

ANALISIS WAVELET DAN ARIMA UNTUK PERAMALAN HARGA EMAS PT. ANTAM TBK INDONESIA

M. T. KURNIA¹, E. H. NUGRAHANI², H. SUMARNO²

Abstract

Forecasting is an estimation of the systematic process which is most likely to occur in the future based on past informations. Wavelet is one of forecasting method without parameter, which is used in signal analysis, data compression, and time series analysis. On the other hand ARIMA is the most general class of models for forecasting a time series, which can be stationarized by transformations, such as differencing and logging. This research present the forecasting of gold price in Indonesia using wavelet and ARIMA. The results show that wavelet gives the value of Mean Square Error (MSE) which is smaller than the ARIMA. Therefore wavelet is considered quite well in the analysis of time series data.

Keywords: ARIMA, forecasting, time series, wavelet

PENDAHULUAN

Peramalan adalah proses perkiraan secara sistematis tentang apa yang akan terjadi di masa yang akan datang berdasarkan informasi masa lalu dan masa sekarang, dengan harapan selisih antara hasil peramalan dan apa yang terjadi di masa yang akan datang dapat diminimalisir sekecil mungkin. Peramalan membutuhkan data deret waktu yang cukup panjang dan informasi data yang cukup banyak untuk mendapatkan hasil ramalan yang baik, sehingga dari hasil analisis tersebut dapat diketahui faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi perubahan data tersebut.

Deret waktu (*Time series*) merupakan himpunan pengamatan yang dibangun secara berurutan dalam waktu [1]. Analisis data deret waktu dapat menggunakan beberapa metode, yaitu berupa metode analisis domain waktu seperti ARIMA dan juga dapat menggunakan metode analisis domain frekuensi seperti wavelet. Dalam analisis deret waktu, kestasioneran data merupakan salah satu faktor yang harus dipenuhi. Namun demikian bukanlah suatu pekerjaan yang mudah untuk *menstasionerkan* data disebabkan karena tidak adanya prosedur yang baku dan cenderung *trial and error*. Padahal ada banyak data deret waktu yang tidak stasioner, sebagai contoh data harga emas PT. ANTAM yang fluktuasinya terkadang naik secara tajam atau bahkan tiba-tiba turun secara tajam.

Dalam permasalahan ini maka metode analisis waktu model klasik ARIMA kurang tepat digunakan, karena tidak terpenuhinya kestasioneran data.

¹Mahasiswa Program Pascasarjana, Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB Dramaga Bogor, 16680.

²Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

Dikarenakan alasan tersebut, maka dalam penelitian ini akan digunakan transformasi wavelet. Wavelet merupakan suatu fungsi yang secara matematis memotong data ke dalam komponen berbeda dan mempelajari masing-masing komponen dengan resolusi yang sesuai dengan skalanya [3], di mana suatu data asal didekomposisi untuk menghasilkan koefisien wavelet dan koefisien skala yang selanjutnya akan digunakan untuk memprediksi data deret waktu pada periode berikutnya. Metode ini sangat cocok untuk bidang aplikasi yang melibatkan beberapa sinyal atau data yang berkala, non stasioner, terputus-putus, dan sebagainya.

Tujuan dari penelitian ini adalah mengaplikasikan model ARIMA dan wavelet pada data deret waktu harga penjualan emas mingguan PT. ANTAM Tbk Indonesia, kemudian menganalisis model apa yang paling baik digunakan untuk peramalan harga penjualan emas pada periode berikutnya.

TINJAUAN PUSTAKA

Model ARIMA

Model ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) dengan tiga parameter p, d dan q dinotasikan sebagai ARIMA (p, d, q) . Bentuk umum model ini dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B) + \varepsilon_t$$

Sebagai ilustrasi, suatu model deret waktu yang dihasilkan oleh proses ARIMA (p, d, q) untuk $d = 1$ dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut:

$$Z_t = (1 + \phi_1 Z_{t-1}) + (\phi_2 - \phi_1) Z_{t-2} + \dots + (\phi_p - \phi_{p-1}) Z_{t-p} - \phi_p Z_{t-p-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Persamaan ini juga dikenal dengan persamaan differensi model ARIMA $(p, 1, q)$. Bentuk inilah yang akan digunakan untuk menghitung data peramalan. Suatu model ARIMA dikatakan baik apabila uji independensi antar lag terpenuhi, parameter-parameternya signifikan dan mempunyai MSE terkecil.

Tahapan peramalan model ARIMA adalah sebagai berikut:

Tahap 1: Identifikasi model, apakah model stasioner atau tidak stasioner. Data dikatakan stasioner apabila fluktuasi data berada di sekitar nilai yang konstan (stasioner dalam rata-rata) dan ragam dari fluktuasi tersebut tetap konstan dari waktu ke waktu (stasioner dalam ragam) [1]. Kestasioneran data dapat dilihat dari grafik autokorelasi (ACF) dan autokorelasi parsial (PACF). Jika data deret waktu adalah non stasioner maka perlu dilakukan differencing atau transformasi sehingga dihasilkan suatu data yang stasioner.

- Tahap 2: Pendugaan parameter model dengan cara trial and error atau perbaikan secara iterative.
- Tahap 3: Pengujian model, Pada tahap ini dilakukan pemeriksaan diagnostik untuk menguji kelayakan model dengan cara melakukan analisis galat (residual) menggunakan statistik uji Q, dan kemudian dilanjutkan dengan uji t dengan tingkat kepercayaan 95% ($\alpha = 0.05$).
- Tahap 4: Peramalan berdasarkan model terbaik yang terpilih.

Model Wavelet

Wavelet adalah sebuah nama untuk gelombang kecil yang naik dan turun pada periode waktu tertentu. Sedangkan sebagai pembandingnya adalah gelombang yang besar, contohnya adalah gelombang fungsi sinusoidal [2].

Dalam transformasi wavelet terdapat dua fungsi yang sangat penting, yaitu fungsi skala yang biasa disebut sebagai wavelet ayah, $\varphi_{j,k}(x) = (2^j)^{-\frac{1}{2}} \varphi(2^{-j}x - k)$ dan fungsi wavelet $\psi_{j,k}(x) = (2^{-j})^{\frac{1}{2}} \psi(2^{-j}x - k)$ yang biasa disebut sebagai wavelet ibu dengan $j = j_0, j_1, \dots, j_k$ adalah level wavelet untuk $k \in \mathbb{Z}$.

Suatu fungsi $\psi(\cdot)$ didefinisikan sebagai wavelet jika memenuhi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = 1.$$

Fungsi skala $\varphi(t)$ atau wavelet ayah yang mengalami kontraksi (peregangan) dan pergeseran, dinotasikan dengan

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} g_l \varphi(2t - l).$$

Fungsi $\varphi(2t - l)$ adalah fungsi skala $\varphi(t)$ yang mengalami pergeseran sepanjang sumbu waktu dengan langkah l dengan koefisien filter skala g_l dan fungsi wavelet $\psi(t)$ atau wavelet ibu didefinisikan sebagai:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} (-1)^l h_l \psi(2t - l)$$

Koefisien g_l harus memenuhi kondisi $\sum_{l=0}^{L-1} g_l = \sqrt{2}$ dan $\sum_{l=0}^{L-1} (-1)^l l^m g_l = 0$. Nilai $m = 0, 1, \dots$, akan menghasilkan persamaan

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l g_{l+2m} = 0, m \neq 0 \text{ dan } \sum_{l=0}^{L-1} g_l^2 = 1.$$

Hubungan antara koefisien h_l dan g_l adalah

$$h_l = (-1)^l g_{L-1-l} \text{ dan } g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l} \text{ [2, 3].}$$

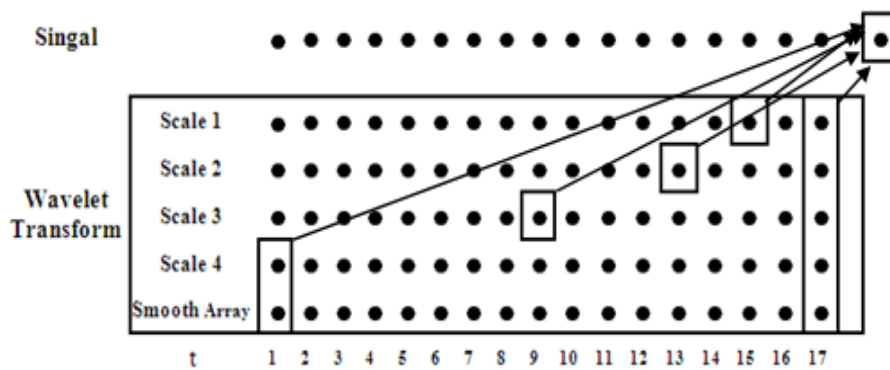
Peramalan data deret waktu yang dihasilkan dengan menggunakan wavelet adalah peramalan dengan menggunakan data yang telah mengalami pra pemrosesan melalui transformasi wavelet. Dengan adanya dekomposisi multiskala maka secara otomatis akan memisahkan komponen-komponen data, yaitu komponen trend dan irregular yang ada pada data stasioner (mengandung komponen irregular saja), ataupun data yang non stasioner (mengandung komponen trend dan irregular). Dengan demikian dapat dilakukan peramalan data dengan baik.

Persamaan multiskala dari koefisien-koefisien yang didapatkan dari hasil dekomposisi proses Autoregressive menjadi proses Multiscale Autoregressive (MAR) untuk meramal data ke X_{t+1} dari data $X_t = X_1, X_2, \dots, X_t$ yang akan diramal sebanyak 2^j data dilakukan dengan persamaan sebagai berikut [4, 5].

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{A_j} \hat{a}_{j,k} \hat{W}_{j,t-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{A_J} \hat{a}_{J+1,k} \hat{V}_{j,t-2^j(k-1)}.$$

Dengan J adalah level wavelet ($j = 1, 2, \dots, J$), A_j adalah orde MAR ($k = 1, 2, \dots, A_j$), $\hat{W}_{j,t}$ adalah koefisien wavelet, $\hat{V}_{j,t}$ adalah koefisien skala, $\hat{a}_{j,k}$ adalah koefisien MAR dan t adalah waktu.

Input dan prosedur peramalan data ke X_{t+1} dengan model wavelet diilustrasikan pada Gambar 1. Gambar 1 menjelaskan bahwa untuk melakukan peramalan pada data ke 18, dengan model wavelet orde 2, maka variabel input yang digunakan adalah koefisien wavelet level 1 pada $t = 17$ dan $t = 15$, koefisien wavelet level 2 pada $t = 17$ dan $t = 13$, koefisien wavelet level 3 pada $t = 17$ dan $t = 9$, koefisien wavelet level 4 pada $t = 17$ dan $t = 4$ dan koefisien smooth level 4 pada $t = 17$ dan $t = 1$. Sehingga input yang kedua pada tiap-tiap level adalah $t - 2^j$.



Gambar 1 Proses pemodelan wavelet untuk $j = 4$, $MAR_{A_j} = 2$ dan $N = 17$

Untuk mendapatkan koefisien MAR seperti gambar diatas dapat digunakan estimasi dengan ilustrasi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{16} \\ X_{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,0} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,16} & w_{1,17} \\ w_{1,-2} & w_{1,-1} & \cdots & w_{1,14} & w_{1,15} \\ w_{2,0} & w_{2,1} & \cdots & w_{2,16} & w_{2,17} \\ w_{2,-4} & w_{2,-3} & \cdots & w_{2,11} & w_{2,13} \\ w_{3,0} & w_{3,1} & \cdots & w_{3,16} & w_{3,17} \\ w_{3,-8} & w_{3,-7} & \cdots & w_{3,8} & w_{3,9} \\ w_{4,0} & w_{4,1} & \cdots & w_{4,16} & w_{4,17} \\ w_{4,-14} & w_{4,-15} & \cdots & w_{4,0} & w_{4,1} \\ v_{4,0} & v_{4,1} & \cdots & v_{4,16} & v_{4,17} \\ v_{4,-14} & v_{4,-15} & \cdots & v_{4,0} & v_{4,1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_{1,3} \\ \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,3} \\ \alpha_{2,2} \\ \alpha_{2,1} \\ \alpha_{3,3} \\ \vdots \\ \alpha_{5,3} \\ \alpha_{5,2} \end{bmatrix}$$

Misalkan persamaan matriks di atas ditulis

$$X = P^T \alpha$$

$$PX = P^T P \alpha$$

$$P(P^T P)^{-1} X = (P^T P)(P^T P)^{-1} \alpha$$

$$P(P^T P)^{-1} X = I \alpha$$

$$P(P^T P)^{-1} X = \alpha.$$

Jadi koefisien MAR dapat diestimasi dengan $\alpha = P(P^T P)^{-1} X$.

Tahap awal pembentukan model MAR adalah dekomposisi Discret Wavelet Transform (DWT) terhadap data deret waktu menggunakan Daubechies wavelet yang disingkat dengan D(4) yang memiliki panjang filter $L = 4$. Diasumsikan D(4) mampu merepresentasikan data dengan lebih baik. Dalam penelitian ini digunakan data sebanyak 128, sehingga level maksimal yaitu $J = 7$, namun level yang digunakan hanya sampai level ke-6 ($J_0 = 6$).

Dalam analisis sebuah data deret waktu $\{X_t\}$ DWT memiliki sifat transformasi ortonormal linier. Dalam analisis komputasi terdapat $\{W_n : n = 0, \dots, N-1\}$ yang menyatakan koefisien DWT dengan notasi $W = WX$ dengan W adalah vektor kolom sepanjang $N = 2^j$ dengan elemen ke- n adalah koefisien DWT ke- n pada W_n dan W adalah sebuah matriks bernilai riil berukuran $N \times N$ Sifat ortonormalitas menyatakan bahwa $X = W^T W$ dan

$\|W\|^2 = \|X\|^2$, oleh karena itu \mathcal{W}_n^2 menunjukkan besarnya pengaruh perubahan untuk masing-masing koefisien indeks ke-n.

Secara umum untuk data $N = 2^J$, penyusunan elemen \mathcal{W} dari wavelet Haar atau wavelet lainnya kurang lebih sebagai berikut. Pada koefisien DWT di level pertama berukuran $\frac{N}{2}$, level kedua berukuran $\frac{N}{4}$ sampai ke level terakhir diperoleh W_{j_0} dan V_{j_0} didapatkan koefisien DWT dengan ukuran 1×1 sehingga ketika dijumlahkan dari level pertama diperoleh matriks dengan ukuran $N \times 1$ sebagaimana ukuran data asli. Perubahan koefisien tersebut sebenarnya dihubungkan dengan perubahan skala pada skala τ_j , dengan $\tau_j \equiv 2^{j-1}$ untuk level $j = 1, 2, \dots, J$ dan τ_j adalah sebuah skala terstandarisasi tanpa unit.

DWT dari sebuah deret waktu X , dengan panjang N adalah sebuah transformasi linier, dengan pembentukan W dari koefisien DWT per-level, dimana perkalian matriks filter atas X adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{W}X = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{W}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{W}_j \\ \mathcal{V}_j \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 X \\ \mathcal{W}_2 X \\ \vdots \\ \mathcal{W}_j X \\ \mathcal{V}_j X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_j \\ V_j \end{bmatrix}$$

\mathcal{W}_j adalah matriks berukuran $\frac{N}{2^j} \times N$ dan \mathcal{V}_j adalah matriks berukuran $1 \times N$. W_j adalah vektor kolom dengan panjang $\frac{N}{2^j}$ dan V_j adalah elemen terakhir dari W yang berukuran 1×1 . \mathcal{W}_j merupakan baris yang tergeser sirkular terhadap baris j yang lainnya berdasarkan sistem periodisasi terhadap perubahan panjang level. Koefisien wavelet pada vektor W_j dihubungkan dengan perbedaan rata-rata yang berdekatan dengan skala $\tau_j = 2^{j-1}$, dimana koefisien skala pada V_j sama dengan \sqrt{N} atau setara dengan rata-rata X .

Ketika $N = 2^J = 16$ maka $J = 4$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} W_1^T &= [W_0, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7] \\ W_2^T &= [W_8, W_9, W_{10}, W_{11}] \\ W_3^T &= [W_{12}, W_{13}] \\ W_4^T &= [W_{14}] \\ V_4^T &= [W_{15}]. \end{aligned}$$

Misal untuk $N = 16$, \mathcal{W}_1 adalah matriks berukuran 8×16 yang barisannya merupakan delapan baris pertama pada \mathcal{W} , yaitu:

$$W_1 = [W_0, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7]^T$$

Demikian juga dengan W_2 matriks 4×16 , W_3 , W_4 , dan V_4 seperti dibawah ini:

$$W_2 = [W_8, W_9, W_{10}, W_{11}]^T$$

$$W_3 = [W_{12}, W_{13}]^T$$

$$W_4 = W_{14}^T$$

$$V_4 = W_{15}^T.$$

Karena pembangunan wavelet dari data X yang diindikasikan oleh sifat ortonormalitas, maka diperoleh persamaan berikut

$$X = W^T W = \sum_{n=0}^{N-1} W_n W_n = \sum_{j=1}^J W_j^T W_j + V_j^T V_j.$$

Persamaan di atas menyatakan pendefinisian koefisien D_j dan koefisien aproksimasi S_j dengan $D_j \equiv \sum_{j=1}^J W_j^T W_j$ dan $S_j \equiv V_j^T V_j$, sehingga dapat dituliskan sebagai:

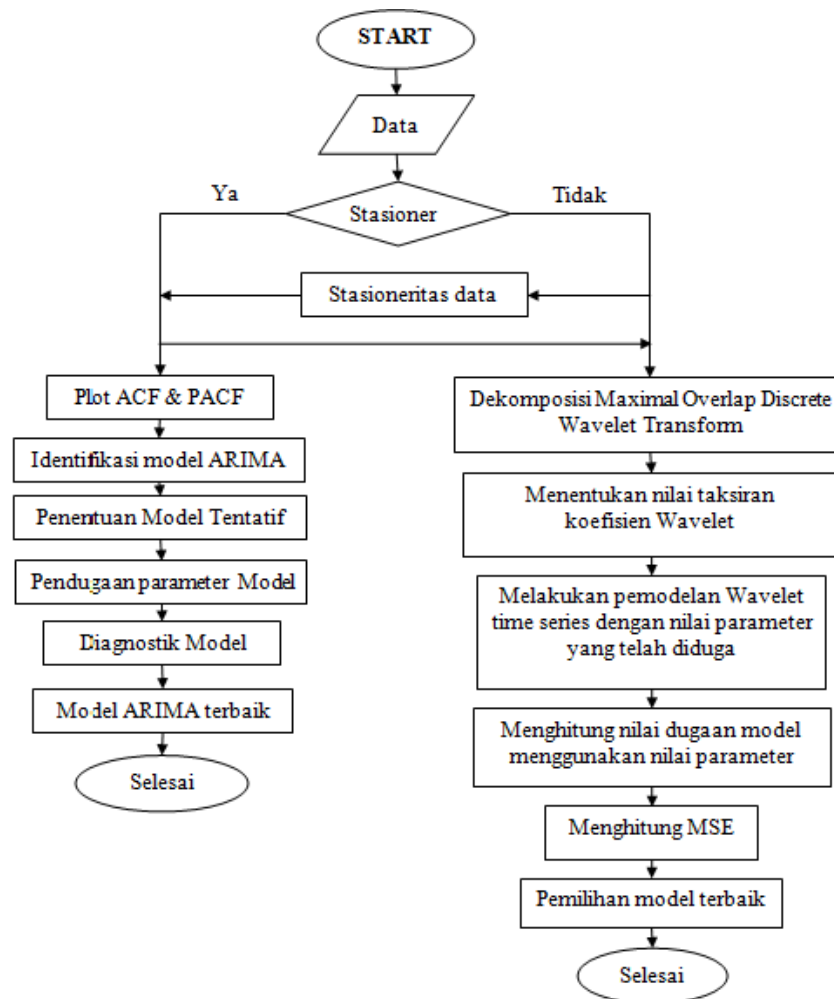
$$X = \sum_{j=1}^J D_j + S_j.$$

Persamaan di atas menggambarkan analisis multiresolusi (MRA) X , yaitu mendefinisikan data deret waktu X sebagai jumlah dari sebuah konstanta vektor S_j dan jumlah koefisien D_j dengan $j = 0, 1, \dots, J$.

Metode Penelitian

Sumber data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder harga penjualan emas mingguan PT. ANTAM yang diperoleh dari <https://www.antamgold.com> sebanyak 138 data. Data yang digunakan untuk pendugaan dan pencarian model terbaik adalah sebanyak 128 data harga penjualan emas pada periode 5 Juli 2007- 26 Desember 2012, sedangkan 10 data mingguan harga penjualan emas pada periode 2 Januari 2013 - 6 Maret 2013 digunakan sebagai data validasi hasil peramalan. Software yang dipakai dalam penelitian ini adalah software R, Minitab 15, dan E views 14.

Langkah-langkah penelitian dapat dilihat pada Gambar 2.



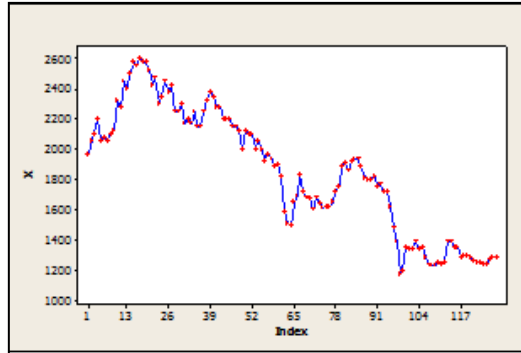
Gambar 2 Langkah-langkah peramalan data deret waktu menggunakan model ARIMA dan model wavelet

HASIL DAN PEMBAHASAN

Syarat utama dalam pemodelan ARIMA adalah kestasioneran data, oleh karena itu perlu diketahui terlebih dahulu apakah data yang akan digunakan sebagai pendugaan dan pencarian model ARIMA terbaik sudah stasioner atau belum. Gambar 3 menunjukkan bahwa data mingguan harga penjualan emas PT. ANTAM Tbk belum stasioner terhadap ragam dan rata-rata yang ditandai dengan adanya *tren* naik, sehingga harus dilakukan uji stasioneritas data dengan menggunakan uji Dickey-Fuller.

Untuk signifikansi 5% diperoleh nilai statistik uji Dickey-Fuller sebesar -0.563366 di mana nilai statistik uji Dickey-Fuller $t >$ nilai kritis (-2.884291), sehingga dapat disimpulkan bahwa data harga emas PT. ANTAM Tbk belum

stasioner dan perlu dilakukan *differencing* data sehingga data menjadi stasioner dan siap digunakan untuk data peramalan.



Gambar 3 Grafik harga penjualan mingguan emas PT ANTAM Tbk periode 5 Juli 2010 – 26 Desember 2012

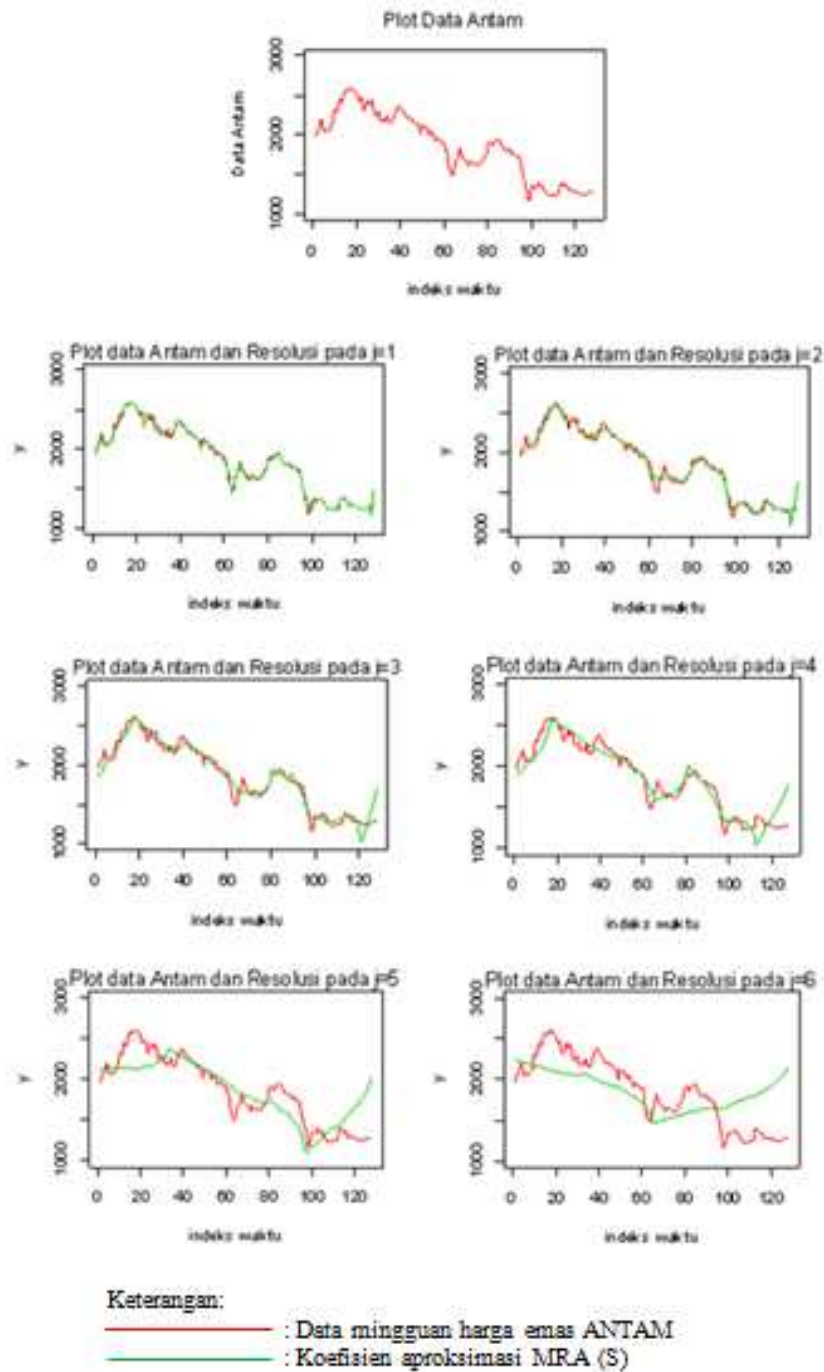
Setelah dilakukan stasioneritas data dan pendugaan parameter model dalam analisis ARIMA pada harga penjualan mingguan emas PT. ANTAM Tbk, kemudian dilanjutkan dengan pemilihan model ARIMA terbaik berdasarkan nilai MSE terkecil. Nilai MSE untuk semua tentatif yang signifikan ditampilkan pada Tabel 1.

Tabel 1
Nilai MSE Model Tentatif ARIMA Data Mingguan
Harga Emas PT. ANTAM TBK

Model Tentatif	Keterangan	MSE
ARIMA (2,1,0)	Dengan Konstanta	7172
	Tanpa Konstanta	7115
ARIMA (1,1,2)	Dengan Konstanta	5835
	Tanpa Konstanta	5799
ARIMA (0,1,1)	Dengan Konstanta	7690
	Tanpa Konstanta	7629

Nilai MSE paling kecil pada masing-masing model tentatif untuk data mingguan harga penjualan emas PT. ANTAM Tbk, yaitu pada model ARIMA (1,1,2) tanpa konstanta. Sehingga dapat disimpulkan bahwa model terbaik untuk peramalan harga penjualan emas PT. ANTAM Tbk adalah model ARIMA (1,1,2) tanpa konstanta.

Untuk melihat kebaikan pendekatan data dengan wavelet MRA, dapat dilihat pada Gambar 4, yaitu plot gabungan data harga penjualan emas PT. ANTAM Tbk periode 5 Juli 2010 sampai 26 Desember 2012 dengan plot aproksimasi MRA pada semua level.



Gambar 4 Plot gabungan data mingguan harga emas PT. ANTAM Tbk periode 5 Juli 2010 - 26 Desember 2012 dan MRA

Dengan bantuan software R maka didapat nilai MSE untuk plot MRA koefisien aproksimasi atau S yang disajikan pada Tabel 2 di bawah ini.

Tabel 2
 Nilai MSE Pendekatan MRA pada level ke j

Level	MSE
1	1524,703
2	4452,191
3	8656,289
4	18628,85
5	56888,16
6	122052,8

Dari nilai MSE pada pendekatan MRA dengan level j maksimal = 6, maka didapat MSE terkecil pada level ke-1 yakni sebesar 1524.703. Dari hasil tersebut diketahui bahwa MRA level pertama memberikan estimasi data deret waktu terbaik untuk data mingguan harga penjualan emas PT. ANTAM Tbk periode 5 Juli 2010-26 Desember 2012. Sehingga untuk peramalan harga emas untuk periode selanjutnya dilakukan dengan menggunakan MAR Daubechies 4 level 1.

Perbandingan hasil peramalan harga penjualan emas PT. ANTAM Tbk untuk 10 periode kedepan dengan menggunakan ARIMA(1,1,2) tanpa konstanta dan wavelet Daubechies level 1 dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3
 Perbandingan Hasil Peramalan ARIMA dan Wavelet

No	Data Asli	Data Peramalan	
		Arima(1,1,2)	Daub level 1
1	1350	1281,46	1304,23
2	1380	1277,25	1357,02
3	1350	1277,60	1335,46
4	1310	1279,07	1309,14
5	1390	1278,63	1387,69
6	1370	1278,19	1380,72
7	1360	1278,44	1352,10
8	1280	1278,55	1309,31
9	1300	1278,43	1311,44
10	1350	1278,42	1338,87
MSE		5452,917	413,1616

Berdasarkan nilai MSE pada Tabel 3, maka diperoleh hasil bahwa nilai kesalahan model wavelet Daubechies level 1 sebesar 413,16161 yang jauh lebih kecil dari pada nilai kesalahan model ARIMA (1,1,2) tanpa konstanta sebesar 5452,917.

SIMPULAN

1. Model wavelet lebih mudah digunakan untuk peramalan data non stasioner karena tidak memerlukan proses stasioneritas data yang rumit seperti model ARIMA.
2. Hasil pendekatan ramalan model wavelet untuk data non stasioner pada data penjualan harga emas mingguan PT. ANTAM Tbk lebih baik daripada hasil peramalan model ARIMA.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Makridakis S, Wheelwright SC, McGee VE. 1999. *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Untung SA dan Abdul B. Penerjemah. Jakarta: Erlangga.
- [2] Percival DB, Walden AT. 2000. *Wavelet Methods for Time Series analysis*. Ed ke-1. New York: Cambridge University Press.
- [3] Daubechies I. 1992. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and applied Mathematics. Philadelphia: SIAM.
- [4] Renaud O, Stark JL, Murtagh F. 2003. Prediction Based on Multiscale Decomposition. Int. *Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*. 1(2): 217-232.
- [5] Renaud O, Stark JL, Murtagh F. 2002. *Wavelet based forecasting of short and long memory time series*. Paper No 2002.04. University of Geneva.