

PLANARITAS-1 HASIL KALI LEKSIKOGRAFIK GRAF

Novi Dwi Pratiwi

(S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)

e-mail: novid087@gmail.com

Prof. Drs. I Ketut Budayasa, Ph.D.

(Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)

e-mail : ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Graf planar-1 pertama kali diperkenalkan pada tahun 1965 oleh Ringel membahas masalah pewarnaan titik dan muka pada graf bidang. Sebuah graf G disebut planar-1 jika G dapat digambar pada bidang datar sehingga setiap sisi yang terpotong paling banyak dipotong oleh satu sisi lainnya. Hasil kali leksikografik merupakan salah satu operasi yang digunakan dalam graf planar-1. Hasil kali leksikografik dua graf G dan H , dilambangkan dengan $G \circ H$ adalah sebuah graf yang himpunan titiknya adalah hasil kali kartesian $V(G) \times V(H)$ dan dua titik (u, v) dan (x, y) berhubungan langsung di $G \circ H$ jika dan hanya jika u berhubungan langsung dengan x di G atau $u = x$ dan v berhubungan langsung dengan y di H . Diungkap beberapa kelas graf G dan H sedemikian hingga $G \circ H$ planar-1 atau $G \circ H$ bukan planar-1.

Kata Kunci : graf planar-1, hasil kali leksikografik.

Abstract

1-planar graph introduced in 1965 by Ringel in connection with simultaneous vertex-face colorings of plane graphs. A graph G is called 1-planar if G can be drawn in the plane so that each edge is crossed by at most one other edge. The lexicographic product is the one of the operations used in 1-planar graph. The lexicographic product of two graphs G and H , denoted by $G \circ H$ is a graph such that the vertex set of $G \circ H$ is the cartesian product $V(G) \times V(H)$ and two vertices (u, v) and (x, y) are adjacent in $G \circ H$ if and only if either u is adjacent to x in G or $u = x$ and v is adjacent to y in H . In this paper we establish some classes of graphs G and H such that $G \circ H$ is 1-planar or $G \circ H$ is non 1-planar graph.

Keywords: 1-planar graph, lexicographic product.

PENDAHULUAN

Graf planar merupakan graf yang dapat digambar dalam bidang tanpa memotong sisi. Graf planar merupakan salah satu bagian dari graf planar-1. Graf planar-1 merupakan graf yang dapat digambar pada bidang datar sehingga setiap sisi yang terpotong paling banyak dipotong oleh satu sisi lainnya. Aplikasi pada graf planar-1 salah satunya dapat diterapkan pada petugas pemadam kebakaran dalam memadamkan api yang terletak pada pembagian posisi *manfire* dalam memilih titik atau tempat untuk memadamkan api. *Manfire* harus mencari titik yang aman dan tidak terjangkau oleh api. Dengan menerapkan konsep graf planar-1, setiap sisi dapat dipadamkan oleh satu atau dua *manfire*, sehingga hanya ada maksimal satu cross penyemprotan api. Hal ini membuat proses memadamkan api dapat berlangsung dengan cepat dan efisien tanpa membahayakan *manfire*.

Graf planar-1 dapat dioperasikan dengan hasil kali leksikografik yang melibatkan dua graf, yaitu

graf G dan graf H . Hasil kali leksikografik merupakan bagian dari perkalian kartesius. Hasil kali leksikografik adalah sebuah graf yang himpunan titiknya adalah hasil kali kartesius $V(G) \times V(H)$ dan dua titik (u, v) dan (x, y) berhubungan langsung di $G \circ H$ jika dan hanya jika u berhubungan langsung dengan x di G atau $u = x$ dan v berhubungan langsung dengan y di H . Pada skripsi ini akan dibahas hasil kali leksikografik $G \circ H$ dari dua graf G dan H dalam planar-1. Sebagai tambahan, akan diperkenalkan beberapa operasi pada graf.

LANDASAN TEORI

A. Definisi 2.1 (Graf) :

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut *titik* dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut *sisi* sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan titik-titik di $V(G)$.

(Budayasa, 2007)

B. Definisi 2.2 (Jalan)

Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah *jalan* (*walk*) di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Kita katakan W adalah sebuah jalan dari v_0 ke titik v_k , atau *jalan*-(v_0, v_k).

(Budayasa, 2007)

C. Definisi 2.3 (Lintasan)

Misalkan $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ sebuah jalan di W . Jika semua sisi dan semua titik dalam jalan W berbeda maka W disebut *lintasan* (*path*). Lintasan dengan panjang n dinotasika dengan P_n , untuk $0 \leq n \leq k$.

(Budayasa, 2007)

D. Definisi 2.4 (Sikel)

Misalkan $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{k-1}, v_{k-1}, \dots, e_k, v_k)$ adalah sebuah *jejak tertutup* (*closed trail*) di G , maka W disebut sikel jika titik awal dan semua titik internalnya berbeda.

(Budayasa, 2007)

E. Definisi 2.5 (Graf Komplet (K_n))

Sebuah *Graf Komplet* dengan n titik, dilambangkan dengan K_n adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi.

(Budayasa, 2007)

F. Definisi 2.6 (Graf Bipartit dan Graf Bipartit Komplet ($K_{m,n}$))

Sebuah graf G disebut *graf bipartit* jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B , dilambangkan dengan $G(A, B)$. (A, B) bipartit dari G .

(Budayasa, 2007)

G. Definisi 2.7 (Graf Bidang)

Sebuah graf $G(V, E)$ disebut *graf bidang* jika V himpunan titik dan E himpunan sisi pada bidang. Setiap sisi paling banyak terdiri dari dua titik dan titik itu adalah titik akhir sisi tersebut. Tidak ada sisi-sisi yang saling berpotongan kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi-sisi tersebut.

(Budayasa, 2007)

H. Definisi 2.8 (Graf Planar)

Graf G disebut *graf planar* jika G isomorfik dengan graf bidang. Graf bidang yang disisipkan pada graf planar G disebut *pajangan*.

(Budayasa, 2007)

I. Definisi 2.9 (Graf Planar-1)

Sebuah graf G disebut *planar-1* jika G dapat digambar pada bidang datar sehingga setiap sisi terpotong oleh paling banyak satu sisi lainnya.

Jika H subgraf dari G dan H tidak planar-1, maka G tidak planar-1.

(Jozef dan Czap, 2015)

J. Definisi 2.10 Bilangan penyilang (crossing number) Sebuah Graf

Misalkan G sebuah graf. Bilangan penyilang (*crossing number*) graf G dilambangkan dengan $C_r(G)$, adalah minimum banyak titik silang antara dua sisi G yang digambarkan pada bidang datar.

Jika G graf planar-1 maka maksimum banyaknya titik silang dalam pajangan planar-1 G dalam bidang datar dilambangkan dengan $C_{r_1}(G)$.

(Czap dan Hudak, 2011)

Lemma 2.1 :

Jika G graf dengan $|V(G)| = 4$, maka $G + G$ graf planar-1 jika dan hanya jika $G \subseteq K_4$. ■

(Czap, Hudak, Madaras. 2014)

Teorema 2.2 :

$$Cr(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{1}{2}m \right\rfloor \left\lfloor \frac{1}{2}(m-1) \right\rfloor \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor \left\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \right\rfloor$$
 ■
(zarankiewicz, dalam D.J Kleitman)**1. Definisi 2.1 (Join Graf)**

Misalkan G dan H dua graf yang lepas titik. Join graf dari G dan H dilambangkan dengan $G + H$ adalah graf yang himpunan titiknya $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisinya adalah $E(G) \cup E(H)$ dan digabung dengan himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik di $V(G)$ dan titik-titik di $V(H)$.

(Jozef and Czap, 2015)

2. Definisi 2.2 (Gabungan Terpisah)

Misal ada dua graf G dan H dimana himpunan $V(G)$ dan $V(H)$ saling asing begitu juga himpunan $E(G)$ dan $E(H)$ maka gabungan graf dinotasikan $G \cup H$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

(Jozef and Czap, 2015)

1. Teorema 2.3 Teorema Jabat Tangan

Jika G sebuah graf, maka $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$ ■

2. Teorema 2.4 Formula Euler

Jika G graf bidang terhubung, maka $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ ■

Catatan: Formula Euler tidak berlaku untuk graf bidang tak terhubung

Teorema 2.5 (Akibat Formula Euler)

Jika G graf planar sederhana dengan $|E(G)| > 1$, maka $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ ■

(Budayasa, 2007)

PEMBAHASAN**A. Definidi 3.1 (Hasil Kali Leksikografik Graf)**

Hasil kali leksikografik dua graf G dan H , dilambangkan dengan $G \circ H$ adalah sebuah graf yang himpunan titiknya adalah hasil kali kartesian $V(G) \times$

$V(H)$ dan dua titik (u, v) dan (x, y) berhubungan langsung di $G \circ H$ jika dan hanya jika u berhubungan langsung dengan x di G atau $u = x$ dan v berhubungan langsung dengan y di H .

(Jozef dan Czup, 2015)

Definisi 3.2 :

Misalkan G sebuah graf planar-1 dan G_1 adalah pajangan planar-1 G . Misalkan $(u, v), (x, y)$ sisi G yang saling lepas. Perpotongan antara sisi (u, v) dan (x, y) adalah titik persekutuan sisi (u, v) dan (x, y) pada G_1 . Misalkan himpunan semua titik silang (perpotongan) pada graf pajangan G_1 dilambangkan dengan $C = C(G_1)$ dan E_0 adalah himpunan sisi-sisi G_1 yang tidak berpotongan. Bentuk (kontruksi) graf G_1^* sedemikian hingga $V(G_1^*) = V(G) \cup C$ dan himpunan sisi dari G_1^* adalah $E(G_1^*) = E_0 \cup \{uv, vt | uv \in E(G_1 - E_0), t \in C, t \in uv\}$.

Jelas bahwa G_1^* adalah graf bidang dan setiap titik di C berderajat empat di G_1^* . Selanjutnya kita sebut titik ini sebagai titik "semu" dan semua titik di G_1^* yang lain adalah titik-titik yang sesungguhnya di G_1 , begitu juga sisi-sisi dan muka-muka di G_1^* dinamakan sisi dan muka semu jika sisi-sisi dan muka-muka tersebut terkait dengan sebuah titik semu, sedangkan sisi dan muka yang lainnya dinamakan sisi-sisi dan muka-muka sesungguhnya.

(Czap dan Hudak, 2012)

Definisi 3.3

Sebuah graf bidang yang setiap muka berderajat tiga disebut graf bidang-triangulasi.

(Czap dan Hudak, 2013)

Teorema 3.4 :

Untuk setiap graf dengan m sisi, $C_{r_1}(G) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dengan m =banyak sisi.

(Czap dan Hudak, 2011)

Lemma 3.5

Misalkan G graf planar-1. Maka $Cr(G) \leq \max C_{r_1}(G)$

(Czap dan Hudak, 2011)

Lemma 3.6 :

Jika G graf bidang triangulasi dengan n titik, maka

$$|F(G)| = 2n - 4$$

(Czap dan Hudak, 2013)

Teorema 3.7 :

Misalkan G graf planar-1. Jika G_1 adalah pajangan planar-1 dari G dan C adalah himpunan silang pada G_1 , maka

$$c \leq n - 2$$

(Czap dan Hudak, 2013)

Teorema 3.8 :

Jika G sebuah graf planar-1 maka $|E(G)| \leq 4|V(G)| - 8$.

(Fabrici dan Madaras, 2007)

Akibat 3.9 :

Jika G graf planar-1, maka $\delta(G) \leq 7$.

Akibat 3.10 :

Jika $n \geq 7$ maka graf komplet K_n bukan graf planar-1.

Akibat 3.11 :

Jika $n, m \geq 5$ maka graf bipartit komplet $K_{m,n}$ bukan graf planar-1.

(Czap dan Hudak, 2011)

Lemma 3.12 :

Jika G_1, G_2 dan G_3 graf, maka $(G_1 \cup G_2) \circ G_3 = (G_1 \circ G_3) \cup (G_2 \circ G_3)$. ■

Lemma 3.13 :

Graf $G \cup H$ planar-1 jika dan hanya jika G dan H planar-1.

Akibat 3.14 :

Jika G_1, G_2 dan G_3 graf, maka $(G_1 \cup G_2) \circ G_3$ planar-1 jika dan hanya jika graf $G_1 \circ G_3$ planar-1 dan graf $G_2 \circ G_3$ planar-1.

Bukti:

Karena $G_1 \circ G_3$ dan $G_2 \circ G_3$ graf planar-1, maka berdasarkan definisi gabungan dua graf (Definisi 2.5),

$$(G_1 \circ G_3) \cup (G_2 \circ G_3) \text{ adalah graf planar-1}$$

Berdasarkan Lemma 3.12,

$$(G_1 \cup G_2) \circ G_3 = (G_1 \circ G_3) \cup (G_2 \circ G_3)$$

Akibatnya,

$$(G_1 \cup G_2) \circ G_3 \text{ graf planar-1}$$

Andaikan $G_1 \circ G_3$ bukan planar-1 atau $G_2 \circ G_3$ bukan planar-1 maka berdasarkan definisi gabungan dua graf (Definisi 2.5)

$$(G_1 \circ G_3) \cup (G_2 \circ G_3) \text{ bukan planar-1.}$$

Berdasarkan Lemma 3.12,

$$(G_1 \cup G_2) \circ G_3 = (G_1 \circ G_3) \cup (G_2 \circ G_3)$$

Akibatnya

$$(G_1 \cup G_2) \circ G_3 \text{ bukan planar-1} \quad \blacksquare$$

Lemma 3.15 :

Misalkan H sebuah graf. Graf $P_1 \circ H$ adalah graf planar-1 jika dan hanya jika H planar-1.

Bukti:

Misalkan H graph planar-1 maka berdasarkan Definisi 3.1, $P_1 \circ H$ isomorfik dengan H .

Akibatnya, $P_1 \circ H$ planar-1.

Misalkan H bukan graph planar-1, karena $P_1 \circ H$ isomorfik dengan H , maka $P_1 \circ H$ bukan planar-1. ■

Lemma 3.16 :

Jika G sebuah graf dengan paling sedikit lima titik, maka $P_2 \circ G$ tidak planar-1.

Bukti:

Karena $|V(G)| \geq 5$ maka G memuat $5P_1$ sebagai graf bagiannya. Akibatnya $P_2 \circ 5P_1$ subgraf dari $P_2 \circ G$. Berdasarkan Definisi 3.1, $P_2 \circ 5P_1 = K_{5,5}$

Berdasarkan Akibat 3.11, $K_{5,5}$ bukan planar-1. Akibatnya graf $P_2 \circ G$ bukan planar-1. ■

Lemma 3.17 :

Misalkan G graf dengan $|V(G)| \leq 4$. Graf $P_2 \circ G$ planar-1 jika dan hanya jika G subgraf dari C_4 atau G subgraf dari C_3 .

Bukti :

Berdasarkan Definisi 2.3 dan 3.1, jelas bahwa $P_2 \circ G = G + G$. Jika $G \subseteq C_4$, berdasarkan Lemma 2.1, graf $G + G$ planar-1. Jika $G \subseteq C_3$, maka graf $P_2 \circ G \subseteq K_6$. Berdasarkan Akibat 3.10, K_6 graf planar-1, sehingga $P_2 \circ G$ planar-1.

Misal $G \not\subseteq C_4$ dan $G \not\subseteq C_3$, maka $|V(G)| \geq 4$. Jika $|V(G)| = 4$, berdasarkan Lemma 2.1, $P_2 \circ G$ bukan planar-1. Jika $|V(G)| \geq 5$, maka

$$\begin{aligned} |E(P_2 \circ G)| &= |E(P_2)| \times |V(G)|^2 + |V(P_2)| \\ &\quad \times |E(G)| \\ &= |V(G)|^2 + 2 \cdot |E(G)| \\ &> 8|V(G)| - 8 \\ &= 4(|V(P_2)| \times |V(G)|) - 8 \end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan Teorema 3.8, graf $P_2 \circ G$ bukan planar-1. ■

Lemma 3.18 :

Jika $n \geq 5$, maka graf $K_{n,4}$ bukan graf planar-1.

Lemma 3.19 :

Graf $P_3 \circ 4P_1$ adalah bukan graf planar-1.

Bukti :

Berdasarkan Definisi 3.1, $P_3 \circ 4P_1 = K_{4,8}$.

Berdasarkan Lemma 3.18, graf $K_{4,8}$ bukan planar-1.

Akibatnya $P_3 \circ 4P_1$ adalah bukan planar-1. ■

Akibat 3.20 :

Jika G adalah graf terhubung dengan paling sedikit tiga titik dan H adalah graf dengan paling sedikit empat titik, maka $G \circ H$ bukan graf planar-1.

Bukti :

Karena $|V(G)| \geq 3$, maka G memuat P_3 sebagai subgrafnya.

$|V(H)| \geq 4$, maka H memuat $4P_1$ sebagai subgrafnya.

Akibatnya $P_3 \circ 4P_1$ subgraf $G \circ H$. Berdasarkan Lemma 3.19 $P_3 \circ 4P_1$ bukan planar-1, maka $G \circ H$ bukan planar-1. ■

Lemma 3.21 :

Jika $n \geq 7$, maka graf bipartit komplet $K_{n,3}$ bukan graf planar-1.

(Czap dan Hudak, 2012)

Lemma 3.22 :

Misal G graf terhubung dengan paling sedikit tiga titik dan misal H adalah sebuah graf dengan tiga titik. Jika derajat maksimum G paling sedikit tiga, maka $G \circ H$ bukan graf planar-1.

Bukti :

Karena $|V(G)| \geq 3$ dan $\Delta(G) \geq 3$, maka G memuat $K_{1,3}$ sebagai subgrafnya. $|V(H)| = 3$, maka H memuat $3P_1$ sebagai subgrafnya. Akibatnya $K_{1,3} \circ 3P_1 = K_{3,9}$, berdasarkan Lemma 3.21, graf $K_{3,9}$

bukan planar-1. Karena $K_{3,9}$ subgraf dari $G \circ H$ maka $G \circ H$ bukan graf planar-1. ■

Akibat 3.23 :

Jika G adalah graf terhubung dengan paling sedikit tiga titik, H adalah sebuah graf dengan tiga titik dan $G \circ H$ adalah planar-1, maka G adalah sebuah siklus atau lintasan.

Bukti :

Karena $G \circ H$ planar-1, maka berdasarkan Lemma 3.22 $\Delta(G) \leq 2$. Akibatnya karena G terhubung maka G berupa siklus atau lintasan.

Teorema 3.24 :

Setiap graf planar-1 dengan n titik diperoleh dari sebuah graf planar dengan menambahkan paling banyak $n - 2$ sisi.

(Czap dan Hudak, 2013)

Teorema 3.25 :

Jika G graf bipartit planar-1, maka $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

(Czap dan Hudak, 2013)

Lemma 3.26 :

Misalkan C_n adalah sebuah siklus dengan n titik dan G sebuah graf dengan tiga titik, maka $C_n \circ G$ bukan graf planar-1.

Bukti :

Cukup dibuktikan bahwa graf $C_n \circ 3P_1$ bukan planar-1. Ditinjau dengan dua kasus, n genap dan n ganjil.

Kasus 1 : n genap

Berdasarkan Definisi 3.1 $C_n \circ 3P_1$ graf bipartisi dan setiap titik berderajat enam.

Berdasarkan Teorema 2.1

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(C_n \circ 3P_1)} d(v) &= 2|E(C_n \circ 3P_1)| \\ 6|V(C_n \circ 3P_1)| &= 2|E(C_n \circ 3P_1)| \end{aligned}$$

Sehingga ;

$$|E(C_n \circ 3P_1)| = 3|V(C_n \circ 3P_1)|$$

Karena graf $C_n \circ 3P_1$ graf bipartisi dan planar-1, berdasarkan Teorema 3.25

$$|E(C_n \circ 3P_1)| \leq 3|V(C_n \circ 3P_1)| - 6 <$$

$$3|V(C_n \circ 3P_1)| = |E(C_n \circ 3P_1)| \text{ (kontradiksi)}$$

Kasus 2 : n ganjil

Misalkan $v_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, $j = 0, 1, 2$ adalah titik-titik dari graf $C_n \circ 3P_1$ sedemikian hingga $v_{i,j}$ berhubungan langsung ke titik-titik $v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}, v_{i+1,j+2}, v_{i-1,j}, v_{i-1,j+1}$ dan $v_{i-1,j+2}$ dimana indeks i diambil modulo n dan indeks j diambil modulo tiga.

Andaikan $C_n \circ 3P_1$ planar-1. Pertama kita tunjukkan bahwa setiap subgraf G_i dari graf $C_n \circ 3P_1$ yang dibangun oleh sembilan titik-titik

$v_{i-1,0}, v_{i-1,1}, v_{i-1,2}, v_{i,0}, v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i+1,0}, v_{i+1,1}, v_{i+1,2}$ memiliki tepat enam silang dalam setiap pajangan planar-1 dari $C_n \circ 3P_1$, $\forall i = 0, \dots, n - 1$. Perhatikan bahwa G_i memuat $K_{3,6}$ sebagai subgraf $\forall i = 0, \dots, n - 1$. Berdasarkan Teorema 3.6 G_i memuat

paling sedikit enam silang. Tanpa menghilangkan keumuman misalkan G_i pajangan planar-1 dari $C_n \circ 3P_1$ yang memiliki paling sedikit tujuh silang, karena graf-graf G_i untuk $i = 1, \dots, n - 2$ adalah pisah sisi maka secara keseluruhannya graf-graf tersebut memuat paling sedikit $7 + 6 \cdot \frac{n-3}{2} = 3n - 2$ silang. Lebih lanjut enam buah titik yaitu $v_{0,0}, v_{0,1}, v_{0,2}, v_{n-1,0}, v_{n-1,1}, v_{n-1,2}$ membangun subgraf yang berupa $K_{3,3}$, karena $K_{3,3}$ bukan planar maka pajangannya pasti memuat sebuah silang. Akibatnya jika G_1 memiliki paling sedikit tujuh silang, maka pajangan planar-1 dari $G \circ 3P_1$ memiliki paling sedikit $3n - 2 + 1 = |V(G \circ 3P_1)| - 1$ silang. Berdasarkan Teorema 3.4 pajangan $G \circ 3P_1$ memiliki paling banyak $|V(G \circ 3P_1)| - 2$ (kontradiksi). Ini berarti G_1 tidak boleh memiliki lebih dari enam silang.

Akibatnya jika subgraf dari $G \circ 3P_1$ yang dibangun oleh enam titik $v_{i,0}, v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i+1,0}, v_{i+1,1}, v_{i+1,2}$ memiliki k buah silang, maka subgraf yang dibangun oleh titik-titik $v_{i+1,0}, v_{i+1,1}, v_{i+1,2}, v_{i+2,0}, v_{i+2,1}, v_{i+2,2}$ memiliki $6 - k$ silang. Jika subgraf yang dibangun oleh $v_{0,0}, v_{0,1}, v_{0,2}, v_{1,0}, v_{1,1}, v_{1,2}$ memiliki k silang. Akibatnya G_0 memiliki $k + k = 6$ silang, sehingga $k = 3$. Dari sini diperoleh bahwa setiap subgraf dari $G \circ 3P_1$ yang dibangun oleh $v_{i,0}, v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i+1,0}, v_{i+1,1}, v_{i+1,2}$ memiliki tiga silang untuk $i = 1, \dots, n - 1$, akibatnya setiap pajangan planar-1 dari $C_n \circ 3P_1$ mempunyai $3n = |V(C_n \circ 3P_1)| > |V(C_n \circ 3P_1)| - 2$ silang. Hal ini kontradiksi karena berdasarkan Teorema 3.21 banyak silang pada pajangan $C_n \circ 3P_1 \leq |V(C_n \circ 3P_1)| - 2$. ■

Lemma 3.27 :

Misal P_n sebuah lintasan dengan n titik, $n \geq 1$ dan G sebuah graf dengan paling banyak tiga titik, maka graf $P_n \circ G$ adalah planar-1.

Bukti :

Graf sederhana G dengan tiga titik ada empat graf yang non isomorfik yang mempunyai tiga titik yaitu seperti tampak pada gambar berikut



Sehingga dalam hal ini cukup ditunjukkan bahwa $P_n \circ C_3$ adalah graf planar-1.

Pada pajangan $P_n \circ C_3$ tampak bahwa ada n segitiga atau C_3 (yang berkorespondensi) dengan n titik pada P_n) yang dibentuk oleh titik-titik $V_{i,0}, V_{i,1},$ dan $V_{i,2}$ untuk $i = 0, 1, \dots, n - 1$. ■

Lemma 3.28 :

Jika S_n sebuah bintang dengan n titik dan P_2 adalah sebuah lintasan dengan dua titik, maka $S_n \circ P_2$ adalah graf planar.

Bukti :

Misalkan u titik pusat dari bintang S_n dan misalkan u_1, u_2, \dots, u_{n-1} adalah titik-titik yang lain dari S_n . Berdasarkan pajangan dari $S_n \circ P_2$ tampak tidak ada

sisi yang saling silang, sehingga $S_n \circ P_2$ graf planar-1. ■

Teorema 3.29 :

Jika T_n sebuah pohon dengan n titik dan P_2 adalah lintasan dengan dua titik, maka $T_n \circ P_2$ adalah planar.

Bukti : (induksi pada n)

Untuk $1 < n \leq 3$ maka T_n adalah S_n . Sehingga berdasarkan Lemma 3.27 $T_n \circ P_2 = S_n \circ P_2$ adalah graf planar.

Asumsikan pernyataan benar untuk $3 < n \leq k$, pikirkan pohon dengan $k + 1$ titik yaitu T_{k+1} . Maka T_{k+1} memuat paling sedikit dua titik berderajat satu. Misalkan v sebuah titik yang berderajat satu di T_{k+1} . Maka graf $T_{k+1} - \{v\}$ adalah berupa pohon dengan k titik, namakan T_1 . Berdasarkan asumsi $T_1 \circ P_2$ adalah graf planar. Pikirkan pajangan dari $T_1 \circ P_2$, akan dicari pajangan $T_{k+1} \circ P_2$ dengan cara sebagai berikut. Misalkan u titik yang berhubungan langsung dengan v di pohon T_{k+1} tambahkan sebuah sisi e_v (yang berkorespondensi dengan titik v) pada sebuah muka dari pajangan $T_1 \circ P_2$ yang terkait dengan sisi e_u yang berkorespondensi dengan u di T_{k+1} atau di T_1 . Selanjutnya kita hubungkan titik-titik akhir dari sisi e_v dengan titik-titik akhir dari e_u .

Maka pajangan dari $T_{k+1} \circ P_2$ tidak ada sisi-sisi yang saling silang sehingga $T_{k+1} \circ P_2$ graf planar.



Lemma 3.30 :

Jika C_n adalah sikel dengan n titik, maka $C_n \circ P_2$ memiliki sebuah pajangan planar-1 sedemikian hingga sisi-sisi $C_n \circ P_2$ yang berkorespondensi dengan titik-titik C_n tidak saling berpotongan.

Bukti :

Dengan mengkontruksi sebuah pajangan planar-1 dari $C_n \circ P_2$ untuk n genap dan n ganjil terlihat bahwa sisi-sisi dari $C_n \circ P_2$ yang berkorespondensi dengan sisi-sisi di C_n (yang digambar tebal) tidak ada yang saling silang dan setiap sisi dipotong oleh satu sisi yang lain. ■

Definisi 3.31 (Kaktus) :

Jika G graf terhubung dan setiap sisi termuat dalam paling banyak satu sikel maka G dikatakan sebuah kaktus.

(Jozef dan Czap, 2015)

Teorema 3.32

Jika G adalah kaktus, maka $G \circ P_2$ memiliki pajangan planar-1 sedemikian hingga sisi-sisi $G \circ P_2$ yang berkorespondensi dengan titik-titik G tidak saling berpotongan.

Bukti : (induksi pada $|V(G)| = n$)

Jika G sebuah pohon, berdasarkan Teorema 3.29, $G \circ P_2$ merupakan graf planar. Sehingga $G \circ P_2$ memiliki pajangan yang merupakan graf bidang. Jika G adalah sebuah sikel, berdasarkan Lemma 3.30, $G \circ P_2$ memiliki pajangan planar-1 sedemikian hingga

sisi-sisi $G \circ P_2$ yang berkorespondensi dengan titik di G tidak berpotongan.

andaikan G memuat titik pedal (titik berderajat satu) namakan v dan v berhubungan langsung dengan x di G . Jelas bahwa $G - \{v\}$ graf kaktus. Sehingga berdasarkan asumsi $(G - \{v\}) \circ P_2$ memiliki pajangan planar-1 sedemikian hingga sisi-sisi $(G - \{v\}) \circ P_2$ yang berkorespondensi dengan titik $G - \{v\}$ tidak saling berpotongan. Pajangan planar-1 dari $(G - \{v\}) \circ P_2$ dapat diperluas ke pajangan planar-1 $G \circ P_2$ dengan cara sebagai berikut. Dalam salah satu daerah pada pajangan planar-1 $(G - \{v\}) \circ P_2$ yang memuat sisi e_u yaitu sisi yang berkorespondensi dengan titik u di $G - \{v\}$. Gambarkan sisi e_v

dari $G \circ P_2$ yang berkorespondensi dengan titik v di G . Kemudian hubungkan titik-titik akhir e_v dengan titik-titik akhir e_u . Seperti tampak pada ilustrasi berikut:



Dengan cara seperti itu diperoleh pajangan planar-1 dari $G \circ P_2$ sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi dari $G \circ P_2$ yang berkorespondensi dengan titik G saling berpotongan. Jika G tidak memuat titik pedal dan G bukan sikel, maka G memuat sebuah sikel C sedemikian hingga C memuat tepat satu titik pemutus, namakan u di G . Misalkan H subgraf G yang diperoleh dengan menghapus semua titik-titik pada C kecuali titik u . Karena banyak titik $H \circ P_2$ lebih sedikit dari banyak titik $G \circ P_2$ dan H berupa kaktus, berdasarkan asumsi $H \circ P_2$ memiliki pajangan planar-1 sedemikian hingga sisi-sisi dari $H \circ P_2$ yang berkorespondensi dengan titik-titik di H tidak saling berpotongan. Misalkan pajangan planar-1 dari $(H \circ P_2)$ dilambangkan dengan $(H \circ P_2)_1$ dan pajangan planar-1 dari $C \circ P_2$ sedemikian hingga sisi-sisi dari $C \circ P_2$ yang berkorespondensi dengan titik C tidak berpotongan dilambangkan dengan $(C \circ P_2)_1$. Selanjutnya pajangan planar-1 dari $G \circ P_2$ dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut, himpitkan sisi e_u yang ada pada $(H \circ P_2)_1$ dengan sisi e_u yang ada pada $(C \circ P_2)_1$ sedemikian hingga semua titik-titik dan sisi-sisi dari $(C \circ P_2)_1$ yang lain terletak pada daerah $(H \circ P_2)_1$ yang sama. Dengan demikian akan diperoleh pajangan planar-1 dari $G \circ P_2$ sedemikian hingga sisi-sisi dari $G \circ P_2$ yang bersesuaian dengan titik-titik di G tidak saling berpotongan. ■

Teorema 3.33

Jika G memuat sebuah segitiga sedemikian hingga paling sedikit satu sisinya merupakan sisi dari lebih dari satu sikel, maka graf $G \circ P_2$ bukan graf planar-1.

Bukti :

Misalkan $v_1v_2v_3v_1$ adalah sebuah segitiga dalam G . Misalkan P sebuah

lintasan dengan panjang paling sedikit tiga di G yang titik-titik akhirnya adalah v_1 dan v_2 dan P tidak memuat titik v_3 . Andaikan graf $G \circ P_2$ planar-1. Perhatikan bahwa $v_1v_2v_3v_1 \circ P_2 = K_6$ adalah subgraf dari $G \circ P_2$. Sementara K_6 memiliki pajangan planar-1 tunggal. Perhatikan bahwa sisi-sisi yang terpotong di K_6 membagi pajangan planar-1nya menjadi lima bagian seperti yang tampak pada bagian tersebut (yang tidak diarsir).



Gambar 3.11 pajangan planar-1 dari K_6

Perhatikan bahwa setiap bagian yang tidak diarsir memuat paling banyak tiga titik dari $K_6 = v_1v_2v_3v_1 \circ P_2$. Lintasan $P - \{v_1v_2\} \circ P_2$ adalah subgraf $G \circ P_2$. Karena $G \circ P_2$ planar-1 berarti pajangan $P - \{v_1v_2\} \circ P_2$ harus berada dalam satu bagian K_6 . Titik pertama dan titik terakhir dari $P - \{v_1v_2\}$ berhubungan langsung dengan paling sedikit empat titik dari K_6 . Berarti ada titik diluar bagian tadi yang harus berhubungan langsung dengan titik didalam bagian tersebut. Akibatnya sisi yang menghubungkan dua titik ini akan memotong sisi K_6 . Akibatnya ada sisi yang dipotong oleh lebih dari satu sisi yang lain. Sehingga $G \circ P_2$ bukan planar-1 (kontradiksi). ■

PENUTUP

A. Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dibahas pada skripsi yang berjudul Planaritas-1 Hasil Kali Leksikografik Graf maka diperoleh simpulan sebagai berikut:

$\Delta(G)$ merupakan derajat maksimum G .

G	H	Apakah $G \circ H$ planar-1?
P_1	Apa saja	Jika dan hanya jika H planar-1
P_2	$ V(H) \geq 4$	Jika dan hanya jika $H \subseteq C_4$
P_3	$ V(H) \geq 4$	Bukan
$P_n, n \geq 1$	$ V(H) \leq 3$	Ya
$C_n, n \geq 3$	$ V(H) \leq 3$	Bukan
$\Delta(G) \geq 3$	$ V(H) \geq 3$	Bukan
$\Delta(G) \geq 3$	P_1	Jika dan hanya jika G planar-1
$\Delta(G) \geq 3$	$2P_1$	Belum tentu
Kaktus	P_2	Ya
Bukan kaktus	P_2	Belum tentu
$T_n, n > 1$	P_2	Ya

B. Saran

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenai planaritas-1 hasil kali leksikografik graf. Penulis

menyarankan kepada pembaca yang memiliki minat akademis yang sama dapat lebih mendalami dan mengembangkan teori-teori yang berkaitan dengan planar-1 dan hasil kali leksikografik yang belum dibahas dalam skripsi ini. Apabila ada kritik atau saran untuk skripsi ini bisa disampaikan melalui email penulis novid087@gmail.com.

DAFTAR PUSTAKA

- Bucko, Jozef., dan Czap, Julius. 2015. "1-Planar Lexicographic Products of Graphs", *Applied Mathematical Science*, Vol. 9, no. 109, 5441-5449.
- Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unipress.
- Czap, Julius., dan Hudak, David. 2012, "1-Planarity of complete multipartite graphs". *Discrete Applied Mathematics*, 160, 505-512.
- Czap, Julius., dan Hudak, David. 2013. "On drawings and decompositions of 1-planar graphs". *Mathematics Subject Classifications*, 05C10, 05C62, 05C70.
- D. J. Kleitman, 1971. "The Silanging Number of $K_{5,n}$ ", *Journal of Combinatorial Theory*, 9, 315-323.
- Fabricsi, Igor., dan Madaras, Tomas. 2007. "The Structure of 1-planar graphs", *Discrete Mathematics*, 307, 854-865.
- J. Czap, D.Hudak, T. Madaras, "Joins of 1-planar graphs". *Acta Math*, 30, 21867-1976
- Korzshik, Vladimir. 2007. "Minimal non-1-planar graphs". *Discrete Mathematics*, 308 (2008) 1319-1327.
- Lipschutz, Seymour., dan Marc Lars Lipson. 2002. *Matematika Diskrit 2*. Jakarta : Salemba Teknika.c
- Pach, Janos., dan Toth, Geza. 1997. "Graphs Drawn With Few Crossings Per Edge. *Combinatorica*, 17 (3), 427-439.
- Seputro, Theresia. 1992. "Teori Graf". Surabaya: Unipress.

