap, maka ada titik $u \in X$ yang berlaku $x_n \to u$.

Untuk menunjukkan $K(u) = u$, dibuktikan dengan pengandaian $u \neq Ku$, misal $d(u, K(u)) = z > 0$, diperoleh:

$$z = d_c(u, K(u))$$
$$\precsim d_c(u, L(x_{2n+1})) + d_c(L(x_{2n+1}), K(u))$$
$$\precsim d_c(u, x_{2n+2}) + \lambda\, d_c(x_{2n+1}, u) + \mu \frac{d_c(x_{2n+1}, x_{2n+2})\, z}{1+d(u, x_{2n+1})} + \gamma \frac{d_c(x_{2n+1}, K(u)) d_c(u, L(x_{2n+1}))}{1+d_c(u, x_{2n+1})}$$

dengan $n \to \infty$, diperoleh $d_c(u, K(u)) = 0$, kontradiksi.Jadi, $u = K(u)$.

Dengan cara sama, untuk menunjukkan $L(u) = u$, dibuktikan dengan pengandaian $u \neq Lu$.

Akibatnya, u adalah titik tetap bersama dari Kdan L.

Selanjutnya, menunjukkan u titik tetap bersama yang tunggal dari Kdan L.

Misal$u^* \in X$adalah titik tetap bersama lainnya.

$$d_c(u, u^*) = d_c(K(u), L(u^*))$$
$$\precsim \lambda\, d_c(u, u^*) + \mu \frac{d_c(u, K(u)) d_c(u^*, L(u^*))}{1+d_c(u, u^*)} + \gamma \frac{d_c(u^*, K(u)) d_c(u, L(u^*))}{1+d_c(u, u^*)}$$
$$\precsim (\lambda + \gamma)\, d_c(u^*, u)$$

Karena $\lambda + \gamma < 1$, dan berdasarkan sifat (D3), maka $u = u^*$.

Jadi, $u$titik tetap bersama yang tunggal dari Kdan L. ■

Contoh 3.1: Diketahui $d_c = X \times X \to \mathbb{C}$, $X = [0,1]$ dengan $d_c = |x - y| e^{i\theta}$, dan $\theta = tan^{-1} \left|\frac{y}{x}\right|$.

Fungsi $K, L: X \to X$ didefinisikan:

$$K(x) = \frac{1}{5}x \text{ dan } L(x) = \frac{1}{10}x$$

Karena

$$|d_c(K(x), L(y))| \leq \lambda |d_c(x, y)| + \mu \frac{|d_c(x, K(x))||d_c(y, L(y))|}{1+|d_c(x,y)|} + \gamma \frac{|d_c(y, K(x))||d_c(x, L(y))|}{1+|d_c(x,y)|}$$
$$= \lambda |\, y - x| + \mu \frac{\left|x - \frac{x}{5}\right|\left|y - \frac{y}{10}\right|}{1+|d_c(x,y)|} + \gamma \frac{\left|y - \frac{x}{5}\right|\left|x - \frac{y}{10}\right|}{1+|d_c(x,y)|},$$

maka untuk sebarang nilai μ dan γ serta nilai $\lambda = \frac{1}{5}$, diperoleh:

$$\left|\frac{x}{5} - \frac{y}{10}\right| \leq \frac{|y-x|}{5} + \mu \frac{\left|x - \frac{x}{5}\right|\left|y - \frac{y}{10}\right|}{1+|d_c(x,y)|} + \gamma \frac{\left|y - \frac{x}{5}\right|\left|x - \frac{y}{10}\right|}{1+|d_c(x,y)|}$$

Karena semua kondisi pada Teorema 3.3 terpenuhi, maka 0 menjadi titik tetap bersama dari K dan L.

Akibat 3.1: *Jika untuk semua $x, y \in X$, (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks lengkap dan $L: X \to X$ memenuhi:*

$$d_c(L(x), L(y)) \precsim \lambda\, d_c(x, y) + \mu \frac{d_c(x, L(x)) d_c(y, L(y))}{1+d_c(x,y)} + \gamma \frac{d_c(y, L(x)) d_c(x, L(y))}{1+d_c(x,y)},$$

dengan λ, μ, γ adalah bilangan real positif dan $\lambda + \mu + \gamma < 1$, maka L mempunyai titik tetap yang tunggal.

(Rouzkard & Imdad, 2012)

Bukti: Dari Teorema 3.3, jika $K = L$, maka Akibat 3.1 terbukti.

Teorema 3.4: *Diketahui (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks lengkap dan $K, L: X \to X$. Jika untuk setiap $x, y \in X$, ada fungsi $\lambda, \mu, \gamma, \delta: X \times X \times X \to [0,1)$dengan sifat:*

a) $\lambda(L(K(x)), y, a) \leq \lambda(x, y, a)$ *dan* $\lambda(x, K(L(y)), a) \leq \lambda(x, y, a)$,
$\gamma(L(K(x)), y, a) \leq \gamma(x, y, a)$ *dan* $\gamma(x, K(L(y)), a) \leq \gamma(x, y, a)$,
$\delta(L(K(x)), y, a) \leq \delta(x, y, a)$ *dan* $\delta(x, K(L(y)), a) \leq \delta(x, y, a)$.
$\mu(L(K(x)), y, a) \leq \mu(x, y, a)$ *dan* $\mu(x, K(L(y)), a) \leq \mu(x, y, a)$,

b) $$d_c(K(x), L(y)) \precsim \lambda(x, y, a) d_c(x, y) + \mu(x, y, a) \left\{\frac{d_c(x, K(x)) d_c(y, L(y))}{1+d_c(x,y)}\right\} + \gamma(x, y, a) \left\{\frac{d_c(y, K(x)) d_c(x, L(y))}{1+d_c(x,y)}\right\} + \delta(x, y, a) \left\{\frac{d_c(x, K(x)) d_c(x, L(y)) + d_c(y, L(y)) d_c(y, K(x))}{1+d_c(x, L(y)) + d_c(y, K(x))}\right\}$$ *dengan* $\lambda(x, y, a) + \delta(x, y, a) + \mu(x, y, a) + \gamma(x, y, a) < 1$ *(3.2)*

maka, K dan L mempunyai titik tetap bersama yang tunggal.

(Naval Singh, 2015)

Bukti: Diketahui $x, y \in X$, dari Persamaan 3.2, diperoleh:

$$\left|d_c\big(K(x), L(K(x))\big)\right| \leq \lambda(x, K(x), a)|d_c(x, K(x))| + \mu(x, K(x), a)\left|d_c\big(K(x), L(K(x))\big)\right| + \delta(x, K(x), a)|d_c(x, K(x))| \quad \textbf{(3.3)}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh:

$$\left|d_c\big(K(L(y)), L(y)\big)\right| \leq \lambda(L(y), y, a)|d_c(L(y), y)| + \mu(L(y), y, a)\left|d_c\big(L(y), K(L(y))\big)\right| + \delta(L(y), y, a)|d_c(y, L(y))| \quad \textbf{(3.4)}$$

Misalkan $x_0 \in X$ dan barisan (x_n) didefinisikan pada Preposisi 3.1. Akan ditunjukkan (x_n) barisan Cauchy.

Berdasarkan Preposisi 3.1, Persamaan 3.3, Persamaan 3.4, diperoleh:

$$|d_c(x_{2k+1}, x_{2k})| = |d_c(K(L(x_{2k-1})), L(x_{2k-1}))|$$
$$\leq \lambda(L(x_{2k-1}), x_{2k-1}, a)|d_c(L(x_{2k-1}), x_{2k-1})| + \mu(L(x_{2k-1}), x_{2k-1}, a)|d_c(L(x_{2k-1}), K(L(x_{2k-1})))| + \delta(L(x_{2k-1}), x_{2k-1}, a)|d_c(L(x_{2k-1}), x_{2k-1})|$$
$$\leq \lambda(x_0, x_1, a)|d_c(x_{2k-1}, x_{2k})| + \mu(x_0, x_1, a)|d_c(x_{2k+1}, x_{2k})| + \delta(x_0, x_1, a)|d_c(x_{2k-1}, x_{2k})|$$

$|d_c(x_{2k+1}, x_{2k})| \leq \frac{\{\lambda(x_0,x_1,a)+\delta(x_0,x_1,a)\}}{1-\mu(x_0,x_1,a)} |d_c(x_{2k-1}, x_{2k})|$

Dengan cara yang sama:

$$|d(x_{2k+2}, x_{2k+1})| \leq \frac{\lambda(x_0,x_1,a)+\delta(x_0,x_1,a)}{1-\mu(x_0,x_1,a)} |d(x_{2k}, x_{2k+1})|$$

Misalkan $P = \frac{\lambda(x_0,x_1,a)+\delta(x_0,x_1,a)}{1-\mu(x_0,x_1,a)} < 1$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku:

$$|d_c(x_{n+1}, x_n)| \leq P\,|d_c(x_{n-1}, x_n)|$$

Jika $n \to \infty$, maka $d_c(x_{2k+2},\ x_{2k+1}) \to 0$.

Dari Lemma 3.1, (x_n) adalah barisan Cauchy di (X, d_c).

Karena X lengkap, maka untuk setiap$u \in X$ berlaku $x_n \to u$. Akan ditunjukkan u titik tetap dari K.

Berdasarkan Persamaan 3.2 dan Preposisi 3.1, diperoleh:

$$d_c(u, K(u)) \precsim d_c(u, L(x_{2n+1})) + d_c(L(x_{2n+1}), K(u))$$
$$\precsim d_c(u, x_{2n+2}) + \lambda(u, x_1, a) d_c(u, x_{2n+1})$$
$$+ \mu(u, x_1, a)\left\{\frac{d_c(u, K(u)) d_c(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d_c(u, x_{2n+1})}\right\}$$
$$+ \gamma(u, x_1, a)\left\{\frac{d_c(x_{2n+1}, K(u))\, d_c(u, x_{2n+2})}{1 + d_c(u, x_{2n+2})}\right\}$$
$$+ \delta(u, x_1, a)\left\{\frac{d_c(u, K(u)) d_c(u, x_{2n+2}) + d_c(x_{2n+1}, x_{2n+2}) d_c(x_{2n+1}, K(u))}{1 + d_c(u, x_{2n+2}) + d_c(x_{2n+1}, K(u))}\right\}$$

Untuk $n \to \infty$, berakibat $d_c(u, K(u)) = 0 \Rightarrow K(u) = u$.

Dengan cara yang sama untuk menunjukkan u titik tetap dari L.

Akibatnya, u titik tetap bersama dari K dan L.

Selanjutnya, menunjukkan u titik tetap bersama yang tunggal dari Kdan L.

Misal $u^* \in X$ dengan $u^* = K(u^*) = L(u^*)$, diperoleh:

$$d_c(u, u^*) = d_c(K(u), L(u^*))$$
$$\precsim \lambda(x, y, a)\, d_c(u, u^*) + \mu(x, y, a) \frac{d_c(u,K(u)) d_c(u^*,L(u^*))}{1+d_c(u,u^*)} +$$
$$\gamma(x, y, a) \frac{d_c(u^*,K(u)) d_c(u,L(u^*))}{1+d_c(u,u^*)} +$$
$$\delta(x, y, a) \frac{d_c(u,K(u)) d_c(u,L(u^*)) + d_c(u^*,L(u^*)) d_c(u^*,K(u))}{1+d_c(u,L(u^*)) + d_c(u^*,K(u))}$$
$$d_c(u, u^*) \precsim (\lambda(x, y, a) + \gamma(x, y, a)) d_c(u^*, u)$$

Karena $\lambda(x, y, a) + \gamma(x, y, a) < 1$, akibatnya, $u = u^*$.

Jadi, u titik tetap bersama yang tunggal dari Kdan L. ∎

Contoh 3.2: Diketahui $X = [0,1]$ dan (X, d_c) ruang metrik bernilai kompleks, dengan $d_c(x, y) = |x - y| e^{\frac{\pi}{6}i}$.

Fungsi $K, L: X \to X$ dengan $K(x) = \frac{x}{4}$ dan $L(y) = \frac{y}{4}$.

Didefinisikan fungsi $\lambda: X \times X \times X \to [0,1)$ dan $a = \frac{1}{3} \in X$, dengan:

$$\lambda(x, y, a) = \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + a\right)$$

Berdasarkan:

$$\lambda\big(L(K(x)), y, a\big) = \frac{x}{64} + \frac{y}{5} + a$$
$$\leq \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + a$$
$$= \lambda(x, y, a)$$

Sehingga, Persamaan 3.2 terpenuhi.

Karena $d_c(K(x), L(y)) = d_c\left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}\right)$

$$= \frac{1}{4}|x - y| e^{\frac{\pi}{6}i}$$
$$\precsim \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{1}{3}\right) |x - y| e^{\frac{\pi}{6}i}$$
$$= \lambda(x, y, a) d_c(x, y)$$

Maka, 0 adalah titik tetap bersama yang tunggal dari K dan L.

PENUTUP

A. Simpulan

1. Hubungan kekonvergenan pada ruang metrik bernilai kompleks dengan kekonvergenan pada ruang metrik, yaitu setiap barisan konvergen pada ruang metrik merupakan barisan konvegen pada ruang metrik bernilai kompleks.
2. Teorema-teorema titik tetap pada jurnal ini adalah teorema eksistensi dan ketunggalan titik tetap yang dibuktikan dengan:
   - Mongkonstruksi suatu barisan.
   - Menunjukkan bahwa barisan tersebut adalah barisan Cauchy.
   - Karena barisan terdefinisi pada ruang metric bernilai kompleks lengkap, maka barisan tersebut konvergen.
   - Menunjukkan adanya titik tetap pada suatu fungsi.
   - Membuktikan ketunggalannya, sehingga terbukti bahwa titik tetapnya tunggal.

B. Saran

Pada jurnal ini hanya membahas sifat kekonvergenan, barisan Cauchy, dan ruang metrik lengkap pada ruang metrik bernilai kompleks serta eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik bernilai kompleks lengkap. Sehingga, dapat dilakukan penelitian mengenai sifat-sifat lain yang berllaku pada ruang metrik bernilai kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Azam, A., Fisher, B., and Khan, M. S. 2011. *Common Fixed Point Theorems in Complex Valued Metric Spaces, Numer. Funct. Anal. Optim.*, Vol. 32, no. 323, pp. 402–409, 2011

Hasanah, Dahliatul. 2016. *Sifat Kelengkapan Ruang Metrik Bernilai Kompleks.* FMIPA UM

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. United States of America: John Wiley & Sons

Kreyszig, Erwin. 2011. *Advanced Engineering Mathematics 10th Edition.*United States of America: John Wiley & Sons

Kustiawan, Cece. 2013. *Kekontinuan Fungsi pada Ruang Metrik*. FMIPA UPI: Vol 2 No.1 Februari 2013

Rouzkard, F., and Imdad, M. 2012. *Some common fixed point theorems on complex valued metric space*. Comput. Math. Appl. 64

Singh, N., Singh, D., Badal, A., and Joshi, V. 2015. *Fixed point theorems in complex valued metric spaces.* Journal of the Egyptian Mathematical Society. http://dx.doi.org/10.1016/j.joems.2015.04.005

Sintunavarat, W., Kumam, P. 2012. *Generalized common fixed point theorems in complex valued metric spaces and applications*. J. Inequal. Appl.

Soemantri, R., 1996. *Fungsi Variabel Kompleks*. Departmen Pendidikan danKebudayaan: Yogyakarta

Sukaesih, Esih. 2015. *Teorema Titik Tetap Banach*. Jurnal Vol. IX No.2: Bandung

Taskovic, M. R. 2005. *Frechet's metric space-100th next*. Mathematica Moravica Vol. 9 69-75