FUZZY SLIGHTLY PRECONTINUITY PADA TOPOLOGI FUZZY

Elita Hartayati
Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : elita_dean@yahoo.com

Prof. Dr. Dwi Juniati, M.Si.
Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : dwi.juniati@yahoo.co.id

Abstrak

Topologi pada himpunan fuzzy disebut topologi fuzzy. Salah satu topik pada topologi fuzzy mengkaji tentang fungsi *fuzzy slightly precontinuous*, aksioma-aksioma pemisahan dan graf *pre-co-closed* fuzzy. Jika diberikan dan (Y, δ_Y) berturut-turut adalah ruang topologi fuzzy, maka suatu fungsi $f: X \to Y$ dikatakan *fuzzy slightly precontinuous* jika untuk setiap titik fuzzy x_ε di X dan setiap himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan memuat $f(x_\varepsilon)$, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε sedemikian hingga $f(\tilde{A}) \subset \tilde{B}$. Selanjutnya, pada makalah ini akan dibahas sifat-sifat fungsi *fuzzy slightly precontinuous*, hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan aksioma-aksioma pemisahan, serta hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan graf *pre-co-closed* fuzzy.
Kata Kunci: topologi fuzzy, *fuzzy slightly precontinuity*, aksioma-aksioma pemisahan, graf *pre-co-closed* fuzzy.

Abstract

Topology on fuzzy sets is called fuzzy topology. One of the topics on fuzzy topological study of fuzzy slightly precontinuous functions, separation axioms and fuzzy pre-co-closed graphs. Let (X, δ_X) and (Y, δ_Y) be fuzzy topological spaces, then a function $f: X \to Y$ is said to be fuzzy slightly precontinuous if for each fuzzy point x_ε in X and each fuzzy open and closed set $\tilde{B}$ in Y containing $f(x_\varepsilon)$, there exists a fuzzy preopen set $\tilde{A}$ in X containing x_ε such that $f(\tilde{A}) \subset \tilde{B}$. Furthermore, in this paper will discuss the properties of fuzzy slightly precontinuous functions, relationships between fuzzy slightly precontinuity and separation axioms and between fuzzy slightly precontinuity and fuzzy pre-co-closed graphs.
Keywords: fuzzy topology, fuzzy slightly precontinuity, separation axioms, fuzzy pre-co-closed graphs.

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Topologi pada himpunan fuzzy disebut topologi fuzzy. Ruang topologi fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh C.L. Chang pada tahun 1968. Sebuah topologi fuzzy pada X adalah sebuah koleksi himpunan fuzzy δ pada subset-subset X, yang mana δ memuat himpunan fuzzy $\tilde{0}$ dan himpunan fuzzy $\tilde{1}$, gabungan semua elemen dari sebarang subset δ termuat di δ dan irisan semua elemen dari subset berhingga δ termuat di δ. Pasangan berurutan (X, δ) disebut ruang topologi fuzzy. Ruang topologi (X, τ) juga merupakan ruang topologi fuzzy dimana setiap subset X yang berada di τ adalah himpunan fuzzy dengan derajatkeanggotaan setiap elemennya pada $\{0,1\}$. Salah satu materi topologi fuzzy mengkaji tentang fungsi *fuzzy slightly precontinuous*, aksioma-aksioma pemisahan (*separation axioms*) dan graf *pre-co-closed* fuzzy.

Pada tahun 2005, Erdal Ekici memperkenalkan konsep tentang *fuzzy slightly precontinuity* yang merupakan perumuman dari prakontinuitas fuzzy yang diperkenalkan oleh Shahna pada tahun 1991 dan beberapa jenis kontinuitas fuzzy yaitu kontinuitas fuzzy, *fuzzy weakly continuity*, *fuzzy* θ*-continuity*, *fuzzy strongly* θ*-continuity*, *fuzzy almost strongly* θ*-continuity*, *fuzzy weakly* θ*-continuity*, *fuzzy almost continuity*, *fuzzy super continuity* dan *fuzzy* δ*-continuity* yang diperkenalkan oleh Erdal Ekici pada tahun 2004. Konsep tersebut telah dipublikasikan menjadi artikel di jurnal internasional yang berjudul "Generalization of Some Fuzzy Functions".

Terinspirasi dari jurnal "Generalization of Some Fuzzy Functions" tersebut, sehingga pada makalah ini dibahas mengenai *fuzzy slightly precontinuity* pada topologi fuzzy dan akan dibuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan sifat-sifat fungsi *fuzzy slightly precontinuous*, hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan aksioma-aksioma pemisahan, serta hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan graf *pre-co-closed* fuzzy.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah pada makalah ini adalah sebagai berikut :

(1) Bagaimana sifat-sifat dari fungsi *fuzzy slightly precontinuous* ?

(2) Bagaimana hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan aksioma-aksioma pemisahan ?

(3) Bagaimana hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan graf *pre-co-closed* fuzzy ?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan makalah ini adalah untuk menjelaskan sifat-sifat fungsi *fuzzy slightly precontinuous*, hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan aksioma-aksioma pemisahan, serta hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan graf *pre-co-closed* fuzzy.

1.4 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat dari penulisan makalah ini yaitu :

(1) Menambah wawasan penulis tentang *fuzzy slightly precontinuity* pada topologi fuzzy beserta sifat-sifat dan hubungannya dengan aksioma-aksioma pemisahan dan graf *pre-co-closed* fuzzy.

(2) Dapat digunakan sebagai tambahan informasi dan referensi bacaan untuk mahasiswa matematika.

1.5 Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam menyusun makalah ini adalah metode kajian pustaka, yaitu demakalah teoritis mengenai objek yang akan dibahas dengan cara mencari, menelaah, memahami, mendalami dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (sumber buku bacaan, referensi, jurnal, atau hasil penelitian lain untuk menunjang penelitian). Adapun jurnal utama yang digunakan adalah Generalization of Some Fuzzy Functions (Erdal Ekici, 2005) dan buku pendukung yang digunakan adalah Fuzzy Topology (Palaniappan, 2007).

2. LANDASAN TEORI

2.1 Relasi dan Fungsi

Definisi 2.1.1

Diberikan fungsi $f: X \to Y$. Fungsi graf $g: X \to X \times Y$ dari fungsi f didefinisikan oleh $g(x) = (x, f(x))$, untuk setiap $x \in X$.

2.2 Himpunan Fuzzy

Definisi 2.2.1

Jika X adalah himpunan tak kosong maka himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X didefinisikan :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\}$$

dimana $\mu_{\tilde{A}}: X \to [0,1] = I$. Selanjutnya $\mu_{\tilde{A}}(x)$ disebut derajat keanggotaan dari x, dan fungsi $\mu_{\tilde{A}}$ disebut fungsi keanggotaan dari X . Lebih lanjut, jika derajat keanggotaannya 0, boleh tidak ditulis.

Definisi 2.2.2

I^X adalah koleksi semua himpunan fuzzy pada X.

Definisi 2.2.3

Himpunan fuzzy nol pada X dinotasikan $\tilde{0}$ adalah himpunan fuzzy dimana $\mu_{\tilde{0}}(x) = 0, \forall x \in X$.

Himpunan fuzzy satu pada X dinotasikan $\tilde{1}$ adalah himpunan fuzzy dimana $\mu_{\tilde{1}}(x) = 1, \forall x \in X$.

Definisi 2.2.3

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X. *Support* dari $\tilde{A}$ dinotasikan $supp(\tilde{A})$ dan didefinisikan oleh

$$supp(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Operasi Pada Himpunan Fuzzy

Seperti pada himpunan klasik, himpunan fuzzy juga memiliki operasi-operasi himpunan. Operasi-operasi pada himpunan fuzzy adalah

Definisi 2.2.5

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy di X. $\tilde{A}$ dikatakan sama dengan $\tilde{B}$ dan dinotasikan dengan $\tilde{A} = \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X$.

Definisi 2.2.6

Komplemen dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X adalah himpunan fuzzy $\tilde{A}^C$ pada X , dengan derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$.

Definisi 2.2.7

Gabungan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}, \tilde{B}$ pada X adalah himpunan fuzzy $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ pada X , dengan derajat keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A} \vee \tilde{B}}(x) = max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \forall x \in X.$$

Definisi 2.2.8

Irisan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}, \tilde{B}$ pada X adalah himpunan fuzzy $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ pada X , dengan derajat keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A} \wedge \tilde{B}}(x) = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \forall x \in X.$$

Definisi 2.2.9

Misalkan $\tilde{A}_j$ adalah himpunan fuzzy pada X, $\forall j \in J$ dengan J adalah himpunan indeks, maka gabungan dan irisan berturut-turut pada himpunan fuzzy tersebut didefinisikan :

$$\vee_{j\in J}\tilde{A}_j = \left\{\left(x, \mu_{\vee_{j\in J}\tilde{A}_j}(x)\right) : x \in X\right\}$$

dimana $\mu_{\vee_{j\in J}\tilde{A}_j}(x) = sup\left\{\mu_{\tilde{A}_j}(x) : j \in J\right\}, \forall x \in X$.

$$\wedge_{j\in J}\tilde{A}_j = \left\{\left(x, \mu_{\wedge_{j\in J}\tilde{A}_j}(x)\right) : x \in X\right\}$$

dimana $\mu_{\vee_{j\in J}\tilde{A}_j}(x) = inf\left\{\mu_{\tilde{A}_j}(x) : j \in J\right\}, \forall x \in X$.

Definisi 2.2.10

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy di X. $\tilde{A}$ disebut subset dari $\tilde{B}$ dinotasikan dengan $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X$.

Definisi 2.2.11

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy di X. $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dikatakan beririsan jika dan hanya jika ada $x \in X$ sedemikian hingga $\mu_{\tilde{A}\wedge\tilde{B}}(x) \ne 0$.

Definisi 2.2.12

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X dan $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy pada Y. Hasil kali silang himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy $\tilde{A} \times \tilde{B}$ pada $X \times Y$ dengan derajat keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}\times\tilde{B}}(x,y) = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}, \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Teorema 2.2.1

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X dan $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy pada Y, maka $\left(\tilde{A} \times \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}^C \times \tilde{1}\right) \vee \left(\tilde{1} \times \tilde{B}^C\right)$.

Definisi 2.2.13

Diberikan fungsi $f: X \to Y, \tilde{A} \in I^X$ dan $\tilde{B} \in I^Y$. Maka:

(i) Peta dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy $f(\tilde{A})$ pada Y dengan derajat keanggotaan $\forall y \in Y$

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} sup\ \{\mu_{\tilde{A}}(x) : x \in f^{-1}(y)\}, & f^{-1}(y) \ne \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

(ii) Prapeta dari himpunan fuzzy $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy $f^{-1}(\tilde{B})$ pada X dengan derajat keanggotaan

$$\mu_{f^{-1}(\tilde{B})}(x) = \mu_{\tilde{B}}(f(x)),\ \forall x \in X$$

Teorema 2.2.2

Diberikan fungsi $f: X \to Y$. Maka berlaku :

(i) $f^{-1}(\tilde{B}^C) = \left(f^{-1}(\tilde{B})\right)^C$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}$ di Y.

(ii) $f^{-1}(\tilde{B}_1 \wedge \tilde{B}_2) = f^{-1}(\tilde{B}_1) \wedge f^{-1}(\tilde{B}_2)$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}_1$ dan $\tilde{B}_2$ di Y.

(iii) $f(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2) \subset f(\tilde{A}_1) \wedge f(\tilde{A}_2)$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{A}_1$ dan $\tilde{A}_2$ di X.

(iv) $f\left(f^{-1}(\tilde{B})\right) \subset \tilde{B}$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}$ di Y.

(v) $\tilde{A} \subset f^{-1}\left(f(\tilde{A})\right)$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{A}$ di X.

(vi) Jika $\tilde{B}_1 \subset \tilde{B}_2$ maka $f^{-1}(\tilde{B}_1) \subset f^{-1}(\tilde{B}_2)$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}_1$ dan $\tilde{B}_2$ di Y.

(vii) Jika $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2$ maka $f(\tilde{A}_1) \subset f(\tilde{A}_2)$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{A}_1$ dan $\tilde{A}_2$ di X.

Akibat 2.2.1

Diberikan fungsi $f: X \to Y, \tilde{A} \in I^X$ dan $\tilde{B} \in I^Y$

(i) Jika fungsi f injektif maka $f(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2) = f(\tilde{A}_1) \wedge f(\tilde{A}_2)$

(ii) Jika fungsi f injektif maka $\tilde{A} = f^{-1}\left(f(\tilde{A})\right)$.

(iii) Jika fungsi f surjektif maka $f\left(f^{-1}(\tilde{B})\right) = \tilde{B}$.

Teorema 2.2.3

Diberikan fungsi $f: X \to Y$. Fungsi $g: X \to X \times Y$ adalah fungsi graf dari fungsi f. Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X, $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy pada Y, dan $\tilde{A} \times \tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy pada $X \times Y$. Maka $g^{-1}(\tilde{A} \times \tilde{B}) = \tilde{A} \wedge f^{-1}(\tilde{B})$.

2.3 Topologi Fuzzy dan Ruang Topologi Fuzzy

Definisi 2.3.1

Sebuah koleksi himpunan fuzzy $\delta \subset I^X$ disebut topologi fuzzy pada X jika memenuhi aksioma sebagai berikut :

(i) $\tilde{0} \in \delta, \tilde{1} \in \delta$

(ii) $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \delta \Rightarrow \tilde{A} \wedge \tilde{B} \in \delta$

(iii) $\forall \left(\tilde{A}_j\right)_{j\in J} \in \delta \Longrightarrow \vee_{j\in J}\tilde{A}_j \in \delta$.

Himpunan X dengan sebuah topologi fuzzy δ disebut ruang topologi fuzzy, dan dinotasikan dengan pasangan berurutan (X, δ).

Definisi 2.3.2

Jika δ adalah suatu topologi fuzzy pada X, maka anggota-anggota dari δ disebut himpunan fuzzy buka.

Definisi 2.3.3

Himpunan fuzzy $\tilde{K}$ dikatakan tertutup jika $\tilde{K}^C \in \delta$. Dinotasikan dengan δ^C untuk koleksi semua himpunan fuzzy tutup.

Definisi 2.3.4

Misalkan (X, δ) adalah ruang topologi fuzzy. $\mathcal{B}$ subkoleksi himpunan dari δ disebut basis dari topologi fuzzy δ jika dan hanya jika untuk setiap $\tilde{A} \in \delta$, terdapat himpunan indeks J dengan $\{\tilde{A}_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{B}$, sehingga $\tilde{A} = \bigvee_{j \in J} \tilde{A}_j$.

Definisi 2.3.5

Misalkan (X, δ_X) dan (Y, δ_Y) adalah ruang topologi fuzzy. Hasil kali topologi fuzzy pada $X \times Y$ adalah topologi fuzzy yang dibangkitkan oleh koleksi $\{\tilde{A}_j \times \tilde{B}_k : \tilde{A}_j \in \delta_X, \tilde{B}_k \in \delta_Y\}$ yang membentuk sebuah basis untuk hasil kali topologi fuzzy pada $X \times Y$.

Teorema 2.3.1

Misalkan (X, δ_X) dan (Y, δ_Y) berturut-turut adalah ruang topologi fuzzy pada X dan Y. Jika $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy tutup di X dan $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy tutup di Y maka $\tilde{A} \times \tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy tutup di $X \times Y$.

Definisi 2.3.6

Sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ di X disebut titik fuzzy jika dan hanya jika bernilai 0 untuk semua $y \in X$, kecuali untuk suatu $x \in X$. Jika $\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha$, maka titik fuzzy tersebut dapat dinotasikan dengan x_α.

Definisi 2.3.7

Misalkan x_ε dan y_α adalah dua tiitik fuzzy di X. x_ε dikatakan sama dengan y_α dan dinotasikan dengan $x_\varepsilon = y_\alpha$ jika dan hanya jika $supp(x_\varepsilon) = supp(y_\alpha)$.

Definisi 2.3.8

Untuk sebarang titik fuzzy x_ε dan sebarang himpunan fuzzy $\tilde{A}$, dikatakan x_ε termuat di $\tilde{A}$ dan dinotasikan dengan $x_\varepsilon \in \tilde{A}$ jika dan hanya jika $\varepsilon \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$.

Definisi 2.3.9

Interior dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X adalah himpunan fuzzy pada X dengan derajat keanggotaan

$$\mu_{int(\tilde{A})}(x) = sup\{\mu_{\tilde{E}}(x) : \tilde{E} \subset \tilde{A}, \tilde{E} \in \delta\}$$

Interior dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X dinotasikan dengan $int(\tilde{A})$ atau $A°$.

Definisi 2.3.10

Closure dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X adalah himpunan fuzzy pada X dengan derajat keanggotaan

$$\mu_{cl(\tilde{A})}(x) = inf\{\mu_{\tilde{B}}(x) : \tilde{A} \subset \tilde{B}, \tilde{B}^C \in \delta\}$$

Closure dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dinotasikan dengan $cl(\tilde{A})$ atau $\bar{\tilde{A}}$.

Definisi 2.3.11

Misalkan (X, δ) adalah ruang topologi fuzzy. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ di X disebut prabuka jika $\tilde{A} \subset int(cl(\tilde{A}))$. Komplemen dari himpunan fuzzy prabuka disebut pratutup.

Teorema 2.3.2

Misalkan (X, δ) adalah ruang topologi fuzzy. Jika $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di X, maka $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy prabuka.

Teorema 2.3.3

Jika $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy prabuka di X maka $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy prabuka di X.

Definisi 2.3.12

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Fungsi $f: X \to Y$ dikatakan buka fuzzy jika untuk setiap himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang buka di X, $f(\tilde{A})$ adalah himpunan fuzzy buka di Y.

Definisi 2.3.13

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Fungsi $f: X \to Y$ dikatakan prakontinu fuzzy jika untuk setiap himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka di Y, $f^{-1}(\tilde{B})$ merupakan himpunan fuzzy prabuka di X.

Definisi 2.3.14

Basis filter fuzzy pada X adalah koleksi tak kosong $\mathcal{F}$ dari himpunan-himpunan fuzzy pada X yang memenuhi :

(i) $\tilde{0} \notin \mathcal{F}$

(ii) Jika $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}$ maka terdapat $\tilde{C} \in \mathcal{F}$ sedemikian hingga $\tilde{C} \subset (\tilde{A} \cap \tilde{B})$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Fungsi *Fuzzy Slightly Precontinuous*

Definisi 3.1.1

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Fungsi $f: X \to Y$ dikatakan *fuzzy slightly precontinuous* jika untuk setiap titik fuzzy x_ε di X dan setiap himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan memuat $f(x_\varepsilon)$, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε sedemikian hingga $f(\tilde{A}) \subset \tilde{B}$.

Teorema 3.1.1

Diberikan fungsi $f: X \to Y$ dengan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

(1) Fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*;
(2) Untuk setiap himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y, $f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy prabuka;
(3) Untuk setiap himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y, $f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy pratutup;
(4) Untuk setiap himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y, $f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy prabuka sekaligus pratutup.

Bukti :

$(1 \to 2)$: Diberikan fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*, maka untuk setiap titik fuzzy x_ε di X dan setiap himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan memuat $f(x_\varepsilon)$, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}_{x_\varepsilon}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε sedemikian hingga $f(\tilde{A}_{x_\varepsilon}) \subset \tilde{B}$. Karena $f(x_\varepsilon) \in \tilde{B}$ maka $x_\varepsilon \in f^{-1}(\tilde{B})$. Karena $f(\tilde{A}_{x_\varepsilon}) \subset \tilde{B}$ maka $f^{-1}\left(f(\tilde{A}_{x_\varepsilon})\right) \subset f^{-1}(\tilde{B})$. Karena $\tilde{A}_{x_\varepsilon} \subset f^{-1}\left(f(\tilde{A}_{x_\varepsilon})\right)$ dan $f^{-1}\left(f(\tilde{A}_{x_\varepsilon})\right) \subset f^{-1}(\tilde{B})$ maka $\tilde{A}_{x_\varepsilon} \subset f^{-1}(\tilde{B})$. Sehingga $f^{-1}(\tilde{B}) = \bigvee_{x_\varepsilon \in f^{-1}(\tilde{B})} \tilde{A}_{x_\varepsilon}$. Karena $\tilde{A}_{x_\varepsilon}$ adalah himpunan fuzzy prabuka di X maka $f^{-1}(\tilde{B}) = \bigvee_{x_\varepsilon \in f^{-1}(\tilde{B})} \tilde{A}_{x_\varepsilon}$ adalah himpunan fuzzy prabuka.

$(2 \to 3)$: Misal $\tilde{B}$ adalah sebarang himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di Y, maka $\tilde{B}^C$ adalah himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di Y. Berdasarkan (2), diperoleh $f^{-1}(\tilde{B}^C) = \left(f^{-1}(\tilde{B})\right)^C$ adalah himpunan fuzzy prabuka. Oleh karena itu, $f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy pratutup.

$(3 \to 4)$: Misal $\tilde{B}$ adalah sebarang himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di Y, maka $\tilde{B}^C$ adalah himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di Y. Berdasarkan (3), diperoleh $f^{-1}(\tilde{B})$ dan $f^{-1}(\tilde{B}^C) = \left(f^{-1}(\tilde{B})\right)^C$ adalah himpunan fuzzy pratutup. Karena $\left(f^{-1}(\tilde{B})\right)^C$ adalah himpunan fuzzy pratutup, maka $\left(\left(f^{-1}(\tilde{B})\right)^C\right)^C = f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy prabuka. Jadi $f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy prabuka sekaligus pratutup.

$(4 \to 1)$: Misal x_ε adalah sebarang titik fuzzy di X dan $\tilde{B}$ adalah sebarang himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di Y yang memuat $f(x_\varepsilon)$. Berdasarkan (4), diperoleh $f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy prabuka. Karena $f(x_\varepsilon) \in \tilde{B}$ maka $x_\varepsilon \in f^{-1}(\tilde{B})$. Dengan memilih $\tilde{A} = f^{-1}(\tilde{B})$ maka diperoleh $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy prabuka dengan $x_\varepsilon \in \tilde{A}$ dan $f(\tilde{A}) = f\left(f^{-1}(\tilde{B})\right) \subset \tilde{B}$. Jadi fungsi f *fuzzy slightly precontinuous.*

Contoh 3.1.1

Diberikan $\tilde{A} = \{(a, 0.3), (b, 0.4)\}$ dan $\tilde{B} = \{(p, 0.7), (q, 0.5)\}$ berturut-turut adalah himpunan fuzzy pada $X = \{a, b\}$ dan $Y = \{p, q\}$. Misalkan $\delta_X = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{A}\}$ dan $\delta_Y = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{B}\}$ berturut-turut adalah topologi fuzzy pada X dan Y. Fungsi $f: X \to Y$ didefinisikan oleh $f = \{(a, p), (b, q)\}$. Himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di Y adalah $\tilde{0}$ dan $\tilde{1}$. Karena $f^{-1}(\tilde{0}) = \tilde{0}$ dan $f^{-1}(\tilde{1}) = \tilde{1}$ adalah himpunan fuzzy prabuka, maka berdasarkan teorema 3.1.1, fungsi f merupakan fungsi *fuzzy slightly precontinuous*.

Teorema 3.1.2

Diberikan fungsi $f: X \to Y$ dengan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Misalkan fungsi $g: X \to X \times Y$ adalah fungsi graf dari fungsi f. Jika fungsi g *fuzzy slightly precontinuous*, maka fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*.

Bukti :

Misal $\tilde{B}$ adalah sebarang himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di Y. Karena $\tilde{1}$ dan $\tilde{B}$ berturut-turut merupakan himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di X dan Y, maka $\tilde{1} \times \tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di $X \times Y$. Karena fungsi g *fuzzy slightly precontinuous* maka $g^{-1}(\tilde{1} \times \tilde{B}) = \tilde{1} \wedge f^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy prabuka di X. Jadi berdasarkan teorema 3.1.1, fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*.

Definisi 3.1.2

Diberikan X adalah ruang topologi fuzzy. Basis filter fuzzy $\mathcal{F}$ dikatakan p-konvergen ke titik fuzzy x_ε di X jika untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ sedemikian hingga $\tilde{A} \subset \tilde{B}$.

Definisi 3.1.3

Diberikan X adalah ruang topologi fuzzy. Basis filter fuzzy $\mathcal{F}$ dikatakan co-konvergen ke titik fuzzy x_ε di X jika untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di X dan memuat x_ε, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ sedemikian hingga $\tilde{A} \subset \tilde{B}$.

Adapun hubungan antara definisi 3.1.2 dan definisi 3.1.3 yaitu jika diberikan X adalah ruang topologi fuzzy dan basis filter fuzzy $\mathcal{F}$ co-konvergen ke titik fuzzy x_ε di X, maka basis filter fuzzy $\mathcal{F}$ p-konvergen ke titik fuzzy x_ε di X, sebab setiap himpunan fuzzy buka sekaligus tuup di X merupakan himpunan fuzzy prabuka di X.

Teorema 3.1.3

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Jika fungsi $f: X \to Y$ *fuzzy slightly precontinuous*, maka untuk setiap titik fuzzy x_ε di X dan setiap basis filter fuzzy $\mathcal{F}$ di X yang p-konvergen ke x_ε, $f(\mathcal{F})$ co-konvergen ke $f(x_\varepsilon)$.

Bukti :

Misalkan x_ε adalah sebarang titik fuzzy di X dan $\mathcal{F}$ adalah sebarang basis filter fuzzy di X yang p-konvergen ke x_ε. Karena fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*, maka untuk setiap himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan memuat $f(x_\varepsilon)$, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε sedemikian hingga $f(\tilde{A}) \subset B$. Karena basis filter fuzzy $\mathcal{F}$ p-konvergen ke x_ε, maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{C} \in F$ sedemikian hingga $\tilde{C} \subset \tilde{A}$. Dengan memilih $f(\tilde{C}) \in f(\mathcal{F})$, maka diperoleh $f(\tilde{C}) \subset f(\tilde{A}) \subset \tilde{B}$. Jadi $f(\mathcal{F})$ co-konvergen ke $f(x_\varepsilon)$.

Jelas bahwa jika suatu fungsi $f: X \to Y$ prakontinu fuzzy, maka fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*. Contoh berikut menunjukkan bahwa pernyataan tersebut tidak berlaku sebaliknya.

Contoh 3.1.2

Diberikan $\tilde{A} = \{(a, 0.3), (b, 0.4)\}$ dan $\tilde{B} = \{(p, 0.7), (q, 0.5)\}$ berturut-turut adalah himpunan fuzzy pada $X = \{a, b\}$ dan $Y = \{p, q\}$. Misalkan $\delta_X = \{\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{A}\}$ dan $\delta_Y = \{\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{B}\}$ berturut-turut adalah topologi fuzzy pada X dan Y. Fungsi $f: X \to Y$ yang didefinisikan oleh $f = \{(a, p), (b, q)\}$ merupakan fungsi *fuzzy slightly precontinuous* tetapi fungsi f tidak prakontinu fuzzy.

Teorema 3.1.4

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy dengan Y memiliki basis yang hanya memuat himpunan-himpunan fuzzy buka sekaligus tutup. Jika fungsi $f: X \to Y$ *fuzzy slightly precontinuous*, maka fungsi f prakontinu fuzzy.

Bukti :

Misalkan x_ε adalah sebarang titik fuzzy di X dan $\tilde{C}$ adalah sebarang himpunan fuzzy buka di Y yang memuat $f(x_\varepsilon)$. Karena Y hanya memiliki basis yang memuat himpunan-himpunan fuzzy buka sekaligus tutup, maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup dan memuat $f(x_\varepsilon)$ sedemikian hingga $\tilde{B} \subset \tilde{C}$. Karena fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*, maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε sedemikian hingga $f(\tilde{A}) \subset \tilde{B} \subset \tilde{C}$. Jadi fungsi f prakontinu fuzzy.

3.2 Aksioma-aksioma Pemisahan dan Graf *Pre-co-closed* Fuzzy

Definisi 3.2.1

Sebuah ruang topologi fuzzy X disebut ruang fuzzy p-T_0 jika untuk setiap pasang titik fuzzy berbeda di X, terdapat himpunan fuzzy prabuka di X yang memuat salah satu titik fuzzy tersebut.

Definisi 3.2.2

Sebuah ruang topologi fuzzy X disebut ruang fuzzy co-T_0 jika untuk setiap pasang titik fuzzy berbeda di X, terdapat himpunan fuzzy buka sekaligus tutup di X yang memuat tepat salah satu titik fuzzy tersebut.

Definisi 3.2.2

Sebuah ruang topologi fuzzy X disebut ruang fuzzy p-T_1 jika untuk setiap pasang titik fuzzy berbeda di X misalkan x_ε dan y_α, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang prabuka di X dan berturut-turut memuat x_ε dan y_α sedemikian hingga $y_\alpha \notin \tilde{A}$ dan $x_\varepsilon \notin \tilde{B}$.

Definisi 3.2.3

Sebuah ruang topologi fuzzy X disebut ruang fuzzy co-T_1 jika untuk setiap pasang titik fuzzy berbeda di X misalkan x_ε dan y_α, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di X dan berturut-turut memuat x_ε dan y_α sedemikian hingga $y_\alpha \notin \tilde{A}$ dan $x_\varepsilon \notin \tilde{B}$.

Definisi 3.2.5

Sebuah ruang topologi fuzzy X disebut ruang fuzzy p-T_2 (Ruang Fuzzy p-Hausdorff) jika untuk setiap pasang titik fuzzy berbeda di X misalkan x_ε dan y_α, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang prabuka di X dan tidak beririsan sedemikian hingga $x_\varepsilon \in \tilde{A}$ dan $y_\alpha \in \tilde{B}$.

Definisi 3.2.6

Sebuah ruang topologi fuzzy X disebut ruang fuzzy co-T_2 (Ruang fuzzy co-Hausdorff) jika untuk setiap pasang titik fuzzy berbeda di X misalkan x_ε dan y_α, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di X dan tidak beririsan sedemikian hingga $x_\varepsilon \in \tilde{A}$ dan $y_\alpha \in \tilde{B}$.

Definisi 3.2.7

Sebuah ruang topologi fuzzy X disebut ruang fuzzy p-reguler kuat jika untuk setiap himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang pratutup di X dan setiap titik fuzzy $x_\varepsilon \notin \tilde{A}$, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{B}$ dan $\tilde{C}$ yang buka di X dan tidak beririsan sedemikian hingga $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ dan $x_\varepsilon \in \tilde{C}$.

Definisi 3.2.8

Sebuah ruang topologi fuzzy X disebut ruang fuzzy co-reguler jika untuk setiap himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang buka sekaligus tutup di X dan setiap titik fuzzy $x_\varepsilon \notin \tilde{A}$, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{B}$ dan $\tilde{C}$ yang buka di X dan tidak beririsan sedemikian hingga $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ dan $x_\varepsilon \in \tilde{C}$.

Definisi 3.2.9

Sebuah ruang toplogi fuzzy X disebut ruang fuzzy p-normal kuat jika untuk setiap pasang himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang pratutup di X dan tidak beririsan, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{C}$ dan $\tilde{D}$ yang buka di X dan tidak beririsan sedemikian hingga $\tilde{A} \subset \tilde{C}$ dan $\tilde{B} \subset \tilde{D}$.

Definisi 3.2.10

Sebuah ruang topologi fuzzy X disebut ruang fuzzy co-normal jika untuk setiap pasang himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di X dan tidak beririsan, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{C}$ dan $\tilde{D}$ yang buka di X dan tidak beririsan sedemikian hingga $\tilde{A} \subset \tilde{C}$ dan $\tilde{B} \subset \tilde{D}$.

Teorema 3.2.1

Diberikan fungsi $f: X \to Y$ merupakan fungsi *fuzzy slightly precontinuous* dan fungsi injektif. Jika ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-T_1, maka ruang topologi fuzzy X adalah ruang fuzzy p-T_1.

Bukti :

Misalkan x_ε dan y_α adalah sebarang titik fuzzy berbeda di X. Karena fungsi f injektif maka $f(x_\varepsilon)$ dan $f(y_\alpha)$ adalah titik fuzzy berbeda di Y dan berlaku $f^{-1}(f(x_\varepsilon)) = x_\varepsilon$ dan $f^{-1}(f(y_\alpha)) = y_\alpha$. Karena ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-T_1 maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y sedemikian sehingga $f(x_\varepsilon) \in \tilde{A}, f(x_\varepsilon) \notin \tilde{B}, f(y_\alpha) \in \tilde{B}$, dan $f(y_\alpha) \notin \tilde{A}$. Karena fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*, maka berdasarkan teorema 3.1.1 diperoleh $f^{-1}(\tilde{A})$ dan $f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy prabuka di X. Sehingga diperoleh $x_\varepsilon \in f^{-1}(\tilde{A}), y_\alpha \in f^{-1}(\tilde{B}), x_\varepsilon \notin f^{-1}(\tilde{A})$ dan $y_\alpha \notin f^{-1}(\tilde{B})$. Jadi ruang topologi fuzzy X adalah ruang fuzzy p-T_1.

Teorema 3.2.2

Diberikan fungsi $f: X \to Y$ merupakan fungsi *fuzzy slightly precontinuous* dan fungsi injektif. Jika ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-T_2, maka ruang topologi fuzzy X adalah ruang fuzzy p-T_2.

Bukti :

Misalkan x_ε dan y_α adalah sebarang titik fuzzy berbeda di X. Karena fungsi f injektif maka $f(x_\varepsilon)$ dan $f(y_\alpha)$ adalah titik fuzzy berbeda di Y dan berlaku $f^{-1}(f(x_\varepsilon)) = x_\varepsilon$ dan $f^{-1}(f(y_\alpha)) = y_\alpha$. Karena ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-T_2 maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan tidak beririsan sedemikian hingga $f(x_\varepsilon) \in \tilde{A}$ dan $f(y_\alpha) \in \tilde{B}$. Karena fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*, maka berdasarkan teorema 3.1.1 diperoleh $f^{-1}(\tilde{A})$ dan $f^{-1}(\tilde{B})$ adalah himpunan fuzzy prabuka di X. Karena himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ tidak beririsan maka $\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \tilde{0}$. Akibatnya $f^{-1}(\tilde{A}) \wedge f^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = \tilde{0}$. Hal ini berarti $f^{-1}(\tilde{A})$ dan $f^{-1}(\tilde{B})$ tidak beririsan. Dan diperoleh $x_\varepsilon \in f^{-1}(\tilde{A}), y_\alpha \in f^{-1}(\tilde{B})$. Jadi ruang topologi fuzzy X adalah ruang fuzzy p-T_1.

Teorema 3.2.2

Diberikan fungsi $f: X \to Y$ merupakan fungsi *fuzzy slightly precontinuous*, fungsi injektif dan fungsi buka fuzzy. Jika ruang topologi fuzzy X adalah ruang fuzzy p-regular kuat, maka ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-regular.

Bukti :

Ambil sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan titik fuzzy $y_\varepsilon \notin \tilde{B}$. Misalkan $y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$ dan $\tilde{B} = f(\tilde{A})$. Karena fungsi f injektif, maka $f^{-1}(y_\varepsilon) = f^{-1}(f(x_\varepsilon)) = x_\varepsilon$ dan $f^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(f(\tilde{A})) = \tilde{A}$. Karena $y_\varepsilon \notin \tilde{B}$ maka diperoleh $x_\varepsilon \notin \tilde{A}$. Karena fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*, maka berdasarkan teorema 3.1.1 diperoleh $f^{-1}(\tilde{B}) = \tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pratutup di X. Karena ruang topologi fuzzy X adalah ruang fuzzy p-reguler kuat, maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{C}$ dan $\tilde{D}$ yang buka di X dan tidak beririsan sedemikian hingga $\tilde{A} \subset \tilde{C}$ dan $x_\varepsilon \in \tilde{D}$. Karena fungsi f adalah fungsi buka fuzzy, maka $f(\tilde{C})$ dan $f(\tilde{D})$ adalah himpunan fuzzy buka di Y. Karena himpunan fuzzy $\tilde{C}$ dan $\tilde{D}$ tidak beririsan maka $\tilde{C} \wedge \tilde{D} = \tilde{0}$. Karena fungsi f injektif maka $f(\tilde{C}) \wedge f(\tilde{D}) = f(\tilde{C} \wedge \tilde{D}) = \tilde{0}$. Hal ini berarti $f(\tilde{C})$ dan $f(\tilde{D})$ tidak beririsan. Sehingga diperoleh $\tilde{B} = f(\tilde{A}) \subset f(\tilde{C})$ dan $y_\varepsilon = f(x_\varepsilon) \in f(\tilde{D})$. Jadi ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-reguler.

Teorema 3.2.3

Diberikan fungsi $f: X \to Y$ *fuzzy slightly precontinuous*, injektif dan merupakan fungsi buka fuzzy. Jika ruang topologi fuzzy X adalah ruang fuzzy p-normal kuat, maka ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-normal.

Bukti :

Ambil sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}_1$ dan $\tilde{B}_2$ yang buka sekaligus tutup di Y dan tidak beririsan. Misalkan $\tilde{B}_1 = f(\tilde{A}_1)$ dan $\tilde{B}_2 = f(\tilde{A}_2)$. Karena fungsi f injektif, maka $f^{-1}(\tilde{B}_1) = f^{-1}(f(\tilde{A}_1)) = \tilde{A}_1$ dan $f^{-1}(\tilde{B}_2) = f^{-1}(f(\tilde{A}_2)) = \tilde{A}_2$. Karena fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*, maka berdasarkan teorema 3.1.1

diperoleh $f^{-1}(\tilde{B}_1) = \tilde{A}_1$ dan $f^{-1}(\tilde{B}_2) = \tilde{A}_2$ adalah himpunan fuzzy pratutup di X. Karena himpunan fuzzy $\tilde{B}_1$ dan $\tilde{B}_2$ tidak beririsan maka $\tilde{B}_1 \wedge \tilde{B}_2 = \tilde{0}$. Akibatnya $\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2 = f^{-1}(\tilde{B}_1) \wedge f^{-1}(\tilde{B}_2) = f^{-1}(\tilde{B}_1 \wedge \tilde{B}_2) = \tilde{0}$. Hal ini berarti $\tilde{A}_1$ dan $\tilde{A}_2$ tidak beririsan. Karena X adalah ruang topologi fuzzy p-normal kuat, maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{C}_1$ dan $\tilde{C}_2$ yang buka di X dan tidak beririsan sedemikian hingga $\tilde{A}_1 \subset \tilde{C}_1$ dan $\tilde{A}_2 \subset \tilde{C}_2$. Karena fungsi f adalah fungsi buka fuzzy, maka $f(\tilde{C}_1)$ dan $f(\tilde{C}_2)$ adalah himpunan fuzzy buka di Y. Karena himpunan fuzzy $\tilde{C}_1$ dan $\tilde{C}_2$ tidak beririsan maka $\tilde{C}_1 \wedge \tilde{C}_2 = \tilde{0}$. Karena fungsi f injektif maka $f(\tilde{C}_1) \wedge f(\tilde{C}_2) = f(\tilde{C}_1 \wedge \tilde{C}_2) = \tilde{0}$. Hal ini berarti $f(\tilde{C}_1)$ dan $f(\tilde{C}_2)$ tidak beririsan. Sehingga diperoleh $\tilde{B}_1 = f(\tilde{A}_1) \subset f(\tilde{C}_1)$ dan $\tilde{B}_2 = f(\tilde{A}_2) \subset f(\tilde{C}_2)$. Jadi ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-normal.

Definisi 3.2.11

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Misalkan fungsi $f: X \to Y$. Graf dari fungsi f adalah himpunan fuzzy pada $X \times Y$, dinotasikan $G(f)$ dan didefinisikan

$$G(f) = \left\{\left((a,b), \mu_{G(f)}(a,b)\right) | a \in X, b \in Y\right\}$$

dengan

$$\mu_{G(f)}(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{jika } f(a) = b \\ 0 & \text{jika } f(a) \neq b \end{cases}$$

Definisi 3.2.12

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Misalkan fungsi $f: X \to Y$. Sebuah graf $G(f)$ dari fungsi f disebut *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$ jika untuk setiap x_ε di X dan y_α di Y dengan $f(x) \neq y$, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε serta himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan memuat y_α sedemikian sehingga $(\tilde{A} \times \tilde{B}) \wedge G(f) = \tilde{0}$.

Lemma 3.2.5

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Sebuah graf $G(f)$ dari fungsi $f: X \to Y$ disebut *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$ jika dan hanya jika untuk setiap x_ε di X dan y_α di Y dengan $f(x) \neq y$, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε serta himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan memuat y_α sedemikian sehingga $f(\tilde{A}) \wedge \tilde{B} = \tilde{0}$.

Teorema 3.2.6

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Jika fungsi $f: X \to Y$ *fuzzy slightly precontinuous* dan ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-Haussdorff, maka graf $G(f)$ *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$.

Bukti :

Ambil sebarang titik fuzzy x_ε di X dan y_α di Y dengan $f(x) \neq y$, maka $f(x_\varepsilon) \neq y_\alpha$. Karena ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-Hausdorff, maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{B}$ dan $\tilde{C}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan tidak beririsan sedemikian hingga $f(x_\varepsilon) \in \tilde{B}$ dan $y_\alpha \in \tilde{C}$. Karena fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*, maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε sedemikian hingga $f(\tilde{A}) \subset \tilde{B}$. Karena himpunan fuzzy $\tilde{B}$ dan $\tilde{C}$ tidak beririsan, maka $\tilde{B} \wedge \tilde{C} = \tilde{0}$. Karena $f(\tilde{A}) \subset \tilde{B}$ maka $f(\tilde{A}) \wedge \tilde{C} = \tilde{0}$. Sehingga diperoleh $x_\varepsilon \in \tilde{A}$, $y_\alpha \in \tilde{C}$ dan $f(\tilde{A}) \wedge \tilde{C} = \tilde{0}$. Jadi berdasarkan lemma 3.2.5, graf $G(f)$ *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$.

Teorema 3.2.7

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Jika fungsi $f: X \to Y$ prakontinu fuzzy dan ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-T_1, maka graf $G(f)$ *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$.

Bukti :

Ambil sebarang titik fuzzy x_ε di X dan y_α di Y dengan $f(x) \neq y$, maka $f(x_\varepsilon) \neq y_\alpha$. Karena ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy co-T_1 maka terdapat himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y sedemikian hingga $f(x_\varepsilon) \in \tilde{B}$ dan $y_\alpha \notin \tilde{B}$. Karena fungsi f prakontinu fuzzy, maka fungsi f *fuzzy slightly precontinuous*. Akibatnya terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X sedemikian hingga $x_\varepsilon \in \tilde{A}$ dan $f(\tilde{A}) \subset \tilde{B}$. Karena $y_\alpha \notin \tilde{B}$ maka $y_\alpha \in \tilde{B}^C$. Sehingga diperoleh $x_\varepsilon \in \tilde{A}$, $y_\alpha \in \tilde{B}^C$ dan $f(\tilde{A}) \wedge \tilde{B}^C = \tilde{0}$. Jadi berdasarkan lemma 3.2.5, graf $G(f)$ *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$.

Teorema 3.2.8

Misalkan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Diberikan graf $G(f)$ dari fungsi $f: X \to Y$, dengan graf $G(f)$ *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$. Jika fungsi f injektif, maka ruang topologi fuzzy X adalah ruang fuzzy p-T_1.

Bukti :

Misalkan x_ε dan y_α adalah sebarang titik fuzzy berbeda di X. Karena fungsi f injektif maka $f(x) \neq f(y)$. Karena graf $G(f)$ *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$, maka berdasarkan lemma 3.2.5, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y sedemikian hingga $x_\varepsilon \in \tilde{A}, f(y_\alpha) \in \tilde{B}$ dan $f(\tilde{A}) \wedge \tilde{B} = \tilde{0}$. Karena fungsi f injektif, maka $f^{-1}\left(f(\tilde{A})\right) = \tilde{A}$. Akibatnya $\tilde{A} \wedge f^{-1}(\tilde{B}) = \tilde{0}$. Sehingga diperoleh $x_\varepsilon \in \tilde{A}, y_\alpha \in f^{-1}(\tilde{B})$, $y_\alpha \notin \tilde{A}$ dan $x_\varepsilon \notin$

$f^{-1}(\tilde{B})$. Jadi ruang topologi fuzzy X adalah ruang fuzzy p-T_1.

Definisi 3.2.14

Misalkan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Sebuah fungsi $f: X \to Y$ disebut fungsi prabuka-M fuzzy jika peta dari setiap himpunan fuzzy prabuka di X merupakan himpunan fuzzy prabuka di Y.

Teorema 3.2.9

Misalkan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Diberikan graf $G(f)$ dari fungsi $f: X \to Y$, dengan graf $G(f)$ *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$. Jika fungsi f surjektif dan merupakan fungsi prabuka-M fuzzy, maka ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy p-T_2.

Bukti :

Misalkan y_ε dan z_α adalah sebarang titik fuzzy berbeda di Y. Karena fungsi f surjektif, maka terdapat x_ε di X sedemikian hingga $f(x_\varepsilon) = y_\varepsilon$ dan $f(x) \neq z$. Karena graf $G(f)$ *pre-co-closed* fuzzy di $X \times Y$, maka berdasarkan lemma 3.2.5, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y sedemikian hingga $x_\varepsilon \in \tilde{A}$, $z_\alpha \in \tilde{B}$ dan $f(\tilde{A}) \wedge \tilde{B} = \tilde{0}$. Sehingga diperoleh $f(\tilde{A})$ dan $\tilde{B}$ tidak beririsan dan $f(x_\varepsilon) = y_\varepsilon \in f(\tilde{A})$. Karena fungsi f merupakan fungsi prabuka-M fuzzy, maka $f(\tilde{A})$ adalah himpunan fuzzy prabuka di Y. Karena himpunan fuzzy $\tilde{B}$ buka sekaligus tutup di Y, maka $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy prabuka di Y. Jadi ruang topologi fuzzy Y adalah ruang fuzzy p-T_2.

4. PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Fungsi $f: X \to Y$ dikatakan *fuzzy slightly precontinuous* jika untuk setiap titik fuzzy x_ε di X dan setiap himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang buka sekaligus tutup di Y dan memuat $f(x_\varepsilon)$, terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang prabuka di X dan memuat x_ε sedemikian hingga $f(\tilde{A}) \subset \tilde{B}$. Dari pembahasan di atas, diperoleh sifat-sifat dari fungsi *fuzzy slightly precontinuous*, hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan aksioma-aksioma pemisahan, serta hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan *graf pre-co-closed fuzzy* dalam bentuk teorema dan lemma.

4.2 Saran

Pada makalah ini penulis banyak mengkaji sifat-sifat dari fungsi *fuzzy slightly precontinuous*, hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan aksioma-aksioma pemisahan, serta hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan *graf pre-co-closed fuzzy*. Bagi pembaca yang tertarik dan ingin melanjutkan penelitian dari makalah ini, penulis menyarankan untuk mengkaji hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan kekompakkan (compactness) serta hubungan antara *fuzzy slightly precontinuity* dan keterhubungan (connectedness).

DAFTAR PUSTAKA

Caldas, Miguel, Navalagi Govindappa, Saraf Ratnesh. 2000. *Weakly preopen and weakly preclosed functions in fuzzy topology*, (Online), (http://www.polytech.univsavoie.fr/fileadmin/polytech_autres_sites/sites/listic/busefal/Papers/89.zip/89_08.pdf, diakses 7 Maret 2014).

Carlson, Steve. 2010. *Fuzzy Sets and Fuzzy Topologies : Early Ideas and Obstacles.* New York: Rose-Hulman Institute of Technology, (Online), (http://www.rose-hulman.edu/math/seminar/seminar_files/2005-06/abstract2006-05-10.pdf, diakses 8 Maret 2014).

Chang, C.L..1968. "Fuzzy Topological Spaces". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 24: pp 182-190.

Ekici, Erdal. 2005. "Generalization of Some Fuzzy Functions". *Journal of Mathemathics.* Vol. 33 (3): pp 277-289.

Juniati, Dwi. 2013. *Topologi Dasar.* Surabaya: Unesa.

Lipschutz, Seymour. 1981. *General Topology*. Singapore: Kin Keong Printing Co. Pte. Ltd.

Nouh, Ali Ahmed. 2005. "On convergence theory in fuzzy topological spaces and its application". *Journal of Mathematics.* Vol. 55 (2): pp 295-316.

Palaniappan, N. 2007. *Fuzzy Topology.* Second Edition. UK: Alpha Science International Ltd.

Shi W, Liu K. 2006. "A fuzzy topology for computing the interior, boundary, and exterior of spatial objects quantitatively in GIS". *Journal of Computers and Geosciences.* Vol. 33: pp 898-915.

Singh, Amit Kumar. 2009. "On T_1 Separation Axioms in I -Fuzzy Topological Spaces". *Jornal of Mathematical Sciences and Applications.* Vol. 3 (49): pp 2421-2425.

Smith, Trey. 2003. *Topology Definition and Theorems*, (Online), (http://www.angelo.edufacultytsmith00main.pdf, diakses 8 Maret 2014).

Zimmermann. H.J. 1992. *Fuzzy Set Theory and Its Applications.* Second, Revised Edition. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.