MATH*unesa*

Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 1 No.7 Tahun 2018*

ISSN 2301-9115

DERIVATIF FRAKSIONAL CAPUTO-ORTIGUERA FUNGSI ζ −HURWITZ SERTA PERILAKUNYA PADA BIDANG GAUSSIAN

Martha Alamsyah

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : marthaalamsyah@mhs.unesa.ac.id

Yusuf Fuad

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : yusuffuad@unesa.ac.id

Abstrak

Fungsi Zeta (ζ) merupakan fungsi penting dalam matematika dan mulai ramai diperbincangkan dalam forum matematika bidang analisis kompleks, bidang analisis teori bilangan dan bidang matematika terapan yang terkait dengan kalkulus fraksional. Salah satu pembahasan adalah keterkaitan derivatif fraksional dari fungsi $\zeta -$Riemann dan $\zeta -$Hurwitz.

Dalam jurnal ini ditunjukkan derivatif fraksional fungsi $\zeta -$Riemann dan $\zeta -$Hurwitz dengan menggunakan derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dan menggunakan generalisasi dari derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari Dirichlet series. Perilaku derivatif fraksional Caputo-Ortiguera fungsi $\zeta -$Hurwitz diilustrasikan pada bidang Gaussian untuk menunjukkan bahwa terdapat sifat unik yang dapat memberikan perspektif baru pada permasalahan sistem dinamik. Salah satu perilaku yang dibahas adalah ketidakteraturan derivatif fraksional Caputo-Ortiguera fungsi $\zeta -$Hurwitz di persekitaran nol.

***Keywords*:** fungsi $\zeta -$Riemann, fungsi $\zeta -$Hurwitz, derivatif fraksional.

PENDAHULUAN

Pada 1734 Leonhard Euler (1707 - 1783) menemukan suatu fungsi zeta (ζ) yang menakjubkan. Euler menentukan semua nilai $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6)\ldots$. Euler juga menemukan hubungan yang indah antara bilangan prima dan $\zeta(x)$ tetapi penemuan tersebut tidak terlalu dibesar-besarkan dan dianggap penemuan biasa. Berbeda dengan Bernhard Rieman (1826-1866) yang justru melihat sesuatu bahwa terdapat hal penting dari penemuan Leonhard Euler, dan memperkenalkan $\zeta(s)$ sebagai fungsi variabel kompleks $s = \sigma + it$, dengan σ dan t merupakan bilangan real dan $i = \sqrt{-1}$. Pada tahun 1859 Riemann memberi formula unik yang terdiferensialkan ke seluruh bidang kompleks $\mathbb{C}$ kecuali $s = 1$. Tetapi, setelah dikembangkan formula tersebut tidak dapat di aplikasikan lagi jika bagian real dari s, $Re(s) = \sigma \leq 1$.

fungsi $\zeta -$Riemann mulai ramai diperbincangkan dalam forum matematika bidang analisis kompleks, bidang analisis teori bilangan dan bidang matematika terapan dengan mengkaitkan antara fungsi $\zeta -$ Riemann dengan kalkulus fraksional. Kalkulus fraksional merupakan salah satu alat yang paling ampuh dalam meneliti secara teori maupun aplikasi yang tersebar hampir ke semua ilmu sains dan teknologi. Misalnya, permasalahan mendasar dari fraktur mekanik, elektromagnetis, sinyal ucapan, gelombang suara, propagasi pada bahan berpori kaku, mekanika fluida, viskoelastisitas, dan deteksi tepi, mudah dipecahkan dan dapat dijelaskan dengan menggunakan kalkulus fraksional.

Pendekatan kalkulus fraksional telah membuka perspektif baru dalam bidang sains dengan banyak hasil yang menarik (Bhrawy dan Abdelkawy, 2015). Salah satu topik yang sangat menarik adalah interpretasi geometris dari operasi fraksional. Seperti halnya turunan deret bilangan bulat yang memberikan pendekatan fungsi linear mulus (terdiferensial) (Wang, 2012). Hal tersebut dapat membuka perspektif baru dalam penelitian, dengan penyelidikan derivatif fraksional pada fungsi yang tidak terdiferensiasi, seperti Cantor set atau dengan menyelidiki ketidakdiferensialkan beberapa fungsi khusus.

Hampir semua fungsi khusus adalah fungsi dari variabel kompleks. Untuk alasan ini, Ortiguera mendefinisikan derivatif fraksional fungsi kompleks (Ortigueira, 2006) merupakan cara yang paling banyak digunakan untuk mempelajari fungsi kompleks. Menggunakan derivatif fraksional Caputo-Ortiguera akan memberikan bentuk eksplisit turunan fraksional dari fungsi ζ −Riemann yang merupakan bentuk spesial dari Dirichlet Series dan fungsi ζ − Hurwitz beserta beberapa sifatnya.

Penelitian kali ini dikembangkan dan juga ditentukan derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari fungsi ζ − Hurwitz untuk mendapatkan derivatif fraksional fungsi ζ −Riemann sebagai kasus khusus. Ada beberapa aplikasi analisis fungsi ζ − Riemann dalam fisika, seperti pada hamburan metode invers dimana potensi kuantum nol pada ζ − Riemann, atau dalam perilaku tingkat ketidakberaturan (chaotik) energi kuantum di persekitaran nol (Pozdnyakov, 2012). Sehingga akan ditunjukkan juga bahwa derivatif fraksional dari fungsi ζ −Riemann meluruh secara tidak teratur ke nol melalui simulasi menggunakan Matlab. Khususnya, aplikasi pada sistem dinamis akan ditunjukkan bahwa fungsi ζ −Hurwitz sangat atraktif di persekitaran nol. Jadi, fokus penelitian ini adalah untuk menentukan derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari fungsi ζ −Hurwitz dan menunjukkan sifat utamanya.

KAJIAN TEORI

Dirichlet Series

Definisi 2.1 Diberikan fungsi aritmetika $f(n)$, didefinisikan deret F (Apostol, 2010)

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s};\ s=\sigma+it,\quad \sigma,t\in\mathbb{R}$$

disebut dengan *Dirichlet series* yang bergantung pada f.

Dirichlet series merupakan sebuah deret tak hingga (mengabaikan tentang konvergensi) atau sebuah fungsi variabel kompleks s.

Fungsi ζ −Riemann

Definisi 2.2 Didefinisikan fungsi variabel kompleks $\zeta(s)$ sebagai berikut (Chandrasekharan, 1953)

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ ;\ Re(s)>1$$

Bentuk lain dari $\zeta(s)$ yang merupakan perkalian tak terhingga biasa disebut *Euler product* (Chandrasekharan, 1953)

$$\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-s};Re(s)>1\quad,\ p\in\mathcal{P}$$

Dimana $\mathcal{P}$ merupakan himpunan bilangan prima (tak terhingga jumlahnya). Euler product diatas merupakan penghubung antara sifat $\zeta(s)$ dengan sifat bilangan prima. Tentu saja perkalian tak terbatas akan konvergen untuk $Re(s)>1$.

Fungsi ζ −Hurwitz

Definisi 2.3 Diberikan suatu a dengan $0<a\le 1, a\in\mathbb{R}$, fungsi Zeta Hurwitz dirumuskan sebagai berikut (Apostol, 2010)

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}$$

Deret di atas jelas akan konvergen untuk $Re(s)>1$.

Integral Fraksional order α

Definisi 2.4 Diberikan fungsi f kuntinu pada $[a,b]$ dengan $a\le x\le b$, ditentukan rumus interasi ulang Cauchy (Lazarevic, 2014):

$$J^n f(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{(n-1)}f(t)dt$$

.Formula diatas merupakan rumus untuk men-generalisasi integral ulang dari urutan bilangan real α. Dengan menggunakan fungsi Gamma, yang akan menjadi $\Gamma(n+1)=n!, n\in\mathbb{Z}^+$, dengan beberapa nilai real $\alpha\in\mathbb{R}^+$ diperoleh

Definisi 2.5 Diberikan $\alpha\in\mathbb{R}^+, t\in\mathbb{R}$, integral fraksional order α dari fungsi kontinu f adalah operator

$$J^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-x)^{\alpha-1}f(x)dx.$$

Sedangkan derivatif fraksional kesalahan Caputo (Caputo,1967) didefinisikan sebagai berikut.

Teorema.2.1 Diberikan $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ dan semua fungsi f berlaku integral fraksionalnya sebagai berikut:

1. $J^aJ^b=J^{a+b}$
2. $J^aJ^b=J^bJ^a$

Bukti:

Teorema (1)

$$\begin{aligned}J^aJ^bf(t)&=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^t(t-x)^{a-1}dx\frac{1}{\Gamma(b)}\int_a^x(x-z)^{b-1}f(z)dz\\&=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_a^t(t-x)^{a-1}dx\int_a^x(x-z)^{b-1}f(z)dz\\&=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_a^t f(z)\int_x^t(t-x)^{a-1}(x-z)^{b-1}dx\,dz\end{aligned}$$

Bentuk integral paling kanan telah dibuktikan hasilnya oleh Kamata dan Nakamula, (2002)

$$\int_x^t(t-x)^{a-1}(x-z)^{b-1}dx=\frac{(t-z)^{a+b}\beta(a,b)}{(t-z)}$$

Sehingga apabila disubstitusikan pada persamaan sebelumnya diperoleh,

$$J^a J^b f(t) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_a^t f(z)dz \left[\frac{(t-z)^{a+b}\beta(a,b)}{(t-z)}\right]$$

$$= \frac{\beta(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_a^t f(z)(t-z)^{a+b-1}dz$$

Padahal telah diketahui bahwa (Bell, 2007)

$$\beta(\alpha,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Sehingga,

$$\frac{\beta(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{1}{\Gamma(a+b)}$$

Jadi,

$$J^a J^b f(t) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_\alpha^t f(z)(t-z)^{a+b-1}dz$$

$$= J^{a+b} f(t) \;\blacksquare$$

Teorema (2)

Dari pembuktian teorema utama (1) telah terbukti bahwa,

$$J^a J^b f(t) = J^{a+b} f(t)$$

Karena $a, b \in \mathbb{R}$ maka $a + b = b + a$ (komutatif) , sehingga

$$J^a J^b f(t) = J^{b+a} f(t)$$

Berdasarkan pembuktian pada Teorema utama (1) dengan cara mundur diperoleh,

$$J^a J^b f(t) = \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \int_b^t f(z) \int_x^t (t-x)^{b-1}(x-z)^{a-1}dx\,dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \int_b^t (x-z)^{a-1}dx \int_b^x (t-x)^{b-1} f(z)dz$$

$$= J^b J^a f(t) \;\blacksquare$$

Derivatif Fraksional Caputo-Ortiguera Fungsi ζ -Riemann dan Fungsi ζ-Hurwitz

Definisi.2.6 didefiniskan derivatif fraksional sebagai berikut:

$${}_C D^\alpha f(s) = \frac{e^{j(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f^{(m)}(xe^{j\theta}+s)}{x^{\alpha-m+1}}dx$$

Dimana $m-1 < \alpha < m \in \mathbb{Z}^+$ (Kilbas dkk, 2006) operator ini biasa disebut derivatif fraksional Caputo - Ortiguera dari fungsi variabel kompleks $f(s)$.

Teorema 2.2 Derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari *Dirichlet series* sebgai berikut

$${}_C D^\alpha F(s) = (-1)^m e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{(\log n)^\alpha}{n^s}$$

dengan $\in \mathbb{C}, \theta \in [0,2\pi]$, $m-1 < \alpha < m,\ \alpha \in, m \in \mathbb{Z}^+$

Bukti:

Dibuktikan derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari *Dirichlet series* (2.1) menggunakan derivatif fraksional Caputo-Ortiguera (2.6).

$${}_C D^\alpha F(s) = \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n) n^{-xe^{i\theta}-s} x^{m-\alpha-1}\right) dx$$

$$= \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \int_0^\infty \left(n^{-xe^{i\theta}} x^{m-\alpha-1}\right) dx$$

dihitung terlebih dahulu integral pada ruas kanan, dengan memisalkan $xe^{i\theta} = z$ diatas dan dilanjutkan dengan memisalkan $z \log n = y, n \in \mathbb{N}$ sehingga diperoleh

$$\int_0^\infty \left(n^{-xe^{i\theta}} x^{m-\alpha-1}\right) dx = e^{-i\theta(m-\alpha)} \int_0^\infty e^{-y}\, y^{(m-\alpha-1)} (\log n)^{1+\alpha-m} \frac{dy}{\log n}, n \neq 1$$

Karena fungsi Gamma didefinisikan

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-y}\, y^{(m-1)} dy, y > 0, y \in \mathbb{R}$$

maka,

$$\int_0^\infty e^{-y}\, y^{(m-\alpha-1)} dy = \Gamma(m-\alpha)$$

Sehingga,

$$\int_0^\infty \left(n^{-xe^{i\theta}} x^{m-\alpha-1}\right) dx = e^{-i\theta(m-\alpha)} (\log n)^{\alpha-m} \Gamma(m-\alpha)$$

dimana $-\alpha > 0$ dan diperoleh

$${}_C D^\alpha F(s) = \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} e^{-i\theta(m-\alpha)} (\log n)^{\alpha-m}\, \Gamma(m-\alpha)$$

$$= e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^{\infty} f(n)(\log n)^{\alpha-m} \frac{d^m}{ds^m}(n^{-s})$$

Berdasarkan Guariglia (2015)

$$\frac{d^m}{ds^m}(n^{-s}) = (-1)^m n^{-s} (\log n)^m$$

Jadi,

$${}_C D^\alpha F(s) = (-1)^m e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} (\log n)^{\alpha-m} (\log n)^m$$

$$= (-1)^m e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{(\log n)^\alpha}{n^s} \;\blacksquare$$

Teorema 2.3

Derivatif fraksional Caputo-Ortiguera fungsi ζ - Hurwitz adalah sebagai berikut

$$ {}_{C}D^{\alpha}\zeta(s,a) = (-1)^m e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(n+a))^{\alpha}}{(n+a)^s} $$

Dengan $m-1<\alpha<m,\ \alpha \in, m \in \mathbb{Z}^+$

Bukti:

Derivatif fraksional Caputo-Ortiguera fungsi ζ-Hurwitz (2.3) ditentukan dengan menggunakan rumus Derivatif fraksional Caputo-Ortiguera yang didefinisikan oleh Kilbas, dkk (2006) (2.6).

$$ {}_{C}D^{\alpha}\zeta(s,a) = \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1} \left((n+a)^{-xe^{i\theta}-s} x^{m-\alpha-1}\right) dx $$

$$ = \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1} (n+a)^{-s} \int_0^{\infty} (n+a)^{-xe^{i\theta}} x^{m-\alpha-1} dx $$

dihitung terlebih dahulu integral pada ruas kanan, diperoleh bahwa

$$ \int_0^{\infty} (n+a)^{-xe^{i\theta}} x^{m-\alpha-1} dx = e^{-i\theta(m-\alpha)} (\log(n+a))^{(m-\alpha)}\, \Gamma(m-\alpha) $$

Dari definisi derivatif fraksional Caputo-Ortiguera bahwa $-\alpha>0$, persamaan di atas dapat disubstusikan pada persamaan sebalumnya sehingga diperoleh sebagai berikut,

$$ {}_{C}D^{\alpha}\zeta(s,a) = \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1} (n+a)^{-s}\, e^{-\theta(m-\alpha)}. $$

$$.\, (\log(n+a))^{(m-\alpha)}\, \Gamma(m-\alpha) $$

$$ = e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1} (\log(n+a))^{(\alpha-m)} \frac{d^m}{ds^m} ((n+a)^{-s}) $$

Berdasarkan Guariglia (2015)

$$ \frac{d^m}{ds^m}((n+a)^{-s}) = (-1)^m (n+a)^{-s} (\log(n+a))^m $$

Hingga diperoleh

$$ {}_{C}D^{\alpha}\zeta(s,a) = (-1)^m e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1} (\log(n+a))^{(\alpha-m)} (n+a)^{-s} (\log(n+a))^m $$

$$ = (-1)^m e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1} \frac{(\log(n+a))^{(\alpha)}}{(n+a)^s} \blacksquare $$

Teorema 2.4 Untuk $s \in \mathbb{C}, m-1<\alpha<m, \alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ berlaku Derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari Fungsi ζ-Riemann adalah

$$ {}_{C}D^{\alpha}\zeta(s) = (-1)^m e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1} \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^s} $$

bagian real dan bagian imajiner dari ${}_{C}D^{\alpha}\zeta(s)$ diberikan sebagai berikut:

$$ Re\left({}_{C}D^{\alpha}\zeta(s)\right) = (-1)^m \sum_{n=1} \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^x} \cos(\pi(\alpha-m) - t\log n) $$

$$ Im\left({}_{C}D^{\alpha}\zeta(s)\right) = (-1)^m \sum_{n=1} \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^x} \sin(\pi(\alpha-m) - t\log n) $$

Bukti:

Dengan menggunakan rumus derivatif fraksional Caputo-Ortiguera yang telah didefinisikan oleh Kilbas, dkk. (2006) pada bentuk (2.6) diperoleh

$$ {}_{C}D^{\alpha}\zeta(s,a) = \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{d^m}{ds^m} \left(\zeta(xe^{i\theta}+s)^{-xe^{i\theta}-s}\right) \frac{1}{x^{\alpha-m+1}} dx $$

$$ = \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-s} n^{-xe^{i\theta}} x^{m-\alpha-1}\right) dx $$

$$ = \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \int_0^{\infty} \left(n^{-xe^{i\theta}} x^{m-\alpha-1}\right) dx $$

dihitung terlebih dahulu integral pada ruas kanan diperoleh bahwa

$$ \int_0^{\infty} \left(n^{-xe^{i\theta}} x^{m-\alpha-1}\right) dx = e^{-i\theta(m-\alpha)} (\log n)^{\alpha-m} \Gamma(m-\alpha) $$

Berdasarkan definisi derivatif fraksional Caputo-Ortiguera bahwa $-\alpha>0$, persamaan di atas dapat disubstusikan pada persamaan sebelumnya sehingga diperoleh sebagai berikut,

$$ {}_{C}D^{\alpha}\zeta(s) = \frac{e^{i(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} e^{-i\theta(m-\alpha)} (\log n)^{\alpha-m} \Gamma(m-\alpha) $$

$$ = e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\alpha-m} \frac{d^m}{ds^m} n^{-s} $$

Berdasarkan Guariglia (2015)

$$ \frac{d^m}{ds^m}(n^{-s}) = (-1)^m n^{-s} (\log n)^m $$

Sehingga,

$$ {}_{C}D^{\alpha}\zeta(s) = e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\alpha-m} (-1)^m (n^{-s}) (\log n)^m $$

$$ = (-1)^m e^{i\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\alpha} (n^{-s}) \blacksquare $$

dengan $m-1<\alpha<m, \alpha \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}^+$

Selanjutnya dicari bentuk bagian real dan imajiner dari Derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari Fungsi ζ-Riemann. Karena $s \in \mathbb{C}$, maka dapat dibuat $s=\sigma+it$ Perlu diingat bahwa,

$$ n^{-s} = n^{-\sigma} n^{-it} $$

$$ = n^{-\sigma} e^{-it\log n} $$

$$= n^{-\sigma}\,(\cos(t\log n) - i\sin(t\log n))$$

sehingga,

$${}_{C}D^{\alpha}\zeta(s) = {}_{C}D^{\alpha}\zeta(s=\sigma+it)$$
$$= (-1)^{m}\,(\cos(\pi(\alpha-m)) + i\sin(\pi(\alpha-m))).$$
$$.\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\,n^{-\sigma}\,(\cos(t\log n) - i\sin(t\log n))$$
$$= (-1)^{m}.\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\,n^{-\sigma}(\cos(\pi(\alpha-m)) + i\sin(\pi(\alpha-m))).$$
$$.(\cos(t\log n) - i\sin(t\log n))$$
$$= (-1)^{m}.\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\,n^{-\sigma}(\cos(\pi(\alpha-m))\cos(t\log n) +$$
$$+\sin(\pi(\alpha-m))\sin(t\log n) + i(\sin(\pi(\alpha-m))\cos(t\log n)$$
$$-\cos(\pi(\alpha-m))\sin(t\log n))$$

Dari bentuk di atas bagian real dari ${}_{C}D^{\alpha}\zeta(s)$ sebagai berikut,

$$Re({}_{C}D^{\alpha}\zeta(s)) = Re({}_{C}D^{\alpha}\zeta(s=\sigma+it))$$
$$= (-1)^{m}.\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\,n^{-\sigma}.$$
$$.(\cos(\pi(\alpha-m))\cos(t\log n) + \sin(\pi(\alpha-m))\sin(t\log n))$$

Karena, $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$, sehingga dapat langsung dirubah menjadi sebagai berikut,

$$Re({}_{C}D^{\alpha}\zeta(s)) = (-1)^{m}\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\,n^{-\sigma}\,(\cos(\pi(\alpha-m) - t\log n))\blacksquare$$

Sedangkan bagian imajiner dari ${}_{C}D^{\alpha}\zeta(s)$ sebagai berikut,

$$Im({}_{C}D^{\alpha}\zeta(s)) = Im({}_{C}D^{\alpha}\zeta(s=\sigma+it))$$
$$= (-1)^{m}.\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\,n^{-\sigma}.$$
$$.(\sin(\pi(\alpha-m))\cos(t\log n) - \cos(\pi(\alpha-m))\sin(t\log n))$$

Karena, $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$, sehingga dapat langsung dirubah menjadi sebagai berikut,

$$Im({}_{C}D^{\alpha}\zeta(s)) = (-1)^{m}.\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\,n^{-\sigma}\,(\sin(\pi(\alpha-m) - t\log n))\blacksquare$$

Analisis Perilaku Derivatif Fraksional Caputo-Ortiguera fungsi ζ −Hurwitz

Teorema. 2.5 (*Chaotic Condition*)

Jika untuk setiap $s \neq 0,\ s \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\xi(a,s) = \sum_{h,k}^{\infty}(-1)^{k}\frac{n^{h+k+1}}{(k+1)\Gamma(h+1)\alpha^{h}}[s]^{h/-\alpha}$$

maka fungsi fraksional $\xi(a,s)$ bersifat chaotik pada bidang Gaussian.

Dengan teorema *Chaotic Condition* ditunjukkan bahwa derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari fungsi $\zeta -$ Hurwitz memenuhi teorema *Chaotic Condition* dan bersifat chaotik.

Telah tebukti bahwa derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari fungsi ζ −Hurwitz berikut.

$${}_{C}D^{\alpha}\zeta(s,a) = (-1)^{m}e^{i\pi(\alpha-m)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log(n+a))^{\alpha}}{(n+a)^{\,s}}$$

Apabila dimisalkan $m = 1$ maka $e^{i\pi(\alpha-m)} \to 1$. Sehingga dapat dibentuk suatu fungsi baru yang bergantung pada s dan α sebagai berikut.

$$\psi(\alpha,s) = {}_{C}D^{\alpha}[\zeta(s,a)](m=1) = (-1)\sum_{n=1}^{\infty}(\log(n+a)^{\alpha}\,((n+a)^{\,-s})$$
$$= (-1)\sum_{n=1}^{\infty}[(\log(n+a))(n+a)^{\,-s/\alpha}]^{\alpha}$$

Diselidiki terlebih dahulu bentuk ekspansi dari $(\log(n+a))$ dan $(n+a)^{\,-s/\alpha}$.

Diketahui,

$$\log((n+a)+1) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(n+a)^{k}+1}{k+1}$$

dan

$$(n+a)^{-s/\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\alpha^{k}}(n+a)^{k}[s]^{k/-\alpha}$$

dengan $[s]^{k/-\alpha} = s(s-\alpha)(s-2\alpha)\ldots(s-(k-1)\alpha)$

Padahal dketahui juga bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log(n+a) = \sum_{k=0}^{\infty}\log((n+a)+1)$$

Sehingga bentuk $\psi(\alpha,s)$ dapat dimodifikasi menjadi

$$\psi(\alpha,s) = (-1)\sum_{n=1}^{\infty}[(\log(n+a)(n+a)^{\,-s/\alpha}]^{\alpha}$$
$$= (-1)\sum_{n=0}^{\infty}[(\log((n+a)+1))(n+a)^{\,-s/\alpha}]^{\alpha}$$
$$= (-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(n+a)^{k}+1}{k+1}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!\,\alpha^{h}}(n+a)^{h}[s]^{h/-\alpha}\right]^{\alpha}$$
$$= (-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k,h=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(n+a)^{k}+1}{(k+1)h!\,\alpha^{h}}(n+a)^{h}[s]^{h/-\alpha}\right]^{\alpha}$$
$$= (-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k,h=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(n+a)^{k}+1}{(k+1)\Gamma(h+1)\alpha^{h}}(n+a)^{h}[s]^{h/-\alpha}\right]^{\alpha}$$

Karena dari definisi fungsi ζ −Hurwitz $n \in \mathbb{N}$ dan $0 < a \leq 1, a \in \mathbb{R}$ maka $n + a \in \mathbb{R}$.

Dan berdasarkan teorema kondisi chaotik (*chaotic condition)* dapat dimisalkan $n + a = N, N \in \mathbb{R}$ sehingga diperoleh

$$\psi(\alpha,s) = (-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k,h=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(N)^{k}+1}{(k+1)\Gamma(h+1)\alpha^{h}}(N)^{h}[s]^{h/-\alpha}\right]^{\alpha}$$
$$= (-1)\sum_{n=0}^{\infty}[\xi(a,s)]^{\alpha}$$

Hal itu menunjukkan bahwa derivatif fraksional Caputo-Ortiguera dari fungsi ζ −Hurwitz juga bersifat chaotik pada bidang Gaussian terbukti.

Representasi Geometris Derivatif Fraksional Caputo-Ortiguera fungsi ζ −Hurwitz pada Bidang Gaussian

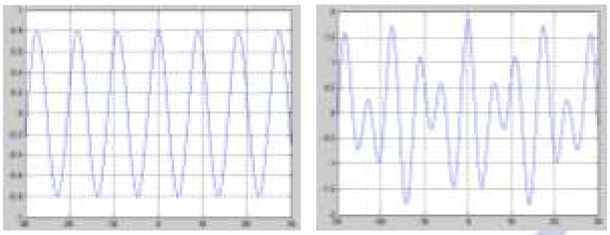
Dari bentuk diatas diambil bagian real dari $\psi(\alpha,s)$ sehingga diperoleh

$$Re(\psi(\alpha,s)) = (-1)\sum_{n=1}^{\infty}(\log(n+a))^{\alpha}(n+a)^{-\sigma}(\cos(t\log(n+a)))$$

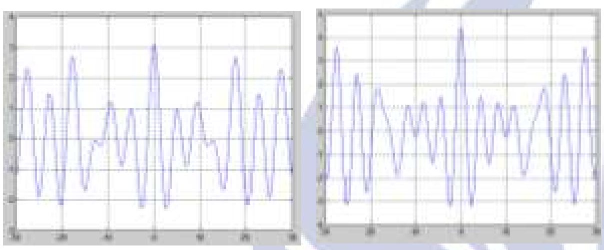
Misalkan dibentuk suatu fungsi baru $\gamma_1(\alpha,s)$ dengan,

$$\gamma_1(\alpha,s) = (-1)\sum_{n=1}^{k}(\log(n+a))^{\alpha}(n+a)^{-\sigma}(\cos(t\log(n+a)))$$

fungsi $\gamma_1(\alpha,s)$ diplot menggunakan software Matlab dan tersaji seperti gambar dibawah ini.



$k = 2$ $k = 3$



$k = 4$ $k = 5$

Gambar 2.1 Pola perilaku fungsi $\gamma_1(\alpha,s)$ dengan $\alpha = 0.6, \sigma = 0$ dan $a = 0.01$

Dengan mengamati hasil plot dari bagian fungsi Pola perilaku fungsi $\gamma_1(\alpha,s)$ pada Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa perilaku menyerupai fungsi genap atau terlihat simetris.

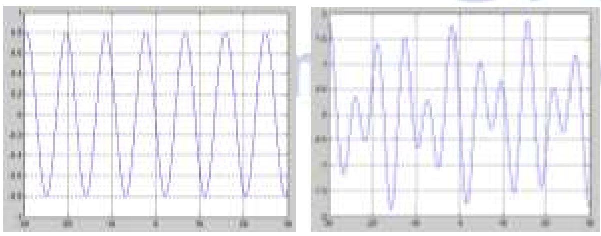
Sedangkan bagian imajiner dari $\psi(\alpha,s)$ diperoleh

$$Im(\psi(\alpha,s)) = \sum_{n=1}^{\infty}(\log(n+a))^{\alpha}(n+a)^{-\sigma}(\sin(t\log(n+a)))$$

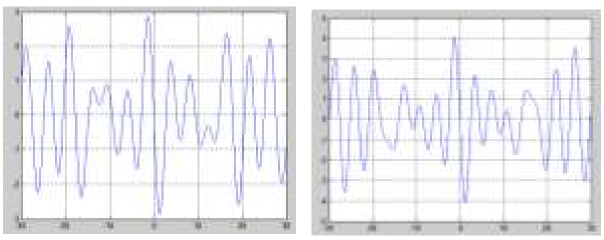
Misalkan dibentuk suatu fungsi baru $\gamma_2(\alpha,s)$ dengan,

$$\gamma_2(\alpha,s) = \sum_{n=1}^{k}(\log(n+a))^{\alpha}(n+a)^{-\sigma}(\sin(t\log(n+a)))$$

fungsi $\gamma_2(\alpha,s)$ di atas diplot menggunakan software Matlab dan tersaji seperti gambar dibawah ini.



$k = 2$ $k = 3$



$k = 4$ $k = 5$

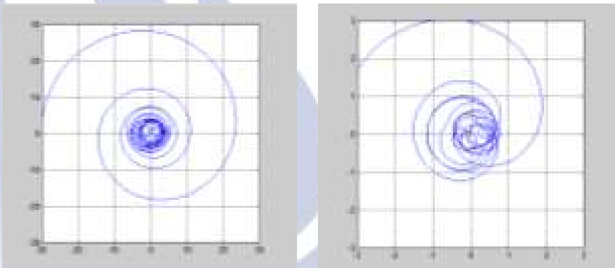
Gambar 2.2 Pola perilaku fungsi $\gamma_2(\alpha,s)$ dengan $\alpha = 0.6, \sigma = 0$ dan $a = 0.01$

Dengan mengamati hasil plot dari perilaku fungsi $\gamma_2(\alpha,s)$ dapat dilihat bahwa perilaku menyerupai fungsi ganjil.

Setelah diketehui plot aproksimasi dari bagian real dan imajiner dari $\psi(\alpha,s)$ selanjutnya disajikan representasi geometris derivatif fraksional Caputo-Ortiguera fungsi $\zeta-$Hurwitz yang telah dimodifikasi menjadi fungsi baru yang bergantung pada s dan α yaitu fungsi $\psi(\alpha,s)$ yang diperoleh sebagai berikut

$$\psi(\alpha,s) = (-1)\sum_{n=1}^{\infty}(\log(n+a))^{\alpha}((n+a)^{-s})$$

Bentuk di atas diplot menggunakan software Matlab dan tersaji seperti gambar dibawah ini



$\sigma = 0$ $\sigma = 1$

Gambar 2.3 Plot derivatif fraksional Caputo-Ortiguera fungsi $\zeta-$Hurwitz dengan $\alpha = 0.6, a = 0.01,\ n = 20$ dan $t = 30$

Gambar 2.3 menunjukkan representasi geometris dari derivatif fraksional Caputo-Ortiguera fungsi $\zeta-$Hurwitz. Dari gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa plot derivatif fraksional Caputo-Ortiguera fungsi $\zeta-$ Hurwitz adalah spiral dengan asimtotik atraktor dipersekitaran nol, sehingga apabila plot tersebut diperbesar dipersekitaran nol maka akan didapati grafik tersebut akan saling beririsan satu sama lain.

Simpulan

1. Derivatif fraksional Caputo-Ortiguera fungsi $\zeta-$Hurwitz dan fungsi $\zeta-$Hurwitz dapat ditentukan melalui generalisasi dari fungsi kompleks *Dirichlet series.*
2. Derivatif fraksional dari fungsi $\zeta-$ Riemann dan fungsi $\zeta-$ Hurwitz memiliki sifat chaotik dan menunjukkan suatu ekspresi unik sebagai deret berpangkat kompleks.
3. Perilaku chaotik mungkin menunjukkan bahwa derivative fraksioanal dari fungsi $\zeta-$Riemann dan fungsi $\zeta-$ Hurwitz yang tidak terdiferensiasi dipersekitaran nol.

Daftar Pustaka

Apostol, T.M. 2010. "Introduction to Analytic Number Theory". New York: Springer Verlag.

Cattani, C. 2010. “Fractal patterns in prime numbers distribution”. *Computational Science and its Applications – ICCSA2010*. Berlin: Springer Heidelberg.

Cattani,C and Gariglia,E. 2015. “Fractional Derivative of The Hurwitz ζ-Function and Chaotic Decay to Zero”. Journal of King Saud University

Chandrasekharan, K. 1953. “The Riemann Zeta-Function”. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

Guariglia, E., 2015. “Fractional analysis of Riemann zeta function”. Krakow: Springer.

Kamata, M and Nakamula, A. 2002. “Riemann–Liouville integrals of fractional order and extended KP hierarchy”. *Journal of Physics. A: Math and General*.Vol. 35 No. 45.

Kilbas, A. A., Srivastava, H.M., Tuijillo, J.J . 2006. “Theory and Applications of Fractional Di_erential Equations”. New Jersey: Springer.

Lazarevic´ , M. 2014. “Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling”. WSEAS Press.

Liu, K., Hu, R.J., Cattani, C., Xie, G.N., Yang, X.J., Zhao, Y. 2014. “Local fractional Z transforms with applications to signals on Cantor sets”. *Abstract and Applied Analysis*. Vol.2014

Pozdnyakov, D. 2012. “Physical interpretation of the Riemann hypothesi.s”. arXiv.org

Ortigueira, M.D., 2006. “A coherent approach to non-integer order derivatives”. Signal Process. Vol.86.

Wang, X. 2012. “Fractional geometric calculus: toward a unified mathematical language for physics and engineering”. In: Proceedings of The Fifth Symposium on Fractional Differentiation and its Applications (FDA12). Hohai University.