MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 2 No.6 Tahun 2017*
ISSN 2301-9115

GRAF TOTAL SUATU MODUL BERDASARKAN SUBMODUL SINGULER

Dian Ambarsari
(S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail: ambardian95@gmail.com

Dr. Agung Lukito, M.S.
(Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail : gung_lukito@yahoo.co.id

Abstrak

Graf total suatu modul adalah graf tak berarah dengan semua elemen di modul M sebagai titik, dan dimisalkan $x, y \in M$ dua titik yang berbeda dikatakan berhubungan langsung jika dan hanya jika $x + y \in Z(M)$. Graf total $T(\Gamma(M))$ suatu modul M berdasarkan submodul singuler $Z(M)$ diperkenalkan oleh J. Goswami, K.K Rajkhowa dan H.K. Saikia. $Z(M)$ disebut submodul singuler M apabila $Z(M) = \{x \in M | xI = 0, \text{untuk suatu } I \text{ ideal esensial } R\}$ dengan R ring komutatif dan M modul-R. Hasil penelitian ini menjelaskan tentang karakteristik dari graf total suatu modul berdasarkan submodul singuler.
Kata Kunci : Graf total, modul, submodul singuler, ring komutatif, berhubungan langsung.

Abstract

Total graph of a module is an undirected graph with all elements in module M as the vertices, and let $x, y \in M$ are two different vertices called adjacent if and only if $x + y \in Z(M)$. Total graph $T(\Gamma(M))$ of a module M with respect to singular submodule $Z(M)$ was introduced by J. Goswami, K.K Rajkhowa, and H.K. Saikia. $Z(M)$ is called singular submodule of M if $Z(M) = \{x \in M | xI = 0,$ for some essential ideal I in $R\}$, with R is commutative ring and M is R-module. The results of this study describes about the characteristics of total graph of a module with respect to singular submodule.
Keyword : Total graph, module, singular submodule, commutative ring, adjacent.

PENDAHULUAN

Bermula dari Istvan Beck, tahun 1988, yang ingin mengembangkan cabang ilmu matematika yaitu teori graf dan teori ring komutatif, kemudian banyak peneliti yang memakai konsep graf dengan struktur aljabar tersebut.

Pembahasan tentang graf total suatu modul baru-baru ini dipelajari. Graf total suatu modul adalah graf tak berarah dengan semua elemen modul M sebagai titik. Dalam jurnal ini akan membahas tentang graf total $T(\Gamma(M))$ suatu modul M berdasarkan submodul singuler $Z(M)$, yang telah diperkenalkan oleh J. Goswami, K.K Rajkhowa dan H.K. Saikia. $Z(M)$ disebut submodul singuler M apabila $Z(M) = \{x \in M | xI = 0, \text{untuk suatu } I \text{ ideal esensial } R\}$, dengan R ring komutatif dan M modul-R. Lebih lanjutnya, pada jurnal ini akan membahas tentang karakteristik dari graf total suatu modul berdasarkan submodul singuler.

LANDASAN TEORI

A. Teori Grup

Definisi 2.1 (Grup)

Suatu grup merupakan pasangan terurut $(G,*)$ dimana G merupakan himpunan tak-kosong dan $*$ merupakan operasi biner pada G yang memenuhi aksioma berikut:

1. $\forall\, x, y \in G, x * y \in G$. (tertutup)
2. $\forall\, x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z$. (asosiatif)
3. , $\forall\, x \in G, \exists\, e \in G \ni x * e = e * x = x$. (identitas)
4. $\forall\, x \in G, \exists\, x^{-1} \in G \ni x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. (invers)

(Herstein, 1995)

Definisi 2.2 (Grup Abelian)
Grup $(G,*)$ dikatakan abelian (komutatif), jika $\forall\, x, y \in G, x * y = y * x$.

(Herstein, 1995)

Definisi 2.3 (Subgrup)
Misalkan $(G,*)$ grup. Himpunan tak-kosong H disebut subgrup G, jika H membentuk grup dengan operasi yang sama di G.

(Herstein, 1995)

Definisi 2.4 (Koset)
Misalkan $(G,*)$ grup dan H subgrup G. Untuk semua $a \in G$, himpunan $H * a = \{h * a \mid h \in H\}$ disebut

koset kanan H di G dan himpunan $a * H = \{a * h \mid h \in H\}$ disebut koset kiri H di G.

(Gallian, 2010)

Teorema 2.3

Misalkan $(G,*)$ grup, H subgrup G dan misalkan $a, b \in G$. Maka,

(1) $a \in a * H$,

(2) $a * H = H$ jika dan hanya jika $a \in H$,

(3) $a * H = b * H$ jika dan hanya jika $a \in b * H$,

(Gallian, 2010)

Teorema 2.2

Misalkan $(G,*)$ grup dan H subgrup G. Untuk sebarang koset kanan atau koset kiri subgrup H dari G berlaku salah satu sifat, yaitu keduanya sama atau saling lepas.

(Gallian, 2010)

Bukti:

Misalkan $(G,*)$ grup dan H subgrup G,
dan $a * H, b * H$ koset kiri dari H, $\forall a, b \in G$.
Jika ada $c \in a * H \cap b * H$, maka $a * H \cap b * H \neq \emptyset$.
Berdasarkan Teorema 2.1 (3),
diperoleh $c * H = a * H$ dan $c * H = b * H$.
Sehingga didapat $a * H \cap b * H \neq \emptyset$,
maka $a * H = b * H$.
Jika $a * H \neq b * H$, maka $a * H \cap b * H = \emptyset$.
Apabila $H * a = H * b$ koset kanan dari H, $\forall a, b \in G$,
jika ada $c \in H * a \cap H * b$, maka $H * a \cap H * b \neq \emptyset$.
Berdasarkan Teorema 2.1 (3),
diperoleh $H * c = H * a$ dan $H * c = H * b$.
Sehingga didapat $H * a \cap H * b \neq \emptyset$, maka $H * a = H * b$.
Jika $H * a \neq H * b$, maka $H * a \cap H * b = \emptyset$. ■

Definisi 2.5 (Subgrup Normal)

Misalkan $(G,*)$ grup dan H subgrup G. Subgrup H dari grup G disebut subgrup normal jika dan hanya jika setiap koset kanan sama dengan koset kiri.

(Gallian, 2010)

Definisi 2.6 (Grup Faktor)

Misalkan $(G,*)$ grup dan H subgrup normal G. Himpunan semua koset kanan atau koset kiri H di G adalah grup dengan operasi yang sama di G, disebut grup faktor G oleh H $(G/H,*)$.

(Gallian, 2010)

B. Teori Ring

Definisi 2.7 (Ring)

Himpunan tak-kosong R dilengkapi dengan dua operasi biner, penjumlahan (dinotasikan dengan $+$) dan perkalian (dinotasikan dengan $\cdot$) membentuk ring jika memenuhi aksioma berikut:

1. $\forall x, y \in R; x + y \in R$.
2. $\forall x, y \in R; x + y = y + x$.
3. $\forall x, y, z \in R (x + y) + z = x + (y + z)$.
4. $\forall x \in R; \exists\, e \in R \ni x + e = e + x = x$.
5. $\forall\, x \in G, \exists\, x^{-1} \in G \ni x + x^{-1} = x^{-1} + x = e$.
6. $\forall x, y \in R; x \cdot y \in R$.
7. $\forall x, y, z \in R (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
8. $\forall x, y, z \in R; x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, dan $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$.

(Herstein, 1995)

Definisi 2.8 (Ring Komutatif)

Misalkan $(R, +, \cdot)$ ring. Ring R dikatakan ring komutatif jika, $\forall x, y \in R; xy = yx$.

(Herstein, 1995)

Definisi 2.9 (Ideal Ring)

Misalkan R ring. Subhimpunan tak-kosong A dari R merupakan ideal R jika dan hanya jika :

1. $a + b \in A; \forall a, b \in A$.
2. $-a \in A, \forall a \in A$.
3. $ab \in A, \forall a, b \in A$.
4. $ra \in A$ dan $ar \in A; \forall a \in A, r \in R$.

(Gallian, 2010)

Definisi 2.10 (Modul Ring)

Misalkan R sebarang ring. Himpunan tak-kosong M disebut modul- R (modul atas R) jika M adalah grup abelian dengan operasi +, sehingga $\forall\, r \in R$ dan $m \in M$ ada elemen $rm \in M$ memenuhi aksioma berikut:

1. $r(x + y) = rx + ry$;
2. $r(sx) = (rs)x$;
3. $(r + s)x = rx + sx$.

$\forall\, r, s \in R$ dan $\forall\, x, y \in M$

(Herstein,1976)

Definisi 2.11 (Hasil Kali Langsung Suatu Modul)

Misalkan R sebarang ring dan M_1, M_2 modul-R. Modul hasil kali langsung $M_1 \times M_2 = \{(a, b) | a \in M_1$ dan $b \in M_2\}$ dengan operasi $+$, jika $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

(Herstein,1976)

C. Teori Graf

Definisi 2.12 (Graf)

Sebuah graf G terdiri atas himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ disebut himpunan titik G dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ disebut himpunan sisi G. Banyaknya elemen pada $V(G)$ dan $E(G)$ berturut-turut dinyatakan dengan $|V(G)|$ dan $|E(G)|$.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.13 (Graf Sederhana)

Misalkan G graf. Graf G disebut graf sederhana jika graf G tidak memiliki sisi rangkap dan gelung (loop). Sisi rangkap adalah terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik pada suatu graf, sedangkan gelung (loop) adalah sebuah sisi graf yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.14 (Graf Komplit)

Sebuah graf komplit dengan α titik, dilambangkan dengan K^{α}, adalah graf sederhana dengan α titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.15 (Dua Titik yang Berhubungan Langsung)

Misalkan G graf. Titik u, v adalah dua titik di G dan $e = uv$ merupakan suatu sisi di G. Titik u, v dikatakan berhubungan langsung jika sisi e menghubungkan titik u dan v.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.16 (Graf Bipartit)
Misalkan G graf. Graf G disebut graf bipartit, apabila himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian α dan β sehingga semua sisi G menghubungkan satu titik di α dan satu titik di β, (α, β) adalah bipartit dari G.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.17 (Graf Bipartit Komplit)
Misalkan G graf sederhana dan graf bipartit dengan bipartit (α, β). Graf G disebut graf bipartit komplit jika semua titik di α berhubungan langsung dengan semua titik di β, dinotasikan dengan $K^{\alpha,\beta}$.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.18 (Subgraf)
Misalkan G graf dan graf H adalah subgraf dari graf G, dituliskan $H \subset G$, jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$. Graf H disebut subgraf rentang dari G, Jika $H \subset G$ dan $V(H) = V(G)$. Untuk sebarang himpunan titik S di G, subgraf dari G yang terinduksi (dibangun) oleh S, merupakan subgraf dari G dengan himpunan S adalah himpunan titiknya dan setiap sisi dari G adalah himpunan sisinya.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.19 (Lintasan)
Misalkan G graf. Lintasan di G adalah jalan yang semua titik dan sisinya berbeda. Jalan pada graf G adalah suatu barisan berhingga yang tak-kosong $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian merupakan titik dan sisi, sehingga v_{i-1} dan v_i merupakan titik-titik akhir sisi e_i, untuk $1 \leq i \leq k$. Jalan W mempunyai panjang k yang ditunjukkan oleh banyaknya sisi di W.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.20 (Sikel)
Misalkan G graf. Barisan $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_{k-1}, v_{k-1}, \ldots, e_k, v_0)$ adalah sebuah jejak tutup di G, disebut sikel apabila titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Disebut jejak, jika $e_i \neq e_j$, untuk setiap $i, j \in \mathbb{N}$ dan $i \neq j$. Jejak yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut jejak tutup.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.21 (Graf Hamilton)
Misalkan G graf. Graf G yang memuat sikel Hamilton dinamakan graf Hamilton. Sikel Hamilton adalah sikel yang memuat semua titik di G.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.22 (Graf Isomorfik)
Dua graf M dan N disebut isomorfik, apabila terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan titik, banyak sisi yang menghubungkan titik u, v di M, sama dengan banyak sisi yang menghubungkan dua titik di N yang berkorespondensi dengan titik u, v.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.23 (Derajat Graf)
Misalkan G graf. Titik v di G disebut derajat titik v, dituliskan $deg(v)$, yaitu banyak sisi G yang terkait di v.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.24 (Konektivitas Graf)
Misalkan G graf. Konektivitas graf G, dinotasikan $\kappa(G)$, adalah minimum banyak titik G yang dihapus supaya graf yang baru merupakan graf tak-terhubung.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.25 (Diameter Graf)
Misalkan u, v merupakan dua titik berbeda di graf G. Maksimum eksentrisitas dari G disebut diameter G, dituliskan $diam(G)$. Eksentrisitas pada titik v adalah panjang maksimum lintasan terpendek dari u ke v, $\forall\, u \in G$.

(Harary, 1969)

PEMBAHASAN

Definisi 3.1
Misalkan R ring komutatif. Elemen $x \in R, x \neq 0$ dikatakan pembagi nol R jika $\exists\, y \in R, y \neq 0$ sedemikian hingga $xy = 0$. Himpunan semua pembagi nol dari R dituliskan $Z(R)$.

(Goswami, 2016)

Definisi 3.2
Misalkan R ring komutatif. Ideal R adalah ideal esensial I, jika irisannya dengan sebarang ideal tak-nol R adalah himpunan dengan suatu elemennya tak-nol.

(Goswami, 2016)

Definisi 3.3
Misalkan R ring komutatif dan M adalah modul-R. $Z(M) = \{x \in M | xI = 0, \text{untuk suatu } I \text{ ideal esensial } R\}$, disebut submodul singuler M.

(Goswami, 2016)

Lemma 3.1
Misalkan R ring komutatif, M adalah modul-R dan S ideal tak-nol di R. Himpunan $Z(M)$ dalam Definisi 3.3 adalah submodul di M.

Definisi 3.4
Misalkan M dan N modul-R. Pemetaan $f: M \to N$ disebut homomorfisme modul jika memenuhi aksioma sebagai berikut, $\forall\, x, y \in M$ dan $r \in R$:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(rx) = rf(x)$.

(Goswami, 2016)

Definisi 3.5
Jika f homomorfisme modul dan injektif (satu-satu), maka f disebut monomorfisme modul. Jika f homomorfisme modul dan bijektif (injektif dan surjektif), maka f disebut isomorfisme modul.

(Goswami, 2016)

Definisi 3.6
Graf total $T(\Gamma(M))$ adalah graf tak berarah dengan semua elemen M sebagai titik. Misalkan $x, y \in M$ dua titik yang berbeda, titik$x$ dan y dikatakan berhubungan langsung (dituliskan, $x\ adj\ y$) jika dan hanya jika $x + y \in Z(M)$.

(Goswami, 2016)

Definisi 3.7
Subgraf terinduksi di $T\big(\Gamma(M)\big)$ dengan titik-titik $Z(M)$ adalah $Z\big(\Gamma(M)\big)$, dan subgraf terinduksi di $T\big(\Gamma(M)\big)$ dengan titik-titik $\overline{Z}(M) = M - Z(M)$ adalah $\overline{Z}\big(\Gamma(M)\big)$.

(Goswami, 2016)

Lemma 3.2
Misalkan M_1 dan M_2 modul- R. Pemetaan $f: M_1 \to M_2$ monomorfisme modul. Jika $x\ adj\ y$, maka
$f(x)\ adj\ f(y), \forall\ x, y \in M_1$.

(Goswami, 2016)

Bukti :
Misalkan $x\ adj\ y$, sehingga $x + y \in Z(M_1)$.
Maka ada ideal esensial I dari R sehingga $(x + y)I = 0$.
Berdasarkan homomorfisma modul, diperoleh,

$$\begin{aligned} f\big((x+y)a\big) &= f(x+y)a, \forall\ a \in I \\ &= \big(f(x) + f(y)\big)a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan injektif, karena $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$.
Diperoleh $f(x) + f(y) \in Z(M_2)$.
Jadi, $f(x)\ adj\ f(y)$. ■

Teorema 3.1
Misalkan M_1 dan M_2 modul- R. Pemetaan $f: M_1 \to M_2$ monomorfisme modul. Jika graf $T\big(\Gamma(M_1)\big)$ komplit, maka $T\left(\Gamma\big(f(M_1)\big)\right)$ juga komplit.

(Goswami, 2016)

Bukti:
Misalkan $T\big(\Gamma(M_1)\big)$ graf komplit.
Untuk menunjukkan bahwa $T\left(\Gamma\big(f(M_1)\big)\right)$ juga merupakan graf komplit, diasumsikan $u, v \in f(M_1)$.
Sehingga $u = f(x)$ dan $v = f(y)$, untuk suatu x dan y di M_1.
Karena $T\big(\Gamma(M_1)\big)$ adalah graf komplit, maka $x\ adj\ y$.
Berdasarkan lemma 3.2 diperoleh bahwa $f(x)\ adj\ f(y)$.
Maka $u\ adj\ v$.
Jadi, $T\left(\Gamma\big(f(M_1)\big)\right)$ graf komplit. ■

Teorema 3.2
Misalkan M_1 dan M_2 modul- R. Pemetaan $f: M_1 \to M_2$ isomorfisme modul. Maka f juga merupakan isomorfisme dari $T\big(\Gamma(M_1)\big)$ ke $T\big(\Gamma(M_2)\big)$.

(Goswami, 2016)

Bukti:
Diasumsikan bahwa $x\ adj\ y, \forall\ x, y \in M_1$.
Berdasarkan lemma 3.2 diperoleh $f(x)\ adj\ f(y)$.
Dengan $f(x), f(y) \in M_2$.
Jadi, dari $T\big(\Gamma(M_1)\big)$ ke $T\big(\Gamma(M_2)\big)$, f merupakan isomorfisme graf. ■

Teorema 3.3
Untuk setiap $x, y \in \overline{Z}(M)$, $x\ adj\ y$ jika dan hanya jika setiap elemen $x + Z(M)$ berhubungan langsung dengan setiap elemen $y + Z(M)$.

(Goswami, 2016)

Bukti:
Misalkan $a_1, a_2 \in Z(M)$, maka,
$k = x + a_1 \in x + Z(M)$
$l = y + a_2 \in y + Z(M)$
Jika $x\ adj\ y$, maka $x + y \in Z(M)$.
Sehingga diperoleh,
$(a + b) = (x + y) + (a_1 + a_2)$
Karena $Z(M)$ submodul M, maka $a + b \in Z(M)$.
Diperoleh $a\ adj\ b$.
Sebaliknya,
Jika $a\ adj\ b$, maka $a + b \in Z(M)$.
Didapat $(x + a_1) + (y + a_2) \in Z(M)$.
Oleh karena itu $x + y \in Z(M)$.
Jadi, terbukti bahwa $x\ adj\ y$. ■

Lemma 3.3
Misalkan N submodul di M. Maka $Z(N) \subseteq Z(M)$.

Teorema 3.4

(1) $Z\big(\Gamma(M)\big)$ adalah subgraf komplit (terinduksi) dari $T\big(\Gamma(M)\big)$ dan $Z\big(\Gamma(M)\big)$ saling lepas $\overline{Z}\big(\Gamma(M)\big)$.
(2) Jika N adalah submodul di M, maka $T\big(\Gamma(N)\big)$ adalah subgraf (terinduksi) di $T\big(\Gamma(M)\big)$.

(Goswami, 2016)

Teorema 3.5

(1) Asumsikan bahwa G adalah subgraf terinduksi di $\overline{Z}(\Gamma(M))$ dan misalkan x dan y adalah dua titik berbeda yang dihubungkan oleh lintasan di G. Maka x berhubungan langsung y ($x\ adj\ y$) atau ada lintasan dengan panjang 2 antara x dan y. Khususnya, jika $\overline{Z}(\Gamma(M))$ terhubung, maka $diam\left(\overline{Z}\big(\Gamma(M)\big)\right) \leq 2$.
(2) Misalkan x dan y dua elemen berbeda di $\overline{Z}(\Gamma(M))$ yang terhubung oleh suatu lintasan. Jika $x + y \notin Z(M)$, maka $x - (-x) - y$ dan $x - (-y) - y$ merupakan lintasan dengan panjang 2 antara x dan y di $\overline{Z}\big(\Gamma(M)\big)$.

(Goswami, 2016)

Teorema 3.6
Pernyataan berikut ini ekivalen:

(1) $\overline{Z}\big(\Gamma(M)\big)$ terhubung.
(2) $x + y \in Z(M)$ atau $x - y \in Z(M), \forall\ x, y \in \overline{Z}(M)$.
(3) $x + y \in Z(M)$ atau $x + 2y \in Z(M), \forall\ x, y \in \overline{Z}(M)$. Khususnya $2x \in Z(M)$ atau $3x \in Z(M)$ (tetapi tidak keduanya), $\forall\ x \in \overline{Z}(M)$.

(Goswami, 2016)

Bukti:

(1) ⇒ (2) Misalkan $x, y \in \overline{Z}(M)$ sehingga $x + y \notin Z(M)$.
Jika $x = y$, maka $x - y = y - y = 0 \in Z(M)$.
Sebaliknya, $x - (-y) - y$ adalah lintasan dari titik x ke y berdasarkan Teorema 3.5 (2), diperoleh $x - y \in Z(M)$.

(2) ⇒ (3) Misalkan $x, y \in \overline{Z}(M)$, dan andaikan $x + y \notin Z(M)$.
Berdasarkan asumsi, karena $(x + y) - y = x \notin Z(M)$,
disimpulkan bahwa $x + 2y = (x + y) + y \in Z(M)$.
Jika $x \in \overline{Z}(M)$, maka $2x \in Z(M)$ atau $3x \in Z(M)$, tetapi $2x$ dan $3x$ tidak bersama-sama ada di $Z(M)$, karena $x = 3x - 2x \in Z(M)$, kontradiksi.

(3) ⇒ (1) Misalkan $x, y \in \overline{Z}(M)$ elemen berbeda di M sehingga $x + y \notin Z(M)$.
Berdasarkan hipotesis, karena $x + 2y \in Z(M)$, diperoleh $2y \notin Z(M)$
Maka $3y \in Z(M)$
karena $x + y \notin Z(M)$ dan $3y \in Z(M)$,
disimpulkan bahwa $x \neq 2y$,
dan $x - 2y - y$ lintasan dari x ke y di $\overline{Z}(M)$, sebab $x + 2y \in Z(M)$ dan $2y + y = 3y \in Z(M)$. ■

Teorema 3.7
Misalkan $|Z(M)| = \alpha$ dan $|M/Z(M)| = \beta$.

(1) Jika $2 \in Z(R)$, maka $\overline{Z}(\Gamma(M))$ adalah gabungan saling lepas $\beta - 1$ graf komplit K^{α}.
(2) Jika $2 \notin Z(R)$, maka $\overline{Z}(\Gamma(M))$ adalah gabungan saling lepas $(\beta - 1)/2$ graf komplit $K^{\alpha,\alpha}$.

(Goswami, 2016)

Teorema 3.8
Misalkan $M - Z(M) \neq \emptyset$.

(1) Jika $\overline{Z}(\Gamma(M))$ graf komplit, maka $|M/Z(M)| = 2$ atau $|M/Z(M)| = |M| = 3$.
(2) Jika $\overline{Z}(\Gamma(M))$ graf terhubung, maka $|M/Z(M)| = 2$ atau $|M/Z(M)| = 3$.
(3) Jika $\overline{Z}(\Gamma(M))$, $(Z(\Gamma(M))$ dan $T(\Gamma(M))$ tidak terhubung total, maka $Z(M) = 0$ atau $2 \in Z(R)$).

(Goswami, 2016)

Bukti:
Misalkan $|M/Z(M)| = \beta$ dan $|Z(M)| = \alpha$

(1) Asumsikan $\overline{Z}(\Gamma(M))$ komplit.
Menyebabkan $\overline{Z}(\Gamma(M))$ merupakan K^{α} atau $K^{1,1}$ tunggal, berdasarkan Teorema 3.7.
Jika $2 \in Z(R)$, maka $\beta - 1 = 1$ berarti $\beta = 2$ dan $|M/Z(M)| = 2$.
Jika $2 \notin Z(R)$, maka $\alpha = 1$ dan $(\beta - 1)/2 = 1$.
Oleh karena itu, $Z(M) = 0$ dan $\beta = 3$.
Jadi, $3 = \beta = |M/Z(M)| = |M|$.

(2) Misalkan $\overline{Z}(\Gamma(M))$ terhubung.
Berdasarkan Teorema 3.7, menyebabkan $\overline{Z}(\Gamma(M))$ merupakan K^{α} atau $K^{\alpha,\alpha}$ tunggal.
Jika $2 \in Z(R)$, maka $\beta - 1 = 1$ berarti $\beta = 2$ dan $|M/Z(M)| = 2$.
Jika $2 \notin Z(R)$, maka $(\beta - 1)/2 = 1$ berarti $\beta = 3$ dan $|M/Z(M)| = 3$.

(3) $\overline{Z}(\Gamma(M))$ tidak terhubung total jika dan hanya jika $\overline{Z}(\Gamma(M))$ adalah gabungan saling lepas K^1.
Berdasarkan Teorema 3.7,
diperoleh $|Z(M)| = 1$ dan $|M/Z(M)| = 1$. ■

Teorema 3.9
Misalkan x titik graf $T(\Gamma(M))$. Maka,

$$deg(x) = \begin{cases} |Z(M)| - 1, & \text{jika } 2 \in Z(R) \text{ dan } x \in Z(M) \\ |Z(M)|, & \text{yang lain} \end{cases}$$

(Goswami, 2016)

Teorema 3.10
Misalkan M_1 dan M_2 modul berhingga di ring berhingga R,

(1) Jika $T(\Gamma(M_1))$ graf Hamilton, maka $T(\Gamma(M_1 \times M_2))$ graf Hamilton.
(2) Jika $\overline{Z}(\Gamma(M_1))$ graf Hamilton, maka $\overline{Z}(\Gamma(M_1 \times M_2))$ graf Hamilton.

(Goswami, 2016)

Bukti:

(i) Misalkan $M_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ dan $M_2 = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_t\}$,
sehingga rangkaian $a_1, a_2, \dots, a_s$ adalah sikel Hamilton.
Maka $a_1 + a_s \in Z(M_1)$.
Diperoleh sikel Hamilton pada $T(\Gamma(M_1 \times M_2))$ sebagai berikut,
$(a_1, a'_1), (a_2, a'_1), \dots, (a_s, a'_1), (a_1, a'_2), \dots, (a_s, a'_2), \dots, (a_s, a'_2$
$, \dots, (a_s, a'_t)$.
(ii) Misalkan $\overline{Z}(M_1) = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ dan $\overline{Z}(M_2) = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_t\}$.
Sikel Hamilton diatas juga merupakan sikel Hamilton di $\overline{Z}(\Gamma(M_1 \times M_2))$. ■

Teorema 3.11
Misalkan $M = M_1 \times M_2$ modul berhingga. Maka $\kappa\left(T(\Gamma(M))\right) \geq |M_1| + |M_2| - 4$.

(Goswami, 2016)

PENUTUP

A. Simpulan

Dapat disimpulkan bahwa karakteristik graf total suatu modul berdasarkan submodul singuler adalah sebagai berikut:

a. Misalkan R ring komutatif dan M adalah modul-R. Himpunan $Z(M)$ adalah submodul di M.
b. Misalkan M_1 dan M_2 modul-R. Pemetaan $f: M_1 \to M_2$ monomorfisme modul. Jika $x\ adj\ y$, maka $f(x)\ adj\ f(y), \forall\ x, y \in M_1$.
c. Misalkan M_1 dan M_2 modul-R. Pemetaan $f: M_1 \to M_2$ monomorfisme modul. Jika graf $T(\Gamma(M_1))$ komplit, maka $T\left(\Gamma(f(M_1))\right)$ juga komplit.
d. Misalkan M_1 dan M_2 modul-R. Pemetaan $f: M_1 \to M_2$ isomorfisme modul. Maka f juga merupakan isomorfisme dari $T(\Gamma(M_1))$ ke $T(\Gamma(M_2))$.
e. Untuk setiap $x, y \in \overline{Z}(M)$, $x\ adj\ y$ jika dan hanya jika setiap elemen $x + Z(M)$ berhubungan langsung dengan setiap elemen $y + Z(M)$.
f. Misalkan N submodul di M. Maka $Z(N) \subseteq Z(M)$.
g. Pernyataan yang memenuhi sebagai berikut:
   (1) $Z(\Gamma(M))$ adalah subgraf komplit (terinduksi) dari $T(\Gamma(M))$ dan $Z(\Gamma(M))$ saling lepas $\overline{Z}(\Gamma(M))$.
   (2) Jika N adalah submodul di M, maka $T(\Gamma(N))$ adalah subgraf (terinduksi) di $T(\Gamma(M))$.
h. Pernyataan yang memenuhi sebagai berikut:
   (1) Asumsikan bahwa G adalah subgraf terinduksi di $\overline{Z}(\Gamma(M))$ dan misalkan x dan y adalah dua titik berbeda yang dihubungkan oleh lintasan di G. Maka x berhubungan langsung y ($x\ adj\ y$) atau ada lintasan dengan panjang 2 antara x dan y. Khususnya, jika $\overline{Z}(\Gamma(M))$ terhubung, maka $diam\left(\overline{Z}(\Gamma(M))\right) \leq 2$.
   (2) Misalkan x dan y dua elemen berbeda di $\overline{Z}(\Gamma(M))$ yang terhubung oleh suatu lintasan. Jika $x + y \notin Z(M)$, maka $x - (-x) - y$ dan $x - (-y) - y$ adalah lintasan dengan panjang 2 antara x dan y di $\overline{Z}(\Gamma(M))$.
i. Pernyataan berikut ini ekivalen:
   (1) $\overline{Z}(\Gamma(M))$ terhubung.
   (2) $x + y \in Z(M)$ atau $x - y \in Z(M), \forall\ x, y \in \overline{Z}(M)$.
   (3) $x + y \in Z(M)$ atau $x + 2y \in Z(M), \forall\ x, y \in \overline{Z}(M)$. Khususnya $2x \in Z(M)$ atau $3x \in Z(M)$ (tetapi tidak keduanya) $\forall\ x \in \overline{Z}(M)$.
j. Misalkan $|Z(M)| = \alpha$ dan $|M/Z(M)| = \beta$.
   (1) Jika $2 \in Z(R)$ maka $\overline{Z}(\Gamma(M))$ adalah gabungan saling lepas $\beta - 1$ graf komplit K^{α}.
   (2) Jika $2 \notin Z(R)$ maka $\overline{Z}(\Gamma(M))$ adalah gabungan saling lepas $(\beta - 1)/2$ graf komplit $K^{\alpha,\alpha}$.
k. Misalkan $M - Z(M) \neq \emptyset$.
   (1) Jika $\overline{Z}(\Gamma(M))$ graf komplit, maka $|M/Z(M)| = 2$ atau $|M/Z(M)| = |M| = 3$.
   (2) Jika $\overline{Z}(\Gamma(M))$ graf terhubung, maka $|M/Z(M)| = 2$ atau $|M/Z(M)| = 3$.
   (3) Jika $\overline{Z}(\Gamma(M))$ ($Z(\Gamma(M))$ dan $T(\Gamma(M))$ tidak terhubung total, maka $Z(M) = 0$ atau $2 \in Z(R)$).
l. Misalkan x titik graf $T(\Gamma(M))$. Maka, $deg(x) = \begin{cases} |Z(M)| - 1, & \text{jika } 2 \in Z(R) \text{ dan } x \in Z(M) \\ |Z(M)|, & \text{yang lain} \end{cases}$
m. Misalkan M_1 dan M_2 modul berhingga di ring berhingga R,
   (1) Jika $T(\Gamma(M_1))$ graf Hamilton, maka $T(\Gamma(M_1 \times M_2))$ graf Hamilton.
   (2) Jika $\overline{Z}(\Gamma(M_1))$ graf Hamilton, maka $\overline{Z}(\Gamma(M_1 \times M_2))$ graf Hamilton.
n. Misalkan $M = M_1 \times M_2$ modul berhingga. Maka $\kappa\left(T(\Gamma(M))\right) \geq |M_1| + |M_2| - 4$.

B. Saran

Disarankan kepada pembaca untuk mengkaji lebih dalam tentang graf total suatu modul berdasarkan submodul singuler.

DAFTAR PUSTAKA

Beck, Istvan. 1988. *Coloring of Commutative Rings*. Journal of Algebra 116 (1988) 208-226.

Budayasa, I. Ketut, Ph.D. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya. University Press, Universitas Negeri Surabaya.

Gallian, J.A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra*. Seventh Edition. Duluth: University of Minnesota Duluth.

Goswami, J, Rajkhowa, K.K, dan Saikia, H.K. *Total Graph of a Module with Respect to Singular Submodule*. Arab J Math Sci 22 (2016) 242-249.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company.

Herstein, I.N. 1976. *Topics in Algebra*. Second Edition. USA: Xerox Co.

Herstein, I.N. 1995. *Abstract Algebra.* Third Edition. USA: Prentice-Hall, Inc.