

## SUBGRUP NORMAL PADA Q-FUZZY

**Elly Anjar Sari**

Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,  
e-mail : [ellyanjar@yahoo.com](mailto:ellyanjar@yahoo.com)

**Dr.Raden Sulaiman M.Si.**

Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,  
e-mail : [sulaimanraden@yahoo.com](mailto:sulaimanraden@yahoo.com)

### Abstrak

Kelas-kelas baru struktur aljabar diperkenalkan oleh K.H.Kim, yang difuzzykan. Dalam fuzzyfikasi ini, membahas tentang subgrup Q-fuzzy. Diberikan  $Q$  adalah sebarang himpunan, dan  $G$  adalah grup, Pemetaan  $\mu: G \times Q \rightarrow [0,1]$  disebut himpunan Q-fuzzy di  $G$ . Tulisan ini akan menjelaskan konsep pada subgrup normal Q-fuzzy dan membahas beberapa sifat-sifatnya, karakterisasi pada subgrup Q-fuzzy dan subgrup normal Q-fuzzy yang diberikan.

**Kata kunci :** Subgrup fuzzy, subgrup Q-fuzzy, grup normal Q-fuzzy, Q-fuzzy normalizer

### Abstract

The new classes of algebraic structures introduced by K.H.Kim, are defuzzified. In this fuzzification, the notion of Q-fuzzy subgroup. Let  $Q$  be any sets, and  $G$  be a group. A mapping  $\mu: G \times Q \rightarrow [0,1]$  is called a Q-fuzzy set in  $G$ . This thesis will explain the concept of Q-fuzzy normal subgroup and discusses some of its properties, Characterisation of Q-fuzzy subgroup and Q-fuzzy normal subgroup are given.

**Keywords :** Fuzzy subgroup, Q-fuzzy subgroup, Q-fuzzy normal group, Q-fuzzy normalizer.

## 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang sangat pesat, matematika menempatkan dirinya pada suatu ilmu dasar yang mempunyai peranan penting dalam penguasaan teknologi. Sehingga matematika perlu dipelajari dan dikuasai agar dapat menerapkan ilmu tersebut di berbagai bidang.

Penelitian mengenai teori himpunan fuzzy berkembang dengan pesat baik dalam bidang matematika maupun aplikasinya. Teori himpunan fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Prof. Lotti A Zadeh seorang guru besardi University of California, Amerika Serikat. Lotfi Asker Zadeh mendefinisikan suatu himpunan fuzzy  $A$  dalam semesta pembicaraan  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu: X \rightarrow [0,1]$ , yang mana  $\mu(x)$  mempresentasikan derajat keanggotaan  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Dengan kata lain, suatu himpunan fuzzy  $A$  dapat didefinisikan secara umum sebagai pasangan berurutan  $\tilde{A} = \{(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \dots, (x_n, \mu_{\tilde{A}}(x_n))\}$ . Aplikasi dari teori himpunan fuzzy sangat luas seperti dalam operasi research, teori informasi,

neural network, dibidang kedokteran, bidang ekonomi, dll. Oleh karena itu teori himpunan fuzzy merupakan suatu bidang potensial untuk penelitian antar cabang ilmu pengetahuan.

Sedangkan pada struktur aljabar abstrak mempunyai dua kegunaan yang mendasar. Kegunaan yang pertama adalah untuk menentukan pola-pola atau kesimetrisan dalam kehidupan sehari-hari dan dalam matematika. Misalnya pada suatu mesin automaton mempunyai dua kendali untuk memaksimalkan daya guna mesin tersebut. Sedangkan kegunaan yang kedua adalah perluasan sistem-sistem bilangan untuk digunakan dalam system lainnya.

A.Solairaju dan R.Nagarajan mendefinisikan sebuah struktur aljabar baru pada subgrup Q-fuzzy. Artikel ini merupakan hasil kajian dalam skripsi tentang struktur elemen-elemen Q-fuzzy dan sifat-sifatnya yang meliputi grup, subgrup, subgrup normal, Himpunan fuzzy, relasi fuzzy, subgrup fuzzy, subgrup Q-fuzzy, subgrup normal Q-fuzzy.

Dari konsep-konsep dasar tersebut, penulis dapat mengaitkan konsep pada himpunan fuzzy dan aljabar abstrak. Sehingga dapat membentuk Subgrup normal pada Q-fuzzy dan sifat-sifatnya.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Grup dan Subgrup

Definisi 2.1.1

Grup  $G$  adalah sebuah sistem aljabar yang terdiri atas suatu himpunan tak kosong  $G$  dan suatu operasi biner  $(*)$  yang didefinisikan pada  $G$  serta memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

1. Untuk setiap  $a, b \in G$  berlaku  $a * b \in G$ .
2. Operasi  $*$  bersifat asosiatif, yaitu  $a * (b * c) = (a * b) * c$ , untuk setiap  $a, b, c \in G$
3. Terdapat elemen  $e$  disebut identitas  $e \in G$  sedemikian sehingga  $a * e = e * a = a$ , untuk setiap  $a \in G$ .
4. Untuk setiap  $a \in G$ , terdapat elemen  $a^{-1} \in G$  sedemikian sehingga  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

Definisi 2.1.2

Suatu subset  $H$  tidak kosong dari grup  $G$  disebut subgrup dari  $G$  jika  $H$  membentuk grup terhadap operasi yang sama pada grup  $G$ .

Definisi 2.1.3

Misalkan  $G$  adalah suatu grup dan  $H$  adalah himpunan bagian dari  $G$  yang tidak kosong,  $H$  subgrup dari  $G$  jika dan hanya jika memenuhi :

- (1) Untuk setiap  $a, b \in H$ , maka  $ab \in H$ .
- (2) Untuk setiap  $a \in H$ , maka  $a^{-1} \in H$ .

Teorema 2.1.2

Diketahui  $G$  grup dan  $H \subset G$ .  $H$  subgrup  $G$  jika dan hanya jika  $ab^{-1} \in H$  untuk setiap  $a, b \in H$ .

2.2 Homomorfisme dan Epimorfisme Grup

Definisi 2.2.1

Diberikan grup  $G$  dan  $H$ . Suatu homomorfisme grup dari  $G$  ke  $H$  adalah suatu fungsi  $f: G \rightarrow H$  sedemikian sehingga untuk sembarang  $a$  dan  $b$  di dalam  $G$ , berlaku  $f(ab) = f(a)f(b)$

Definisi 2.2.2

Epimorfisme adalah suatu homomorfisme yang bersifat surjektif.

Definisi 2.2.3

Suatu subgrup  $N$  dari  $G$  disebut subgrup normal dari grup  $G$  jika dan hanya jika untuk setiap  $g \in G$  dan  $n \in N$ ,  $gn g^{-1} \in N$ .

2.3 Relasi Fuzzy

Definisi 2.3.1

Relasi fuzzy  $\tilde{R}$  antara elemen-elemen pada himpunan  $X$  dan elemen-elemen pada himpunan  $Y$  didefinisikan sebagai himpunan bagian fuzzy dari hasil kali kartesius  $X \times Y$  yaitu

$$\tilde{R} = \{((x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y)) | (x, y) \in X \times Y\}$$

Dimana  $\mu_{\tilde{R}}: X \times Y \rightarrow [0,1]$

$\mu_{\tilde{R}}(x, y)$  adalah derajat keanggotaan unsur  $(x, y) \in X \times Y$  dalam relasi fuzzy  $\tilde{A}$ .

2.4 Subgrup Fuzzy

Definisi 2.4.1

Misal  $X$  adalah himpunan tak kosong. Himpunan bagian fuzzy  $\mu$  pada  $X$  dinyatakan sebagai fungsi  $\mu: X \rightarrow [0,1]$ .

Definisi 2.4.2

Diberikan  $G$  adalah grup. Himpunan bagian fuzzy  $\mu$  di grup  $G$  disebut subgrup fuzzy jika  $\mu: G \rightarrow [0,1]$  memenuhi untuk semua  $x, y \in G$ ,

- (i)  $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$  untuk setiap  $x, y \in G$
- (ii)  $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$  untuk setiap  $x \in G$

Definisi 2.4.3

Diberikan  $G$  adalah grup. Himpunan bagian fuzzy di grup  $G$  disebut normal jika untuk semua  $x, y \in G$ ,  $\mu(xy x^{-1}) = \mu(y)$  atau  $\mu(xy) = \mu(yx)$

Definisi 2.4.4

Diberikan  $\mu$  adalah subgrup fuzzy di grup  $G$ . Untuk  $t \in [0,1]$ , level subset  $t$  di  $\mu$  adalah himpunan  $\mu^t = \{x \in G, |\mu(x) \geq t\}$ .

3. PEMBAHASAN

3.1. Subgrup Normal Q-Fuzzy

Definisi 3.1

Diberikan  $Q$  adalah sebarang himpunan, dan  $G$  adalah grup. Pemetaan  $\mu: G \times Q \rightarrow [0,1]$  disebut himpunan Q-fuzzy di grup  $G$ .

Definisi 3.2

Himpunan Q-fuzzy  $\mu$  disebut subgrup Q-fuzzy di  $G$ , jika untuk setiap  $x, y \in G, q \in Q$ ,

- (i)  $\mu(xy, q) \geq \min\{\mu(x, q), \mu(y, q)\}$
- (ii)  $\mu(x^{-1}, q) = \mu(x, q)$

Definisi 3.3

Diberikan  $G$  adalah grup. Subgrup Q-fuzzy  $\mu$  dari grup  $G$  disebut normal jika untuk semua  $x, y \in G$ , dan  $q \in Q$ ,  $\mu(xy x^{-1}, q) = \mu(y, q)$  atau  $\mu(xy, q) \geq \mu(yx, q)$ .

**Definisi 3.4**

Misalkan  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G. Untuk  $t \in [0,1]$ , disebut level subset  $\mu$  sehingga  $\mu^t = \{x \in G, q \in Q | \mu(x, q) \geq t\}$ .

**Teorema3.1 :**

Diberikan G adalah grup dan  $\mu$  adalah himpunan bagian Q-fuzzy dari grup G. Maka  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G jika dan hanya jika level subset  $\mu^t, t \in [0,1], t \leq \mu(0)$ , adalah subgrup dari grup G.

**Bukti :**

Misalkan  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy pada grup G dan untuk  $t \in [0,1]$ ,

$$\mu^t = \{x \in G, q \in Q | \mu(x, q) \geq t\}.$$

Misalkan  $x, y \in \mu^t$ . Maka  $\mu(x, q) \geq t$  dan  $\mu(y, q) \geq t$ .

Sehingga  $\mu(xy^{-1}, q) \geq \min\{\mu(x, q), \mu(y^{-1}, q)\}$

$$\geq \min\{\mu(x, q), \mu(y, q)\}$$

$$\geq \min\{t, t\}$$

Jadi,  $\mu(xy^{-1}, q) \geq t$

Sehingga dapat dinyatakan  $xy^{-1} \in \mu^t$ .

Sehingga  $\mu^t$  adalah subgrup pada grup G.

Sebaliknya, asumsikan bahwa  $\mu^t$  adalah subgrup pada grup G.

Misalkan  $x, y \in \mu^t$ . Maka  $\mu(x, q) \geq t$  dan  $\mu(y, q) \geq t$ .

Begitu juga,  $\mu(xy, q) \geq t$

$$\geq \min\{t, t\}$$

$$= \min\{\mu(x, q), \mu(y, q)\}$$

$x \in \mu^t, \mu^t$  subgrup pada G, jadi  $x^{-1} \in \mu^t$

$$\mu(x^{-1}, q) \geq t$$

$$= \mu(x, q)$$

Sehingga diperoleh,  $\mu(xy, q) \geq \min\{\mu(x, q), \mu(y, q)\}$

$$\text{dan } \mu(x^{-1}, q) = \mu(x, q).$$

Jadi  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy pada grup G.

**Definisi 3.5**

Diberikan G adalah grup dan  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G. Misalkan  $N(\mu) = \{a \in G | \mu(axa^{-1}, q) = \mu(x, q), \text{ untuk setiap } x \in G, q \in Q\}$ . Maka  $N(\mu)$  disebut normalizer Q-fuzzy di  $\mu$ .

**Teorema3.2 :**

Diberikan G adalah grup dan  $\mu$  adalah himpunan bagian Q-fuzzy dari grup G. Maka  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G jika level subset  $\mu^t, t \in [0,1]$ , adalah subgrup normal dari grup G.

**Bukti :**

Misalkan  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy pada grup G dan level subset  $\mu^t, t \in [0,1]$ , adalah subgrup pada grup G.

Diberikan  $x \in G$  dan  $a \in \mu^t$ , maka  $\mu(a, q) \geq t$ .

Karena  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy pada grup G, maka  $\mu(xax^{-1}, q) = \mu(a, q) \geq t$ .

Sehingga diperoleh,  $\mu(xax^{-1}, q) \geq t$ .

Jadi,  $xax^{-1} \in \mu^t$ . Sehingga  $\mu^t$  adalah subgrup normal pada grup G.

**Teorema3.3 :**

Diberikan  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G. Maka

i.  $N(\mu)$  adalah subgrup dari G.

ii.  $\mu$  adalah normal Q-fuzzy dari G  $\Leftrightarrow N(\mu) = G$ .

iii.  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup  $N(\mu)$ .

**Bukti :**

i. Diberikan  $a, b \in N(\mu)$  maka  $\mu(axa^{-1}, q) = \mu(x, q)$ , untuk setiap  $x \in G$ .  $\mu(bxb^{-1}, q) = \mu(x, q)$ , untuk setiap  $x \in G$ .  
Sehingga  $\mu(abx(ab)^{-1}, q) = \mu(abxb^{-1}a^{-1}, q)$

$$= \mu(bxb^{-1}, q) = \mu(x, q)$$

Sehingga diperoleh,

$$\mu(abx(ab)^{-1}, q) = \mu(x, q)$$

Jadi  $b^{-1} \in N(\mu)$ , Maka  $ab \in N(\mu)$ , Jadi  $N(\mu)$  adalah subgrup pada grup G.

ii. Jelas  $N(\mu) \subseteq G$ ,  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy pada grup G.

Diberikan  $a \in G$ , maka  $\mu(axa^{-1}, q) = \mu(x, q)$ , itu berarti  $a \in N(\mu)$

Maka  $G \subseteq N(\mu)$ .

Jadi  $N(\mu) = G$ .

Sebaliknya, Diberikan  $N(\mu) = G$ .

Jelas  $\mu(axa^{-1}, q) = \mu(x, q)$ , untuk setiap  $x \in G$  dan  $a \in G$ .

Jadi  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy pada grup G.

iii. Dari (ii),  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy pada grup  $N(\mu)$ .

Untuk setiap  $N(\mu) \Rightarrow \mu(xyx^{-1}, q) = \mu(y, q)$ .

**Definisi 3.6**

Diberikan  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G,  $g \in G$ ,  $g\mu g^{-1}$  didefinisikan sebagai  $g\mu g^{-1}(x, q) = \mu(g^{-1}xg, q) \forall x \in G, q \in Q$ .

**Teorema3.4 :**

Jika  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G, maka  $g\mu g^{-1}$  adalah juga subgrup Q-fuzzy dari grup G, untuk semua  $g \in G$ .

**Bukti :**

Misalkan  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G dan  $g \in G$ , Maka :

$$(i). (g\mu g^{-1})(xy, q) = \mu(g^{-1}(xy)g, q) = \mu(g^{-1}(xgg^{-1}y)g, q) = \mu((g^{-1}xg)(g^{-1}yg), q) \geq \min\{\mu(g^{-1}xg, q), \mu(g^{-1}yg, q)\} \geq \min\{\mu g\mu g^{-1}(x, q), \mu g\mu g^{-1}(y, q)\}$$

Untuk semua  $x, y \in G$  dan  $q \in Q$ .

$$(ii). g\mu g^{-1}(x, q) = \mu(g^{-1}xg, q) = \mu((g^{-1}xg)^{-1}, q) = \mu(g^{-1}x^{-1}g, q) = \mu g\mu g^{-1}(x^{-1}, q), \text{ Untuk semua } x, y \in G \text{ dan } q \in Q.$$

Jadi  $g\mu g^{-1}$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G.

**Teorema3.5 :**

Jika  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G, maka  $g\mu g^{-1}$  juga merupakan subgrup normal Q-fuzzy dari grup G, untuk semua  $g \in G$ .

**Bukti :**

Misalkan  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G. Maka  $g\mu g^{-1}$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G.

$$\begin{aligned} \text{Adapun } \mu g^{-1}(xyx^{-1}, q) &= \mu(g^{-1}(xyx^{-1})g, q) \\ &= \mu(xyx^{-1}, q) \\ &= \mu(y, q) \\ &= \mu(gyg^{-1}, q) \\ &= g\mu g^{-1}(y, q) \end{aligned}$$

**Teorema3.6 :**

Misalkan  $\lambda$  dan  $\mu$  adalah dua subgrup Q-fuzzy dari grup G. Maka  $\lambda \cap \mu$  merupakan subgrup Q-fuzzy dari grup G.

**Bukti :**

Diberikan  $\lambda$  dan  $\mu$  adalah dua subgrup Q-fuzzy dari grup G.

$$\begin{aligned} \text{(i) } (\lambda \cap \mu)(xy^{-1}, q) &= \min\{\lambda(xy^{-1}, q), \mu(xy^{-1}, q)\} \\ &\geq \min\{\min\{\lambda(x, q), \lambda(y, q)\}, \min\{\mu(x, q), \mu(y, q)\}\} \\ &\geq \min\{\min\{\lambda(x, q), \mu(x, q)\}, \min\{\lambda(y, q), \mu(y, q)\}\} \\ &= \min\{(\lambda \cap \mu)(x, q), (\lambda \cap \mu)(y, q)\} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } (\lambda \cap \mu)(xy^{-1}, q) \geq \min\{(\lambda \cap \mu)(x, q), (\lambda \cap \mu)(y, q)\}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } (\lambda \cap \mu)(x, q) &= \{\lambda(x, q), \mu(x, q)\} \\ &= \{\lambda(x^{-1}, q), \mu(x^{-1}, q)\} \\ &= \{(\lambda \cap \mu)(x^{-1}, q)\}. \end{aligned}$$

Jadi  $\lambda \cap \mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G.

**Teorema3.7 :**

Irisansebarangduasubgrup normal Q-fuzzy dari grup G jugamerupakan subgrup normal Q-fuzzy dari grup G.

**Bukti :**

Diberikan  $\lambda$  dan  $\mu$  adalah dua subgrup normal Q-fuzzy dari grup G.

BerdasarkanTeorema 3.6,  $\lambda \cap \mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G.

Adapun untuk setiap  $x, y$  di G, kita peroleh :

$$\begin{aligned} (\lambda \cap \mu)((xyx^{-1}, q) &= \min\{\lambda(xy^{-1}, q), \mu(xy^{-1}, q)\} \\ &= \min\{\lambda(y, q), \mu(y, q)\} = (\lambda \cap \mu)(y, q) \end{aligned}$$

Jadi  $\lambda \cap \mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G.

**Definisi 3.7**

Diberikan G dan H adalah grup, dan Q adalahsebaranghimpunan. Pemetaan  $f: G \times Q \rightarrow H \times Q$  dikatakan grup Q-homomorfisma jika :

- (i)  $f: G \rightarrow H$  adalah grup homomorfisma
- (ii)  $f(xy, q) = (f(x)f(y), q)$ , untuk semua  $x, y \in G$  dan  $q \in Q$ .

**Definisi 3.8**

Diberikan fungsi  $f: G \times Q \rightarrow H \times Q$ . Misalkan  $\mu_1$  adalah subgrup fuzzy dari G, dan  $\mu_2$  adalah subgrup fuzzy dari H, maka :

- (i)  $f(\mu_1)(y, q) =: \text{Sup}_{f(z)=y} \mu_1(z, q)$  untuk semua  $y$  di G.

- (ii)  $f^{-1}(\mu_2)(x, q) =: \mu_2(f(x, q))$  untuk semua  $x$  di H.

**Teorema3.8 :**

Misalkan  $f: G \times Q \rightarrow H \times Q$  dikatakan grup Q-homomorfisma

- (a) Jika  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari H, maka  $f^{-1}(\mu)$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari G.
- (b) Jika  $f$  adalah epimorfisma dan  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari G, maka  $f(\mu)$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari H.

**Bukti :**

- (a) Misalkan  $f: G \times Q \rightarrow H \times Q$  adalah Q-homomorfisma dan misalkan  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari H.

Jadi untuk semua  $x, y \in G$ , diperoleh :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mu)(xyx^{-1}, q) &= \mu(f(xyx^{-1}, q)) \\ &= \mu(f(x)f(y)f(x^{-1}, q)) \\ &= \mu(f(y), q) \\ &= f^{-1}(\mu)(y, q) \end{aligned}$$

Jadi  $f^{-1}(\mu)$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari G.

- (b) Misalkan  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari G. maka  $f(\mu)$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari H.

Untuk setiap  $u, v$  di H, diperoleh :

$$\begin{aligned} f(\mu)(uvu^{-1}, q) &= \sup_{f(y)=uvu^{-1}} \mu(y, q) \\ &= \sup_{f(x)=u; f(y)=v} \mu(xyx^{-1}, q) \end{aligned}$$

(f: epimorfisma)

$$\begin{aligned} &= \sup_{f(y)=v} \mu(y, q) \\ &= f(\mu)(v, q) \end{aligned}$$

Jadi  $f(\mu)$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G.

**Definisi 3.9**

Misalkan  $\lambda$  dan  $\mu$  dua subset Q-fuzzy pada G. Hasil kali dari  $\lambda$  dan  $\mu$  didefinisikan sebagai

$$\lambda \mu(a, q) = \sup_{yz=a} \min\{\lambda(y, q), \mu(z, q)\}, a \in G.$$

**Teorema3.9 :**

Jika  $\lambda$  dan  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G, maka  $\lambda \mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G.

**Bukti :**

Diberikan  $\lambda$  dan  $\mu$  adalah dua subgrup normal Q-fuzzy pada G.

$$\begin{aligned} \text{(i). } \lambda \mu(xy, q) &= \sup_{x_1y_1=x} \min\{\lambda(x_1y_1, q), \mu(x_2y_2, q)\} \\ &\geq \sup_{x_1y_1=x} \min\{\min\{\lambda(x_1, q), \mu(y_1, q)\}, \min\{\lambda(x_2, q), \mu(y_2, q)\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \min\{\sup \min\{\lambda(x_1, q), \mu(y_1, q)\}, \sup \min\{\lambda(x_2, q), \mu(y_2, q)\}\} \\ &\geq \min\{\lambda \mu(x, q), \lambda \mu(y, q)\} \end{aligned}$$

- (ii).  $\lambda \mu(x^{-1}, q) = \sup_{(yz)^{-1}=x^{-1}} \min\{\mu(z^{-1}, q), \lambda(y^{-1}, q)\}$

$$\begin{aligned}
 &= \sup_{x=yz} \min\{\mu(z, q), \lambda(y, q)\} \\
 &= \sup_{x=yz} \min\{\lambda(y, q), \mu(z, q)\} \\
 &= \lambda\mu(x, q)
 \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan  $\lambda\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy :

$$\begin{aligned}
 \lambda\mu(xy x^{-1}, q) &= \sup_{x=yz} \min\{\lambda(xy x^{-1}, q), \mu(xy x^{-1}, q)\} \\
 &= \sup_{x=yz} \min\{\lambda(y, q), \mu(y, q)\}
 \end{aligned}$$

$$= \lambda\mu(y, q)$$

Jadi  $\lambda\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari G.

#### 4. PENUTUP

##### 4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan diatas diperoleh simpulan sebagai berikut :

1. Diberikan Q adalah sebarang himpunan, dan G adalah grup. Pemetaan  $\mu: G \times Q \rightarrow [0,1]$  disebut himpunan Q-fuzzy di grup G.
2. Diberikan G adalah grup dan  $\mu$  adalah himpunan bagian Q-fuzzy dari grup G. Maka  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G jika level subset  $\mu^t, t \in [0,1]$ , adalah subgrup normal dari grup G.
3. Jika  $\mu$  adalah subgrup Q-fuzzy dari grup G, maka  $g\mu g^{-1}$  adalah juga subgrup Q-fuzzy dari grup G, untuk semua  $g \in G$ .
4. Misalkan  $\lambda$  dan  $\mu$  adalah dua subgrup Q-fuzzy dari grup G. Maka  $\lambda \cap \mu$  merupakan subgrup Q-fuzzy dari grup G.
5. Jika  $\lambda$  dan  $\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G, maka  $\lambda\mu$  adalah subgrup normal Q-fuzzy dari grup G.

##### 4.1 Saran

Dalam skripsi ini hanya dicari karakteristik subgrup normal pada Q-fuzzy. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk mengembangkan dengan mencari karakteristik pada struktur aljabar baru yang lain.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Choudhury, F.P. and Chakraborty, A.B. and Khare, S.S. 1980. "A note on fuzzy subgroups and fuzzy homomorphism". *Journal of mathematical analysis and applications*. Vol. 131: hal. 537-553.
- Das, P.S. 1981. "Fuzzy groups and level subgroups". *Journal of mathematical analysis and applications*. Vol. 84: hal. 264-269.
- Prabir Bhattacharya. 1987. "Fuzzy Subgroups". *Journal of mathematical analysis and applications*. Vol. 128: hal. 241-252.
- Rajesh Kumar. 1991. "Homomorphism and fuzzy (fuzzy normal) subgroups". *Fuzzy sets and Systems*. Vol. 44: Hal. 165-168.

Solairaju, A. Nagarajan, R. 2009. "A New Structure and Construction of Q-fuzzy Group". *Advances in Fuzzy mathematics*. Vol. 4: Hal. 23-29.

Vasantha-Kandasamy, W.B. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press

Zadeh, L.A. 1965. "Fuzzy sets". *Information and Control*. Vol. 8: Hal. 338-353.

Priya, T. Ramachandran, T. Nagalakshmi, KT. 2013. "On Q-Fuzzy Normal Subgroups". *International Journal of Computer and Organization Trends*. Vol. 3.

Sukandardan Kusri. 2001. *Struktur Aljabar I*. Surabaya: Unesa University Press.

Fraleigh, John B. 1982. *A First Course in Abstract Algebra*. Publishing Company: Addison-Wesley

