

PENERAPAN METODE *RESAMPLING* UNTUK PENDUGAAN INDEKS KEMAMPUAN PROSES

I G.A. Anom Yudistira

Universitas Sahid
E-mail: anom1392@gmail.com

Abstrak: Pendugaan atas indeks kemampuan proses (C_p) yang dilakukan secara analitik memerlukan asumsi kenormalan yang mutlak harus dipenuhi, sehingga nilai dugaan dan galat baku yang diperoleh tersebut sah. Akan tetapi sering kali asumsi ini sulit untuk dipenuhi, oleh karena itu diperlukan suatu metode alternatif untuk mendapatkan nilai dugaan indeks kemampuan proses dan galat bakunya. Tujuan penulisan makalah ini untuk membandingkan hasil dugaan indeks kemampuan proses yang diperoleh secara analitik, metode *bootstrap parametrik* dan metode *bootstrap nonparametrik*. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kepustakaan. Bahasa pemrograman R digunakan untuk melakukan komputasi intensif atas berbagai metode pendugaan untuk indeks kemampuan proses. Sebagai teladan untuk mengeksekusi program tersebut, digunakan data *pistonrings* yang terpasang pada *package IQCC* sehingga diperoleh hasil numeriknya. Hasil analitik untuk pendugaan indeks kemampuan proses adalah merupakan hasil yang terbaik, tetapi didasarkan atas asumsi-asumsi yang harus dipenuhi, seperti proses atau populasi menyebar normal. Asumsi ini kadang-kadang sulit untuk dipenuhi, maka diperlukan metode alternatif untuk menduga nilai indeks C_p ini. Metode *Bootstrap Parametrik* dapat digunakan apabila bentuk sebaran proses diketahui walaupun tidak harus normal. Metode *Nonparametric* sebagai pilihan terakhir di mana pengetahuan tentang sebaran proses sama sekali tidak dapat diperoleh.

Kata kunci: indeks kemampuan proses, pengendalian kualitas, bahasa r.

Abstract. The background in this paper that, estimation of process capability indices (C_p) were done analytically require normality assumption, so the estimated values and the standard error obtained valid. However this assumption is often difficult to be met, therefore we need an alternative method to obtain the estimated value of process capability indices and standard error. This paper aims to compare the results of the process capability indices has estimate analytically, and the parametric and nonparametric bootstrap method. The method used in this study is the literature studies of relevant subject. R programming language used to perform computationally intensive on various methods of estimation for process capability index. As an example to execute the program, use the data piston rings which is part of the package IQCC order to obtain the numerical results

Key words: process capability index, statistical quality control, r programming

PENDAHULUAN

Latar belakang tulisan ini adalah bahwa kemampuan proses merupakan batas-batas di mana nilai-nilai individual karakteristik kualitas suatu produk yang dihasilkan dari suatu proses diharapkan jatuh di antaranya, dengan syarat apabila hanya keragaman acak saja yang muncul pada proses tersebut. Batas-batas antara ini dinamakan dengan batas atas toleransi alamiah dan batas bawah toleransi alamiah. Lebar selang kedua batas ini adalah sebesar 6 kali simpangan baku (6σ). Sedangkan rasio antara lebar selang kedua batas spesifikasi ($USL - LSL$) terhadap nilai kemampuan proses tersebut, dinamakan dengan indeks kemampuan proses, yang dinotasikan dengan C_p (Breyfogle III, 2003) diformulasikan sebagai berikut:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

USL : batas spesifikasi atas, dan
 LSL : batas spesifikasi bawah

Asumsi yang mendasari nilai indeks ini adalah: (1) proses tersebut stabil dan (2) proses merupakan populasi normal. Biasanya didalam praktek, nilai C_p ini diperoleh dari suatu sampel, sehingga nilai dugaan untuk C_p dinotasikan dengan \hat{C}_p , sehingga serupa dengan persamaan (1), indeks kemampuan proses dugaan, ditulis sebagai berikut:

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}}$$

Jika perhitungan indeks ini diperoleh dari data sampel bagan kendali, maka asumsi nomor 1) dapat dijamin terpenuhi, yang menjadi masalah adalah apakah sampel dijamin berasal dari populasi dengan sebaran normal. Permasalahan dalam tulisan ini meliputi: (1) apakah teknik-teknik resampling cukup baik untuk digunakan dalam menduga indeks kemampuan proses? dan

(2) bagaimanakah hasil pendugaan titik dan selangnya?

Tujuan tulisan ini untuk: (1) memberikan suatu teknik alternatif dalam menduga indeks kemampuan proses, khususnya bila asumsi kenormalan tidak terpenuhi, (2) mengeksplorasi kemampuan bahasa R, khususnya untuk membantu dalam komputasi teknik-teknik resampling. Teknik resampling membutuhkan bantuan intensif komputer dalam komputasinya. Versi R yang digunakan adalah R 3.1.2 dibawah sistem operasi Microsoft Windows XP. Kemampuan komputasinya dicoba secara langsung, menggunakan Laptop Intel Core 2 Duo CPU T5750 dan 0.99 GB RAM.

Metode yang digunakan dalam tulisan ini adalah metode kepustakaan, dengan pendekatan deskriptif dan eksploratif.

PEMBAHASAN

Simulasi Statistik Sampling

Duckworth, at al, (2001) menyebutkan bahwa, apabila θ adalah suatu parameter yang akan diduga dengan statistik $\hat{\theta}$, maka secara teori dapat diperoleh jawaban atas pertanyaan-pertanyaan mengenai galat baku (*standard error*) dan sebaran dari statistik $\hat{\theta}$ atau paling tidak sebaran dari

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\widehat{se}(\hat{\theta})}$$

yang mana $\widehat{se}(\hat{\theta})$ adalah penduga galat baku statistik $\hat{\theta}$. Tidak seperti halnya kalau $\hat{\theta}$ adalah rata-rata sampel (\bar{x}), yang mana galat baku dugaanya sudah dikenal yaitu $\frac{s}{\sqrt{n}}$, tidak selamanya galat baku ini mudah untuk diperoleh, seperti \widehat{C}_p . Dalam situasi seperti ini simulasi dapat dimanfaatkan untuk memahami berbagai masalah mengenai dugaan suatu parameter.

Pada tulisan ini digunakan bahasa R untuk melakukan simulasi terhadap statistik \widehat{C}_p . Algoritma untuk simulasi ini sebagai berikut:

1. Proses inisialisasi dengan menentukan ukuran sampel (n), banyaknya sub grup (k), batas spesifikasi atas (USL), dan batas spesifikasi bawah (LSL);
2. Simulasi diawali dengan membangkitkan data dari

sebaran normal dengan rata-rata 74 dan simpangan baku 0.0096, sebanyak n unit, dan diulangi sebanyak nk kali. Angka 74 dan 0.0096 ini hanyalah untuk contoh perhitungan.

3. Hitung \bar{R} , yang diperoleh dari bagan kendali R ;
4. Simpangan baku dugaan dihitung sebagai berikut:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

5. Hitung indeks kemampuan proses dugaan:

$$\widehat{C}_p = \frac{(USL - LSL)}{6\hat{\sigma}}$$

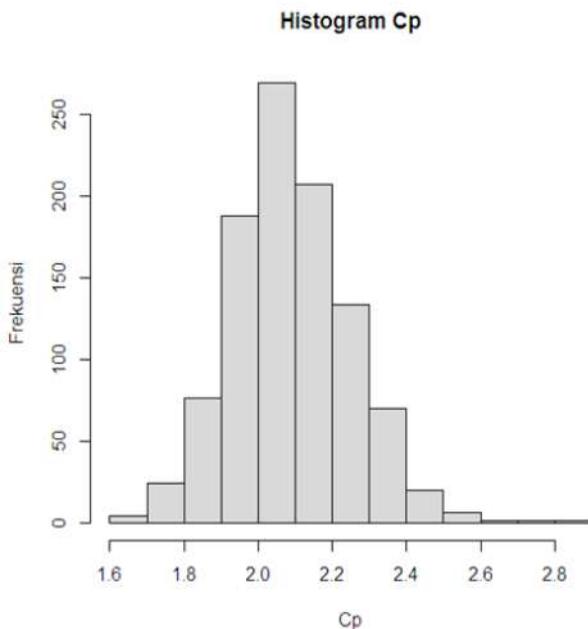
6. Ulangi langkah 2 sampai 5 sebanyak 999 kali dan akumuliskan seluruhnya, sehingga diperoleh 1000 nilai \widehat{C}_p

7. Gambar histogramnya, hitung rata-rata dan simpangan baku dari statistik \widehat{C}_p .

8. Koding dalam bahasa R adalah sebagai berikut:

```
# Proses Inisialisasi#
library(IQCC) #memanggil package IQCC
n=5; k=25 # ukuran sampel ada sebanyak 5 dan sub grup 25
USL=74.06; LSL=73.94
x <- replicate(125, rnorm(n, mean=74, sd=0.009785338))
data <- matrix(x, nrow=k, ncol=n)
ra <- qcc(data, type="R", plot=FALSE)
Rbar <- mean(ra$statistics)
SD <- Rbar/d2(n)
Cp <- (USL - LSL)/(6*SD)
# Proses pengulangan #
for (i in 1:999){
  x <- replicate(125, rnorm(n, mean=74, sd=0.009785338))
  data <- matrix(x, nrow=k, ncol=n)
  ra <- qcc(data, type="R", plot=FALSE)
  Rbar <- mean(ra$statistics)
  SD <- Rbar/d2(n)
  Cp <- c(Cp, (USL - LSL)/(6*SD))
}
hist(Cp) #menampilkan histogram
mean(Cp) #nilai Cp dugaan
sd(Cp) #menghitung galat error
```

Hasil simulasi memberikan nilai statistik $\widehat{C}_p = 2.088703$, yang merupakan rata-rata dari sebaran \widehat{C}_p ($E(\widehat{C}_p)$ yang diduga oleh rata-rata 1000 nilai \widehat{C}_p hasil simulasi). Serupa dengan itu galat baku \widehat{C}_p diperoleh dari simpangan baku nilai \widehat{C}_p hasil 1000 kali simulasinya, yang mana nilainya adalah 0.160058. Kemungkinan besar jika program di atas dicoba ulang nilai simulasinya akan berbeda sedikit. Gambar 1 memperagakan histogram untuk statistik \widehat{C}_p yang diperoleh dari simulasi. Histogram ini digunakan untuk menggambarkan sebaran dari statistik \widehat{C}_p .



Gambar 1. Histogram statistik Hasil Simulasi

Duckworth, at al, (2001) memberikan teknik simulasi statistik sampel untuk mendapatkan selang kepercayaan $(1-\alpha)$ untuk suatu parameter. Teknik yang sama akan dicoba untuk menduga selang kepercayaan bagi indeks kemampuan proses Cp . Hasil sebaran simulasi untuk $\hat{\theta}$ digunakan untuk mendapatkan selang kepercayaan untuk nilai θ , yaitu:

$$\left[\hat{\theta} \frac{a}{2}, \hat{\theta} \left(1 - \frac{a}{2} \right) \right]$$

yang mana $\hat{\theta} \frac{a}{2}$ adalah persentil ke $(\frac{a}{2} \times 100)$ dari sebaran $\hat{\theta}$ yang tersimulasi. Jadi selang kepercayaan 95% ($\alpha = 0.05$) bagi parameter Cp berdasarkan hasil simulasi sebelumnya, diperoleh dengan bantuan R sebagai berikut:

```
quantile(Cp, c(0.025, 0.975))
2.5% 97.5%
1.789221 2.413217
```

Secara analitik nilai parameter Cp diperoleh sebagai berikut: $Cp = \frac{(USL-LSL)}{6 \times 0.0096}$, yang mana nilainya ada di dalam selang [1.789, 2.413].

Pada kasus simulasi statistik sampling ini, sebaran dan parameternya telah diketahui yang mana dalam kasus ini setiap sub grup diperoleh dari sampel yang berasal dari sebaran Normal dengan rata-rata 74 dan simpangan baku 0.0096, tetapi sebaran dan simpangan baku dari

statistik sama sekali tidak diketahui. Secara praktek hal seperti ini tidaklah mungkin terjadi, tetapi proses teoritisnya (idenya) berguna untuk pembahasan selanjutnya.

Metode *Bootstrap* Parametrik

Bootstrap merupakan suatu metode umum untuk mendapatkan keragaman dan sebaran dari statistik dan mendapatkan batas-batas selang kepercayaan bagi θ , sedangkan nilai (-nilai) parameter sebaran dari populasinya ini sama sekali tidak diketahui. Metode *Bootstrap Parametric* mengasumsikan sebaran populasi diketahui.

Oleh karena itu ide simulasi statistik sampling, dapat diterapkan dengan sedikit perbedaan. Parameter-parameter sebaran dapat diduga melalui teknik pendugaan parameter, yang kemudian nilai dugaan ini digunakan untuk melakukan simulasi terhadap statistik θ (Duckworth, at al. 2001). Pada tulisan ini statistik yang akan diduga adalah \hat{Cp} .

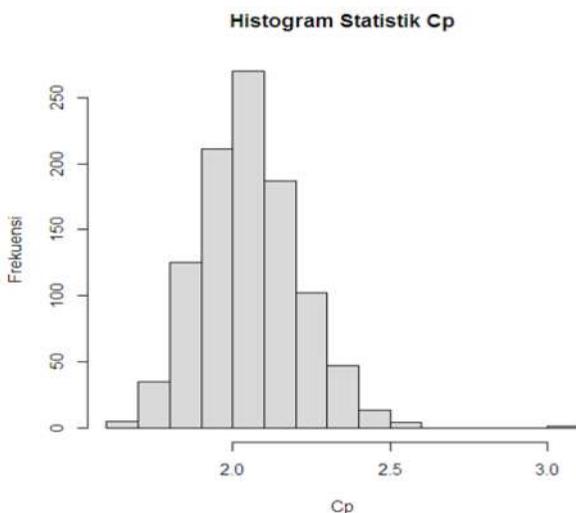
Algoritma metode *Bootstrap Parametrik* untuk menduga statistik \hat{Cp} adalah sebagai berikut:

1. Ambil sekuens sampel dari suatu proses dengan ukuran sampel n dan sub grup k .
2. Buatlah bagan kendali \bar{x} dan hitung nilai $\bar{\bar{x}}$ untuk menduga rata-rata proses.
3. Buatlah bagan kendali R dan hitung \bar{R} , yang digunakan untuk menduga simpangan baku proses dalam kondisi stabil, yaitu $\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2}$.
4. Lakukan simulasi dengan membangkitkan data dari sebaran normal dengan rata-rata $\bar{\bar{x}}$ dan simpangan baku $\hat{\sigma}$, sebanyak n unit, dan diulangi sebanyak nk kali.
5. Gunakan data simulasi tersebut untuk menghitung \bar{R} , yang diperoleh dari bagan kendali R yang tersimulasi.
6. Hitung simpangan baku dugaan tersimulasi dengan formula $\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2}$.
7. Hitung indeks kemampuan proses dugaan tersimulasi dengan formula $\hat{Cp} = \frac{(USL-LSL)}{6 \hat{\sigma}}$.
8. Ulangi langkah 2 sampai 7 sebanyak 999 kali dan akumulasikan seluruhnya, sehingga diperoleh 1000 nilai \hat{Cp} .
9. Gambar histogramnya, hitung rata-rata dan simpangan baku dari statistik \hat{Cp} .

Kodingnya dalam bahasa R adalah sebagai berikut:

```
# inialisasi #
library(IQCC)
n=5; k=25
USL=74.06; LSL=73.94
# pendugaan simpangan baku proses #
data(pistonrings)
rang <- qcc(pistonrings[1:k,], type="R", plot=FALSE)
(Rbar <- mean(rang$statistics))
(SD <- Rbar/d2(n))
# pendugaan rata-rata proses #
Stat <- qcc(pistonrings[1:k,], type="xbar", plot=FALSE)
(rata <- mean(stat$statistics))
# simulasi untuk menduga statistik, berdasarkan #
# rata-rata dugaan dan simpangan baku dugaan #
# yang telah diperoleh sebelumnya #
x <- replicate(n*k, rnorm(n, mean=rata, sd=SD))
data <- matrix(x, nrow=k, ncol=n)
rang <- qcc(data, type="R", plot=FALSE)
Rbar <- mean(rang$statistics)
SD1 <- Rbar/d2(n)
Cp <- (USL - LSL)/(6*SD1)
# pengulangan simulasi #
for (i in 1:999){
  x <- replicate(n*k, rnorm(n, mean=rata, sd=SD))
  data <- matrix(x, nrow=k, ncol=n)
  range <- qcc(data, type="R", plot=FALSE)
  Rbar <- mean(range$statistics)
  SD1 <- Rbar/d2(n)
  Cp <- c(Cp, (USL - LSL)/(6*SD1))
}
hist(Cp)
mean(Cp)
sd(Cp)
```

Sampel yang digunakan pada koding di atas adalah data pistonrings untuk 25 sub grup pertama. Data ini terpasang pada *package* IQCC, yang mengukur diameter dalam dari ring piston yang diproduksi melalui proses penempaan. Data ini semata-mata hanya digunakan untuk mendeskripsikan metode *Bootstrap Parametrik*. Histogram yang disajikan oleh Gambar 2 di bawah ini menggambarkan sebaran statistik \hat{C}_p .



Gambar 2. Hitogram Statistik Hasil Simulasi dengan Metode *Bootstrap Parametrik*.

Pada gambar histogram di atas terdeteksi adanya pencilan, sehingga untuk menduga nilai C_p dilakukan dengan rata-rata terpotong, perintah R untuk mendapatkan rata-rata tersebut adalah

```
mean(Cp, trim=0.05)
[1] 2.049486
```

Jadi dari hasil simulasi ini diperoleh \hat{C}_p , dan bandingkan hasilnya bila di cari secara analitik, melalui perintah R adalah sebagai berikut,

```
pc <- process.capability(stat, spec.limits=c(LSL, USL))
pc$indices[1,1]
[1] 2.043937
```

Perbandingan hasil simulasi dan hasil analitik nampaknya tidak berbeda jauh, tetapi hasil analitik tidak memberikan nilai galat baku ($\hat{S}_e(\hat{C}_p)$). Simulasi dengan metode *Bootstrap Parametrik* ini mendapatkan statistik galat baku untuk \hat{C}_p dengan menghitung simpangan baku dari nilai-nilai \hat{C}_p tersimulasi. Hasil dari R adalah sebagai berikut:

```
sd(Cp)
[1] 0.1559803
```

Jadi dugaan galat baku untuk \hat{C}_p adalah 0.156. Selang kepercayaan 95% bagi C_p adalah sebagai berikut:

```
quantile(Cp, c(0.025, 0.975))
2.5% 97.5%
1.783089 2.375689
```

Jadi selang kepercayaan 95% untuk C_p adalah [1.783, 2.376], sedangkan perhitungan secara analitik mendapatkan dugaan selang kepercayaan 95% adalah sebagai berikut,

```
pc$indices[1,c(2,3)]
2.5% 97.5%
1.789693 2.297792
```

Batas atas dan batas bawah selang dengan kedua pendekatan tersebut, memberikan hasil yang tidak jauh berbeda. Hasil secara analitik didasari oleh asumsi kenormalan, sedangkan metode *Bootstrap Parametrik* tidak bersandar pada asumsi ini, apapun sebaran populasinya asalkan diketahui atau dapat diduga secara meyakinkan, maka metode ini dapat digunakan tanpa tergantung pada asumsi kenormalan tersebut.

Metode Bootstrap Non-parametrik

Sebagaimana telah disebutkan sebelumnya bahwa metode *Bootstrap Parametrik* mengasumsikan bahwa sebaran populasi telah diketahui. Metode *Bootstrap*

Nonparametrik selangkah lebih jauh, yaitu metode ini tidak membutuhkan pengetahuan yang lengkap mengenai populasi asal dari mana sampel diambil. Metode *Bootstrap Nonparametrik* hanya membutuhkan sebuah sampel tunggal yang mewakili populasi (proses) yang menjadi kajian. Hanya atas dasar sampel tunggal inilah akan dicari galat baku dan selang kepercayaan dari suatu statistik $\hat{\theta}$ (Duckworth, at al.2001). Sebagaimana sebelumnya pada tulisan ini statistik yang akan diduga adalah indeks kemampuan proses \hat{C}_p . Galat baku dari statistik ini diperoleh melalui simulasi dengan menggunakan sampel *bootstrap*, yaitu mengambil sampel sebanyak n unit dari sampel yang telah ada dengan cara pemulihan (*with replacement*) dan dilakukan berulang kali.

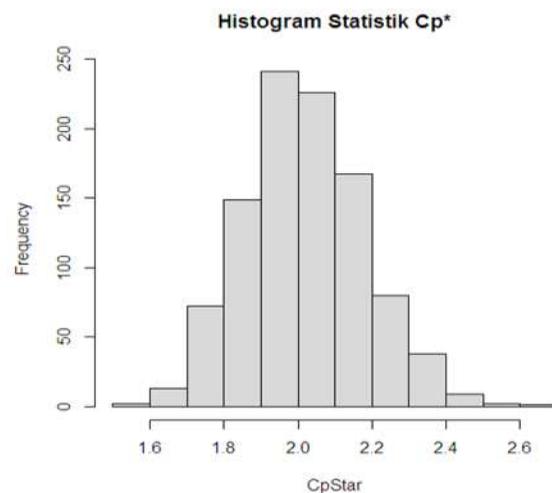
Algoritma metode *Bootstrap Nonparametrik* untuk menduga statistik \hat{C}_p adalah sebagai berikut:

1. Ambil sekuens sampel dari suatu proses dengan ukuran sampel n dan sub grup k ;
2. Buatlah bagan kendali R dan hitung \bar{R} , yang digunakan untuk menduga simpangan baku proses dalam kondisi stabil, yaitu $\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2}$;
3. Hitung indeks kemampuan proses dari sampel ini dengan formula $\hat{C}_p = \frac{(USL-LSL)}{6\hat{\sigma}}$
4. Bangkitkan sampel *bootstrap* sebanyak n unit dari sampel asli yang diperoleh pada langkah (1) dengan sampling pemulihan (*with replacement*), dan diulangi sebanyak $n \times k$ kali;
5. Gunakan data bangkitan tersebut untuk menghitung \bar{R}^* , yang diperoleh dengan sebelumnya membuat bagan kendali R dari data bangkitan itu;
6. Hitung simpangan baku dugaan dengan formula $\hat{\sigma}^* = \frac{R^*}{d_2}$;
7. Hitung indeks kemampuan proses dugaan tersimulasi dengan formula $\hat{C}_p^* = \frac{(USL-LSL)}{6\hat{\sigma}^*}$
8. Ulangi langkah 4 sampai 7 sebanyak 999 kali dan akumulasikan seluruhnya, yaitu dengan hasil yang diperoleh pada langkah (3) sehingga diperoleh 1000 nilai \hat{C}_p^*
9. Buatlah grafik histogramnya, kemudian hitung rata-rata dan simpangan baku dari statistik \hat{C}_p

Berdasarkan algoritma tersebut dibuat kodingnya dalam bahasa R yaitu sebagai berikut:

```
# inialisasi #
library(IQCC)
n=5; k=25
USL=74.06; LSL=73.94
# menggunakan data pistonrings yang terpasang #
# pada package IQCC #
data(pistonrings)
# pendugaan simpangan baku proses #
# dan Indeks Kemampuan Proses Cp #
rang <- qcc(pistonrings[1:k,], type="R", plot=FALSE)
(Rbar <- mean(rang$statistics))
SD <- Rbar/d2(n)
(Cp <- (USL - LSL)/(6*SD))
# Konversi dari tipe data frame ke vektor numerik #
x1 <- as.vector(as.matrix(pistonrings[1:k,]))
# Bootstrap sampel asal x1 dan diulang sebanyak nxk #
# untuk memperoleh Cp* #
x2 <- replicate(n*k, sample(x1, size=n, replace=TRUE))
data <- matrix(x2, nrow=k, ncol=n)
rang <- qcc(data, type="R", plot=FALSE)
Rstar <- mean(rang$statistics)
SDstar <- Rstar/d2(n)
CpStar <- (USL - LSL)/(6*SDstar)
# Pengulangan proses bootstrap untuk mendapatkan 1000 Cp* #
for (i in 1:999){
  x2 <- replicate(n*k, sample(x1, size=n, replace=TRUE))
  data <- matrix(x2, nrow=k, ncol=n)
  rang <- qcc(data, type="R", plot=FALSE)
  Rstar <- mean(rang$statistics)
  SDstar <- Rstar/d2(n)
  CpStar <- c(CpStar, (USL - LSL)/(6*SDstar))
}
# Membuat histogram, menghitung rata-rata Cp* #
# dan galat bakunya #
hist(CpStar, col=gray(0.85))
mean(CpStar)
sd(CpStar)
```

Histogram untuk yang dihasilkan dengan menggunakan metode *Bootstrap Nonparametrik* disajikan oleh Gambar 3. Histogramnya berbentuk lonceng, sehingga dapat diduga menyebar normal sesuai dengan Teorema Limit Pusat.



Gambar 3. Histogram Statistik \hat{C}_p^* Hasil Simulasi dengan Metode *Bootstrap Nonparametrik*

Nilai dugaan untuk indeks kemampuan proses \hat{C}_p^* adalah

```
mean(CpStar)
[1] 2.01724
```

Sedangkan galat baku dugaan ($\widehat{Se}(\hat{C}_p^*)$) menggunakan metode *Bootstrap Nonparametrik* dengan 1000 kali ulangan adalah

```
sd(CpStar)
[1] 0.1615903
```

Sedangkan sebelumnya dengan metode *Bootstrap Parametric* telah diperoleh nilai dugaan untuk \hat{C}_p dengan galat baku dugaannya adalah 0.156. Nampak bahwa kedua metode tidak memberikan perbedaan yang signifikan Selang kepercayaan 95% bagi C_p dengan perintah R diperoleh sebagai berikut:

```
quantile(CpStar, c(0.025, 0.975))
 2.5% 97.5%
1.725403 2.335387
```

Jadi selang kepercayaan 95% untuk C_p adalah [1.725, 2.34], sedangkan metode *Bootstrap Parametric* diperoleh dugaan selang kepercayaan 95% adalah [1.783, 2.376], dan hasil dengan perhitungan analitik adalah [1.789, 298].

PENUTUP

Kesimpulan

1. Walaupun hasil analitik untuk pendugaan indeks kemampuan proses adalah merupakan hasil yang terbaik, tetapi didasarkan atas asumsi-asumsi yang harus dipenuhi,

seperti proses atau populasi menyebar normal. Asumsi ini kadang-kadang sulit untuk dipenuhi, maka diperlukan metode alternatif untuk menduga nilai indeks C_p ini.

2. Metode *Bootstrap Parametrik* dapat digunakan apabila bentuk sebaran proses diketahui walaupun tidak harus normal.

3. Metode *Nonparametric* sebagai pilihan terakhir di mana pengetahuan tentang sebaran proses sama sekali tidak dapat diperoleh.

Saran

Dalam praktek perlu diupayakan metode yang tepat sesuai urutan kesahihannya secara ilmiah agar hasil yang diperoleh dapat optimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Breyfogle III, FW. *Implementing Six Sigma, Smarter Solution Using Statistical Methods, 2nd ed.* John Wiley and Sons Inc. New Jersey. 2003.
- Ducworth, WM, et al.. *Resampling Methods for Inference.* <http://www.public.iastate.edu/~stat415/duckworth/bootstrap.pdf>. 2001.
- Hughes, M.. *Introduction to Nonparametric Statistics Using R.* Miami University Press, FL. 2012.
- Kloke, J and McKean, JW. . *Nonparametric Statistical Methods Using R.* CRC Press, Taylor and Francis Group, Ney York, USA. 2014.
- Krisnamoorthi, K.S.. *A First Course in Quality Engineering : Integrating Statistical and Management Methods of Quality, 2nd ed.* CRC Press, Taylor and Francis Group, Ney York, USA. 2011.
- Montgomery, DC. *Introduction to Statistical Quality Control, 6th ed.* John Wiley and Sons, Inc. Singapore. 2008.